モノドロミー保存変形の量子化の進行状況

黒木 玄

2006 年 2 月 28 日

目 次

0 はじめに 1

1 背景にある基本的な考え方 1
1.1 量子化とは 1
1.1.1 古典力学系とは 2
1.1.2 量子力学系とは 3
1.1.3 古典極限とは 3
1.1.4 量子化とは 4
1.2 モノドロミー保存系とソリトン系の関係 4

0 はじめに

ここ数年間における我々のグループ[1]の主要な研究テーマのひとつはモノドロミー保存変形の量子化である．そのテーマの背景にはソリトン系の理論と量子共形場理論がある．それらはアフィン Lie 代数の無限次元対称性を基礎としている．

このレポートの目的はここ数年のモノドロミー保存変形の量子化の背景にある基本的考え方と研究の進展状況を報告することである．

1 背景にある基本的な考え方

1.1 量子化とは

「量子化」という言葉は様々な意味で使われるのでその言葉のこのレポートにおける意味を明確にしておく．

このレポートでは「量子化」という言葉を「正準量子化」の意味で用いる．「正準量子化」とは「古典力学における Poisson 括弧を交換子に置き換えることによる量子化」のことである．以下では古典力学の数学的定式化とその正準量子化について説明する．

[1]我々のグループは五十音順で黒木玄、菊地哲也、名古屋創、長谷川浩司の 4 人で構成されている

1.1.1 古典力学系とは

古典力学系は Poisson 多様体と Hamiltonian と呼ばれるその上の任意の函数の組で記述される. Poisson 多様体とは多様体上の函数環に Poisson 括弧の構造が付加されたものである. 函数 f, g に対して函数 $\{f, g\}$ を対応させる写像が Poisson 括弧であるとはそれが以下の条件を満たしてことである:

(1) $\{\ ,\ \}$ は Lie 代数の公理を満たしている. すなわち $\{f, g\}$ は f, g に関して双線形であり, 反可換性および Jacobi 律を満たしている:

$$\{g, f\} = -\{f, g\}, \qquad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

(2) $\{f, g\}$ は f, g 双方について導分 (derivation) である. すなわち

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}, \quad \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

を満たしている ($\{g, f\} = -\{f, g\}$ よりこれらの片方だけで十分).

さらに Hamiltonian H が与えられれば Poisson 括弧の導分性より

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

によって時間発展が定義される. 従属変数 f が時間変数 t にも陽に依存する場合には, その依存性に関する f の偏導函数を f_t と書き, 時間発展の定義式を次のように修正しなければいけない:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + f_t.$$

Hamiltonian H が時間変数 t を含まない場合には(すなわち自励系の場合には), $\{H, H\} = 0$ より $dH/dt = 0$ となり, H は時間発展に関する保存量になる. しかしモノドロミー保存系は Hamiltonian が時間変数 t を陽に含む非自励系になる.

例 1.1 $\mathbb{R}^2 = \{(q, p)\}$ に Poisson 括弧を $\{q, p\} = 1$ によって定めることができる. x, p の一般の函数 f, g に対しては

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}.$$

物理の教科書には次の形の Hamilton 函数がよく登場する:

$$H = H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + U(q).$$

m は点粒子の質量であり, $U(q)$ はポテンシャル函数である. 時間発展の定義式 $df/dt = \{f, H\}$ より, 次の正準方程式が導かれる:

$$\frac{dq}{dt} = \{q, H\} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \qquad \frac{dp}{dt} = \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -U'(q).$$

正準方程式によって $\mathbb{R}^2 = \{(q, p)\}$ 上の力学系が定義される. この正準方程式の前者の式は運動量 p が質量 m と速度 dq/dt の積に等しいことを意味しており, 後者の式は運動量の時間微分 dp/dt がポテンシャルが発生させる力 $-U'(q)$ に等しいという Newton の運動方程式に等しい.

$U(q) = \frac{k}{2}q^2$ のときこの古典力学系は古典調和振動子と呼ばれる. 物理学における多くの古典力学系がこの型の系の高次元化になっている. □

1.1.2 量子力学系とは

量子力学系は結合的非可換環 $\mathcal{A}$ と Hamiltonian と呼ばれるその非可換環の元 $H \in \mathcal{A}$ の組で記述される．量子力学系 $(\mathcal{A}, H)$ には導分 d/dt が Hamiltonian との交換子によって定義される:

$$\frac{df}{dt} = [f, H] \qquad (f \in \mathcal{A}).$$

ここで $[\ ,\ ]$ は交換子 $[f, g] = fg - gf$ である．この導分は非可換環 $\mathcal{A}$ に時間発展を定義しているとみなせる．従属変数 f が時間変数 t にも陽に依存する場合には, その依存性に関する f の偏導函数を f_t と書き, 時間発展の定義式を次のように修正しなければいけない:

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + f_t.$$

Hamiltonian H が時間変数 t を含まない場合には (すなわち自励系の場合には), $[H, H] = HH - HH = 0$ より $dH/dt = 0$ となり, H は時間発展に関する保存量になる．しかしモノドロミー保存系の量子化は Hamiltonian が時間変数 t を陽に含む非自励系になる．

1.1.3 古典極限とは

量子力学系から古典力学系への極限を考えるためには Planck 定数と呼ばれるパラメータ $\hbar$ を導入しなければいけない．

$\hbar$ は 非可換環 $\mathcal{A}$ の中心元であり ($[\hbar, \mathcal{A}] = 0$), $\mathcal{A}$ の任意の元は $\hbar$ のべき級数に一意に展開可能であると仮定する:

$$f = f_0 + \hbar f_1 + \hbar^2 f_2 + \cdots.$$

さらに任意の $f, g \in \mathcal{A}$ に対して $[f, g] = fg - gf \in \hbar\mathcal{A}$ であると仮定する．このとき

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}|_{\hbar=0} = \mathcal{A}/\hbar\mathcal{A}$$

は可換環になる．記号の簡単のため $f \bmod \hbar\mathcal{A} \in \mathcal{A}_0$ も f_0 と書くことにする．このとき次の条件によって $\mathcal{A}_0$ に Poisson 括弧を定義することができる:

$$\{f_0, g_0\} := \frac{1}{\hbar}[f, g] \bmod \hbar\mathcal{A} \qquad (f, g \in \mathcal{A}).$$

Poisson 可換環 $\mathcal{A}_0$ を $\mathcal{A}$ の古典極限と呼ぶ. 概型の理論によって任意の可換環はある多様体上の函数環とみなせるのでこれによって Poisson 多様体が得られたと考えることができる．

この古典極限が Hamiltonian の対応と時間発展が整合的になるためには量子 Hamiltonian $H \in \mathcal{A}$ に対応する時間発展が

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{\hbar}[f, H] + f_t \qquad (f \in \mathcal{A}).$$

によって定義されていなければいけない．$\mathcal{A}$ に時間発展 (代数的には単なる導分) をこれで定義しておくと古典極限 $\mathcal{A}_0$ に誘導された時間発展 (導分) は

$$\frac{df_0}{dt} = \{f_0, H_0\} + f_{0,t} \qquad (f_0 \in \mathcal{A}_0)$$

を満たしている.

以上によって Planck 定数 $\hbar$ を含む量子力学系に対して $\hbar \to 0$ の極限で古典力学系が自然に定義されることがわかった.

注意 1.2 上の説明における $\hbar$ は物理の教科書における $i\hbar$ に対応している. 我々は数学者なので記号の煩雑さを避けるために Planck 定数 $\hbar$ の中に虚数単位 i を繰り込んで単に $\hbar$ と書いてしまっている. □

1.1.4 量子化とは

以上のように量子力学系から古典力学系への古典極限は自然に定義される. 逆に古典力学系に対してそれを古典極限に持つ量子力学系のことを古典力学系の量子化 (quantization) と呼ぶ. 与えられた古典力学系に対してその量子化は一意的であるとは限らない. しかしもとの古典力学系が特別に美しい性質を持つ場合にはその性質を保った量子力学系で自然と思われるものがひとつ決まる場合がある. 我々が興味を持っているのはそのような場合である.

例 1.3 例 1.1 の量子化が以下のように構成される.

q, p から生成される結合的代数で次の基本関係式を持つものを $\mathcal{A}$ と書くことにする:

$$[q, p] = \hbar$$

物理の教科書では $\hbar$ の中に i を繰り込まずに $[q, p] = i\hbar$ が採用されている.

簡単のため例 1.1 のポテンシャル函数 $U(q)$ は q の多項式であると仮定する. 調和振動子の場合は実際にそうである. 多項式でない場合は $\mathcal{A}$ の適切な拡大が必要になる. Hamiltonian $H \in \mathcal{A}$ を例 1.1 と形式的に完全に同じ形の次の式で定義する:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + U(q) \in \mathcal{A}.$$

このとき量子力学系 $(\mathcal{A}, H)$ が例 1.1 の量子化になっていることは容易に確かめられる.

非可換環 $\mathcal{A}$ は座標 x を持つ直線上の微分作用素環の中で次のように実現可能である:

$$q = (x \text{ 倍}), \qquad p = -\hbar \frac{\partial}{\partial x}.$$

物理の教科書では $\hbar$ の中に i を繰り込まずに $p = -i\hbar\partial/\partial x$ が採用されている. □

1.2 モノドロミー保存系とソリトン系の関係

参考文献

[1] Chari, V. and Pressley, A., A guide to quantum groups. Corrected reprint of the 1994 original. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xvi+651 pp.