行列式に関するHadamardの不等式

黒木 玄

2008年5月31日(土)

1 実行列式の絶対値の上からの評価

定理 1.1 (Hadamardの不等式1) A は実 n 次正方行列であるとし, a_j はその第 j 列ベクトルであるとする. a_j の Euclid ノルムを $||a_j||$ と書くと,

$$|\det A| \leqq ||a_1||\,||a_2|| \cdots ||a_n||.$$

証明. $|\det A|$ は A の列ベクトルたちを辺に持つ n 次元平行 $2n$ 面体の体積に等しい. すべての辺の長さを保ったとき体積が最大になるのは列ベクトルが互いに直交する場合であり, その場合の体積がちょうど $||a_1||\,||a_2|| \cdots ||a_n||$ になる. □

2 相加相乗平均の不等式

実数 $x \in (a,b)$ の函数 $f(x)$ が上に凸であるとは $0 \leqq p \leqq 1$, $x, y \in (a,b)$ ならば $pf(x) + (1-p)f(y) \leqq f(px + (1-p)y)$ が成立することである. この定義から数学的帰納法によって次の結果が容易に導かれる.

補題 2.1 (Jensenの不等式) $f(x)$ は実数 $x \in (a,b)$ の上に凸な函数であるとする. このとき $f(x)$ 総和が 1 になる非負の実数の列 $p_1, \dots, p_n$ と $x_1, \dots, x_n \in (a,b)$ に対して

$$p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n) \leqq f(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n). \quad \square$$

補題 2.2 (相加相乗平均の不等式) 正の実数 $x_1, \dots, x_n$ に対して

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

証明. 両辺の log を取った次の不等式を示せばよい:

$$\frac{\log x_1 + \cdots + \log x_n}{n} \leqq \log\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

しかしこれは Jensen の不等式の特別な場合である ($f = \log$, $p_i = 1/n$). □

3 半正定値 Hermite 行列の行列式の上からの評価

定理 3.1 (Hadamard の不等式 2) $A = [a_{ij}]$ が半正定値な (すべての固有値が非負の) n 次 Hermite 行列ならば対角成分 a_{ii} はすべて非負の実数であり,

$$\det A \leqq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

証明. A は半正定値なので任意の n 次元複素列ベクトル x に対して x^*Ax は非負の実数になる. 特に x として標準基底のベクトル e_i を取れば $a_{ii} = e_i^*Ae_i$ が非負の実数になることがわかる.

A の固有値のどれかひとつでも 0 になるなら $\det A = 0$ となるのでさらに証明するべきことは何もない. そこで A は正定値 (すなわち A の固有値はすべて正) であると仮定する. そのとき任意の 0 でない n 次元複素列ベクトル x に対して x^*Ax は正の実数になる. 特に x として標準基底のベクトル e_i を取れば $a_{ii} = e_i^*Ae_i$ が正の実数になることがわかる.

D は第 (i,i) 成分が $a_{ii}^{-1/2}$ であるような実対角行列であるとする. このとき DAD は対角成分がすべて 1 であるような正定値 Hermite 行列になる. 相加相乗平均の不等式より $\det(DAD)^{1/n} \leqq \operatorname{tr}(DAD)/n = 1$ なので $(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn})^{-1}\det A = \det(DAD) \leqq 1$. よって $\det A \leqq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. □

4 複素行列式の絶対値の上からの評価

定理 4.1 (Hadamard の不等式 3) A は複素 n 次正方行列であるとし, a_j はその第 j 列ベクトルであるとする. a_j の複素 Euclid ノルムを $||a_j||$ と書くと,

$$|\det A| \leqq ||a_1||\,||a_2||\,\cdots\,||a_n||.$$

証明. $B = A^*A$ とおくと B は半正定値 Hermite 行列になり, B の第 (i,i) 成分は $||a_i||^2$ に等しい. よって前節の定理より $|\det A|^2 = |\det B| \leqq ||a_1||^2\,||a_2||^2\,\cdots\,||a_n||^2$. 両辺の平方根を取れば欲しい結果が得られる. □