q-exponential

黒木 玄

2006 年 4 月 13 日修正 (2006 年 2 月 24 日作成)

目 次

1 q-exponential の定義と基本性質

1.1 べき級数による定義

v-integers $(n)_v$, v-factorials $(n)_v!$ を次のように定める:

$$(n)_v = \frac{1-v^n}{1-v} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}, \quad (n)_v! = (1)_v(2)_v\cdots(n)_v.$$

次のべき級数を v-exponential と呼ぶことにする.

$$e_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)_v!} x^n.$$

v を q と書いてこちらを q-exponential と呼ぶ文献も多い. $v \to 1$ の極限で $(n)_v \to n$ であるから $e_v(x) \to e^x$ である. この意味で $e_v(x)$ は通常の exponential のパラメータ v による変形である.

$v \mapsto v^{-1}$ で以上の対象は次のように変換される:

$$
\begin{aligned}
&(n)_{v^{-1}} = \frac{1-v^{-n}}{1-v^{-1}} = \frac{v^{-n}(v^n-1)}{v^{-1}(v-1)} = v^{-(n-1)}(n)_v, \\
&(n)_{v^{-1}}! = v^{-n(n-1)/2}(n)_v!, \\
&e_{v^{-1}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{n(n-1)/2}}{(n)_v!} x^n.
\end{aligned}
$$

q-integers $[n]_q$, q-factorials $[n]_q!$ を次のように定める:

$$
[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = q^{n-1} + q^{n-3} + \cdots + q^{-n+3} + q^{-n+1}, \quad [n]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q.
$$

これらは変換 $q \mapsto q^{-1}$ で不変である. 次のべき級数を q-exponential と呼ぶ:

$$
e_q[x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{[n]_q!} x^n.
$$

$e_q[x]$ は変換 $q \mapsto q^{-1}$ で次のように変換される:

$$
e_{q^{-1}}[x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{-n(n-1)/2}}{[n]_q!} x^n.
$$

様々な公式を証明するときには $e_v(x)$ の方が便利だが, 実際に量子展開環に応用する場合には $e_q[x]$ の方が便利である. それらは $v = q^{-2}$ のとき互いに等しい:

$$
e_v(x) = e_{q^{-2}}(x) = e_q[x].
$$

実際 $v = q^{-2}$ のとき

$$
(n)_v = (n)_{q^{-2}} = \frac{1-q^{-2n}}{1-q^{-2}} = \frac{q^{-n}(q^n - q^{-n})}{q^{-1}(q-q^{-1})} = \frac{q^{-n}(q^n - q^{-n})}{q^{-1}(q-q^{-1})} = q^{-(n-1)}[n]_q
$$

であるから

$$
(n)_v! = (n)_{q^{-2}}! = q^{-n(n-1)/2}[n]_q!.
$$

1.2 差分方程式による特徴付け

$e_v(x)$ は次の v 差分方程式を満たしている:

$$
\frac{e_v(x) - e_v(vx)}{(1-v)x} = e_v(x), \qquad i.e., \quad e_v(vx) = (1-(1-v)x)e_v(x).
$$

前者の $v \to 1$ の極限は通常の exponential に関する微分方程式 $de^x/dx = e^x$ に一致している. 差分方程式は次のように証明される:

$$
e_v(x) - e_v(vx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-v^n}{(n)_v!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-v}{(n-1)_v!} x^n
$$

$$= (1-v)x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)_v!}x^{n-1} = (1-v)xe_v(x).$$

逆にべき級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が v 差分方程式 $f(x) - f(vx) = (1-v)xf(x)$ を満たしていれば

$$(1-v^n)a_n = (1-v)a_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

であるから

$$f(x) = a_0 e_v(x)$$

が成立することがわかる.

したがって $e_v(x)$ は上の v 差分方程式および $e_v(0) = 1$ という条件で一意に特徴付けられる. この特徴付けは $e_v(x)$ に関する様々な公式を証明するときによく使われる.

1.3　無限積表示

$(x;v)_k$, $(x;v)_\infty$ を次のように定める:

$$(x;v)_n = (1-x)(1-vx)\cdots(1-v^{n-1}x), \qquad (x;v)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1-v^{n-1}x).$$

これらは次の公式を満たしている:

$$(vx;v)_n = \frac{1}{1-x}(x;v)_{n+1}, \qquad (vx;v)_\infty = \frac{1}{1-x}(x;v)_\infty.$$

記号の簡単のため $\varepsilon = 1-v$ とおく.

$e_v(x)$ の差分方程式による特徴付けより, $n \to \infty$ のとき $v^n \to 0$ ならば形式的に

$$\begin{aligned} e_v(x) &= \frac{1}{1-\varepsilon x}e_v(vx) = \frac{1}{(1-\varepsilon x)(1-v\varepsilon x)}e_v(v^2 x) \\ &= \cdots = \frac{1}{(1-\varepsilon x)(1-v\varepsilon x)(1-v^2\varepsilon x)\cdots} = \frac{1}{(\varepsilon x;v)_\infty}. \end{aligned}$$

これより次の公式が成立していると予想される:

$$e_v(x) = \frac{1}{(\varepsilon x;v)_\infty}.$$

実際にこの公式が成立することが右辺が $e_v(x)$ の差分方程式による特徴付けの条件を満たしていることから確かめられる.

$e_v(vx) = (1-\varepsilon x)e_v(x)$ の (v,x) に (v^{-1}, vx) を代入すると

$$e_{v^{-1}}(x) = (1-(1-v^{-1})vx)e_{v^{-1}}(vx) = (1+(1-v)x)e_{v^{-1}}(vx) = (1+\varepsilon x)e_{v^{-1}}(vx).$$

この差分方程式と条件 $e_{v^{-1}}(0) = 1$ で $e_{v^{-1}}(x)$ は一意に特徴付けられる.

上と同様に形式的に

$$
\begin{aligned}
e_{v^{-1}}(x) &= (1+\varepsilon x)e_v(vx) = (1+\varepsilon x)(1+v\varepsilon x)e_v(v^2 x) \\
&= \cdots = (1+\varepsilon x)(1+v\varepsilon x)(1+v^2\varepsilon x)\cdots = (-\varepsilon x; v)_\infty.
\end{aligned}
$$

これより次の公式が成立していると予想される:

$$
e_{v^{-1}}(x) = (-\varepsilon x; v)_\infty.
$$

実際にこの公式が成立することが右辺が $e_{v^{-1}}(x)$ の差分方程式による特徴付けの条件を満たしていることから確かめられる.

以上の結果より次の公式が成立していることもわかる:

$$
e_{v^{-1}}(-x) = e_v(x)^{-1}.
$$

1.4 二項係数と二項定理

v-binomial coefficients $\binom{n}{k}_v$, q-binomial coefficients $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ を次のように定める:

$$
\binom{n}{k}_v = \frac{(n)_v!}{(k)_v!(n-k)_v!}, \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}.
$$

$v = q^{-2}$ のとき, $(n)_v! = (n)_{q^{-2}}! = q^{-n(n-1)/2}[n]_q!$ および

$$
-\frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = -k(n-k)
$$

より, 次の公式が成立していることがわかる:

$$
\binom{n}{k}_v = \binom{n}{k}_{q^{-2}} = q^{-k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q.
$$

$\binom{n}{k}_v$ は次の v-Pascal's triangle を満たしている:

$$
\binom{n}{k-1}_v + v^k \binom{n}{k}_v = \binom{n+1}{k}_v.
$$

実際

$$
\begin{aligned}
(k)_v + v^k(n-v+1)_v &= (1+v+\cdots+v^{k-1}) + v^k(1+v+\cdots+v^{n-v}) \\
&= 1+v+\cdots+v^{k-1}+v^k+v^{k+1}+\cdots+v^n = (n+1)_v
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= \frac{(n)_v(n-1)_v\cdots(n-k+2)_v}{(k-1)_v!} + v^k\frac{(n)_v(n-1)_v\cdots(n-k+2)_v(n-k+1)_v}{(k)_v!} \\
&= \frac{((k)_v + v^k(n-k+1)_v)(n)_v(n-1)_v\cdots(n-k+2)_v}{(k)_v!} \\
&= \frac{(n+1)_v(n)_v(n-1)_v\cdots(n-k+2)_v}{(k)_v!} = \text{RHS}.
\end{aligned}
$$

文字 x, y は次の v 交換関係を満たしていると仮定する:

$$yx = vxy.$$

このとき次の v-binomial theorem が成立している:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_v x^k y^{n-k}.$$

この結果を v 二項定理と呼ぶことにする. 実際 $n=0$ の場合は明らかであり, n でこの公式が成立すると仮定すると v-Pascal's triangle より

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_v x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_v v^k x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}_v x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} v^k \binom{n}{k}_v x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}_v x^k y^{n+1-k}.\end{aligned}$$

1.5　函数等式による特徴付け

$e_v(x)$ は次の函数等式を満たしている:

$$yx = vxy \implies e_v(x+y) = e_v(x) e_v(y).$$

$e_v(x)$ はこの函数等式によってほぼ特徴付けられる. より正確に言えば, 零でないべき級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が

$$yx = vxy \implies f(x+y) = f(x) f(y)$$

を満たしていることと次が成立することは同値である:

$$f(x) = e_v(a_1 v).$$

証明. まず $yx = vxy \implies e_v(x+y) = e_v(x)e_v(y)$ を示そう. この公式から $f(x) = e_v(a_1 v)$ が $yx = vxy \implies f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たしていることが導かれる. $yx = vxy$ のとき

$$\begin{aligned}e_v(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)_v!}(x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n)_v!}\binom{n}{k}_v x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k)_v!(n-k)_v!} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k)_v!}\frac{y^l}{(l)_v!} = e_v(x)e_v(y).\end{aligned}$$

2 つめの等号で v 二項定理を使い, 4 つめの等号で $l = n-k$ と置いて和を書き直した.

逆に $f(x+y) = f(x)f(y)$ (ここで $yx = vxy$) ならば $f(x) = e_v(a_1 x)$ となることを示そう．上と同様の計算によって

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{k+l}(k+l)_v!}{(k)_v!(l)_v!} x^k y^l, \quad f(x)f(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_k a_l x^k y^l.$$

$x^k y^0$ の係数を比較すると $a_k = a_k a_0$ であり, $f(x)$ は零ではないので $a_0 = 1$ である．$x^k y^1$ の係数を比較すると $a_{k+1}(k+1)_v = a_k a_1$ すなわち $a_{k+1} = \frac{a_1}{(k+1)_v} a_k$ である．よって帰納的に $a_k = a_1^k/(k)_v!$ となることがわかる．したがって $f(x) = e_v(a_1 x)$ である． □

2 dilogarithm の量子化としての q-exponential

Faddeev と Kashaev は $e_v(x)$ が dilogarithm の量子化であることを見抜き, 前節で証明した $e_v(x)$ の函数等式 (本質的にそれは v 二項定理と同値) から dilogarithm に関する five-term identity が導かれることを示した ([2], [3])．以下はその簡単な紹介である．

2.1 dilogarithm の定義と函数等式

Euler's polylogarithm $\mathrm{Li}_s(x)$ が次のように定義される:

$$\mathrm{Li}_s(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{x^n}{n^s}.$$

$\mathrm{Li}_2(x)$ は Euler's dilogarithm と呼ばれ,

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-t)\,dt}{t}$$

という積分表示を持つ．Rogers L-function $L(x)$ が次のように定義される:

$$L(x) = \mathrm{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\log x \log(1-x).$$

これは以下の函数等式を満たしている:

$$\begin{aligned} &L(x) + L(1-x) = 1, \\ &L(x) + L(y) - L(xy) = L\left(\frac{x-xy}{1-xy}\right) + L\left(\frac{y-xy}{1-xy}\right). \end{aligned}$$

これらの函数等式を $\mathrm{Li}_2(x)$ で書き直すと,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) + \log x \log(1-x) = 1, \\ &\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(y) - \mathrm{Li}_2(xy) \\ &\quad = \mathrm{Li}_2\left(\frac{x-xy}{1-xy}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{y-xy}{1-xy}\right) + \log\left(\frac{1-x}{1-xy}\right)\log\left(\frac{1-y}{1-xy}\right). \end{aligned}$$

$L(x)$ もしくは $\mathrm{Li}_2(x)$ が 5 つ登場する公式は five-term identity と呼ばれる．

2.2 q-exponential と dilogarithm の関係

$e_v(x)$ と dilogarithm の直接的な関係が $\log e_v(x)$ を計算すると得られる. $\log(1-x)$ は次のべき級数展開を持つ:

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$e_v(x)$ は次の無限積表示を持つ:

$$e_v(x) = (\varepsilon x; v)_\infty^{-1} = \left(\prod_{k=0}^{\infty}(1 - v^k \varepsilon x)\right)^{-1}.$$

ここで $\varepsilon = 1 - v$ とおいた. よって $|v| < 1$ とすると

$$\begin{aligned}\log e_v(x) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \log(1 - v^k \varepsilon x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v^k \varepsilon x)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} v^{nk}\right)\frac{(\varepsilon x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-v^n}\frac{(\varepsilon x)^n}{n} = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon x)^n}{n(n)_v}.\end{aligned}$$

したがって $v \to 0$ の極限で次が成立する:

$$\lim_{v\to 0} \varepsilon \log e_v(\varepsilon^{-1} x) = \mathrm{Li}_2(x).$$

2.3 five-term identity の量子化

定理 2.1 $yx = vxy$ のとき以下の公式が成立する:

(1) $e_v(x)e_v(y) = e_v(x+y)$.

(2) $e_v(y)x = x(1-\varepsilon y)e_v(y) = (x - \varepsilon xy)e_v(y)$.

(3) $e_v(y)e_v(x) = e_v(x - \varepsilon xy)e_v(y)$.

(4) $e_v(y)e_v(x) = e_v(x + y - \varepsilon xy)$.

(5) $e_v(y)e_v(x) = e_v(x)e_v(y - \varepsilon xy)$.

(6) $e_v(y)e_v(x) = e_v(x)e_v(-\varepsilon xy)e_v(y)$.

証明. (1) が v 二項定理から導かれることはすでに示した. (2) は $e_v(y)$ の満たす v 差分方程式から次のように導かれる:

$$e_v(y)x = x(x^{-1}e_v(y)x) = xe_v(vy) = x(1-\varepsilon y)e_v(y) = (x - \varepsilon xy)e_v(y).$$

(2) より $e_v(y)xe_v(y)^{-1} = x - \varepsilon xy$ であるから (3) が次のように導かれる:

$$e_v(y)e_v(x) = (e_v(y)e_v(x)e_v(y)^{-1})e_v(y) = e_v(x - \varepsilon xy)e_v(y).$$

$y(x - \varepsilon xy) = v(x - \varepsilon xy)y$ なので (1) を (3) に適用すると (4) が得られる:

$$e_v(y)e_v(x) = e_v(x - \varepsilon xy)e_v(y) = e_v(x + y - \varepsilon xy).$$

$(y - \varepsilon xy)x = vx(y - \varepsilon xy)$ なので (1) を (4) に適用すると (5) が得られる:

$$e_v(y)e_v(x) = e_v(x + y - \varepsilon xy) = e_v(x)e_v(y - \varepsilon xy).$$

$y(-\varepsilon xy) = v(-\varepsilon xy)y$ なので (1) を (5) に適用すると (6) が得られる:

$$e_v(y)e_v(x) = e_v(x)e_v(y - \varepsilon xy) = e_v(x)e_v(-\varepsilon xy)e_v(y). \quad \square$$

Faddeev–Kashaev [2] は上の定理における単純な函数等式 (6) から dilogarithm の five-term identity が導かれることを示している (数学的に厳密な証明は Kashaev [3]). そこで上の定理の (6) を quantum five-term identity と呼ぶ.

3 量子展開環への応用 (sl_2 の場合)

$q = e^\hbar$ と置く.

以下では $\hbar$-adic topology で完備化された対象を主に考える. 基礎体は標数 0 であれば何でも良い. 量子展開環に関する正確な説明については Chari–Pressley [1] にまかせることにし, ラフなスタイルで話をすすめる.

3.1 sl_2 の量子展開環

量子展開環 $U = U_\hbar(\mathrm{sl}_2)$ は生成元 E, F, H を持ち, 次の基本関係式を持つ結合代数として定義される:

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = 2F, \quad [E, F] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}} =: [H]_q.$$

このとき q^H と E, F の交換関係は "$yx = vxy$" の形になる:

$$q^H E = q^2 E q^H, \qquad q^H F = q^{-2} F q^H.$$

さらに Hopf 代数構造が次のように定義される:

$$\begin{aligned}
&\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \quad \Delta(E) = E \otimes q^H + 1 \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes 1 + q^{-H} \otimes F, \\
&\varepsilon(H) = \varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \\
&S(H) = -H, \quad S(E) = -Eq^{-H}, \quad S(F) = -q^H F.
\end{aligned}$$

ここで Δ, ε, S はそれぞれ coproduct, counit, antipode である.

3.2 universal R-matrix

参考文献

[1] Chari, V. and Pressley, A., Quantum groups, Cambridge University Press, 1994

[2] Faddeev, L. D. and Kashaev, R. M., Quantum dilogarithm, `hep-th/9310070`

[3] Kashaev, R. M., The q-binomial formula and the Rogers dilogarithm identity, `math.QA/0407078`