互いに可換な Hamiltonians の作り方

黒木 玄

2005 年 12 月 5 日修正　(2005 年 12 月 3 日深夜作成)

目 次

1　互いに可換な Hamiltonians の作り方

1.1　U と A

U は体 $\mathbb{C}$ 上の代数 (associative algebra) であるとし, $U_\pm$ はその部分代数であるとする. U の積が定める写像 $U_- \otimes U_+ \to U$ は線形同型であると仮定する.

U として主に affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ の適切に完備化された critical level の enveloping algebra $\mathcal{U}_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$ を考える. $U = \mathcal{U}_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$ のとき $U_\pm$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の Gauss 分解から得られる subalgebras を取る.

U にもう一つの積 $*$ を次の条件によって定める:

$$(a_- a_+) * (b_- b_+) := b_- a_- a_+ b_+ \qquad (a_+, b_+ \in U_+,\ a_-, b_- \in U_-).$$

U はこの積 $*$ に関しても associative algebra である. 積 $*$ に関する代数とみなされた U を A と表わすことにする:

$$A := (U, *).$$

A は U_- の積の順序を反対にした opposite 代数 U_-° と U_+ の代数としてのテンソル積 $U_-^\circ \otimes U_+$ と同一視できる.

多くの量子可積分系の基礎になる代数はこのような代数 A の商代数になっている.

もちろん U として critical level の affine U_q を考えてもよい. その場合には A として U の dual Hopf algebra (すなわち quantum group 上の函数環) を考えることもできる.

1.2　Z と I

U の center を Z と書き, 量子可積分系の構成において基本になる代数 $A = (U, *)$ の部分空間とみなされた Z を I と書くことにする.

林によれば $U = \mathcal{U}_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$ のとき Z は Sugawara operators (高次のものを含む) から生成される非常に大きな代数になる.

定理 1 I は $A = (U, *)$ の可換部分代数である.

証明. 任意に $a, b \in Z$ を取る. a, b は次のように表示される:

$$a = \sum_i a_{-,i} a_{+,i}, \qquad b = \sum_j b_{-,j} b_{+,j} \qquad (a_{+,i}, b_{+,j} \in U_+,\ a_{-,i}, b_{-,j} \in U_-).$$

このとき

$$a * b = \sum_{i,j} b_{-,j} a_{-,i} a_{+,i} b_{+,j} = \sum_{i,j} a_{-,i} a_{+,i} b_{-,j} b_{+,j} = \sum_{i,j} a_{-,i} b_{-,j} b_{+,j} a_{+,i} = b * a.$$

ここで2つ目と3つ目の等号はそれぞれ $a, b \in Z$ から導かれる. この計算より $a * b = ab \in Z = I$ であることもわかる. これで I が積 $*$ に関して閉じており, $A = (U, *)$ の可換部分代数をなすことがわかった. □

多くの量子可積分系の Hamiltonians は可換部分代数 I の元として構成される.

2 例

2.1 名古屋の principal $A_{n-1}^{(1)}$ 模型

n, m は正の整数であるとする.
以下の生成元と基本関係式で定義される $\mathbb{C}$ 上の代数を $\mathcal{A}$ と表わす.

- 生成元:

$$\varepsilon_i \quad (i \in \mathbb{Z}), \qquad f_{ij} \quad (i, j \in \mathbb{Z},\ i > j).$$

- 基本関係式:

$$\begin{aligned} &[\varepsilon_i, f_{jk}] = 0, \qquad [f_{ij}, f_{kl}] = -(\delta_{jk} f_{il} - \delta_{li} f_{kj}), \\ &f_{ij} = 0 \quad (i - j > m), \qquad f_{kl} = 1 \quad (k - l = m). \\ &\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i, \qquad f_{i+n, j+n} = f_{ij}. \end{aligned}$$

名古屋はこの $\mathcal{A}$ の中に互いに可換な Hamiltonians の組を構成した. しかし, 名古屋が構成したものは maximal なものから程遠いことが 2005 年 12 月 2 日の東北大学数学教室表現論セミナーで判明している.

この困難は前節の方法を affine Lie algebra の critical level の enveloping algebra $\mathcal{U}_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$ に適用することによって克服可能であると思われる.

$\hat{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g} = \mathrm{gl}_n(\mathbb{C})$ に付随する affine Lie algebra であるとする:

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K.$$

$\hat{\mathfrak{g}}$ の critical level の enveloping algebra を $U = \mathcal{U}_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$ と書く. ($U = \mathcal{U}_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の universal enveloping algebra $U(\hat{\mathfrak{g}})$ の適切な完備化 $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ を $K + h^\vee = K + n$ で生成される両側 ideal で割ってできる商代数として定義される.)

$\mathfrak{g} = \mathrm{gl}_n(\mathbb{C})$ の lower maximal nilpotent subalgebra と upper Borel subalgebra をそれぞれ $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{b}_+$ と表わす. $\hat{\mathfrak{g}}$ の subalgebras $\hat{\mathfrak{g}}_\pm$ を次のように定める:

$$\hat{\mathfrak{g}}_- = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{g} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}], \qquad \hat{\mathfrak{g}}_+ = \mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathfrak{g} \otimes t\mathbb{C}[t].$$

$\hat{\mathfrak{g}}_\pm$ の $U = \mathcal{U}_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$ における像から位相的に生成される部分代数を $U_\pm$ と書くことにする．このとき U の積の定める写像 $U_- \mathbin{\widehat{\otimes}} U_+ \to U$ は同型写像になる．よって前節の方法で積 $*$ と代数 $A = (U, *)$ が定義される．

名古屋が用いた代数 $\mathcal{A}$ は自然にこの A の商代数とみなせることを示そう．

まず, ε_i たちから生成される $\mathcal{A}$ の部分代数 $\mathcal{A}_+$ は U_+ の principal grade が正の部分で割ってできる商代数と同一視できる．

次の生成元と基本関係式で定義される $\mathbb{C}$ 上の代数を U'_- と表わす:

- 生成元:
$$F_{ij} \quad (i, j \in \mathbb{Z},\ i > j).$$
- 基本関係式:
$$[F_{ij}, F_{kl}] = \delta_{jk} F_{il} - \delta_{li} F_{kj}, \qquad F_{i+n, j+n} = F_{ij}.$$

$n \times n$ の行列単位を E_{ij} と書くことにすると, U_- と U'_- は次によって同一視可能である:

$$E_{ij} \otimes 1 = F_{ij} \quad (1 \leqq j < i \leqq n), \qquad E_{ij} \otimes t^{-k} = F_{i, j-kn} \quad (1 \leqq i, j \leqq n,\ k \geqq 1).$$

このことより f_{ij} から生成される $\mathcal{A}$ の部分代数 $\mathcal{A}_-$ は U_- の opposite U_-° の商代数と同一視できることがわかる．

$U = \mathcal{U}_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$ の center Z の $\mathcal{A}$ での像を $\mathcal{I}$ と書くことにする．前節の議論によって $\mathcal{I}$ は $\mathcal{A}$ の可換部分代数をなす．林によれば Z は (高次も含めた) Sugawara operators から生成される．よって $\mathcal{I}$ は Sugawara operators の像から生成される．この $\mathcal{I}$ は名古屋が構成した互いに可換な Hamiltonians を含んでいるはずである．

林によれば $U(\mathfrak{g})$ の r 次の central element

$$S_r = \sum c_{i_1 j_1 \cdots i_r j_r} E_{i_1 j_1} \cdots E_{i_r j_r}, \qquad c_{i_1 j_1 \cdots i_r j_r} \in \mathbb{C}$$

に対して, r 次の Sugawara operators $S_r[m]$ の母函数 $S_r(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-r} S_r[m]$ が次のように構成される:

$$S_r(z) = \sum c_{i_1 j_1 \cdots i_r j_r} {}^{\circ}_{\circ} E_{i_1 j_1}(z) \cdots E_{i_r j_r}(z) {}^{\circ}_{\circ} + \text{affine 化に伴なう補正項}.$$

ここで ${}^{\circ}_{\circ}\ {}^{\circ}_{\circ}$ は適切に定義された normal product である．

さらに $U(\mathfrak{g})$ の center は $U(\mathfrak{g})$ の元を成分に持つ行列 $X = [E_{ji}]$ の $r = 1, \ldots, n$ 乗の trace から生成される．(特性多項式の係数の量子化である Capelli elements を center の生成元に選ぶこともできる．べきの trace と Capelli elements の関係は Newton's formula によって与えられる.)

これらの事実より, 名古屋が構成した互いに可換な Hamiltonians は affine 化に伴う補正項がいらない場合になっていることがわかる (はずである).

以上のように, 名古屋が構成した互いに可換な Hamiltonians は critical level の affine Lie algebra の立場から理解されるべきものであるように思われる．

affine Lie algebra を用いた定式化はほぼそのまま共形場理論による定式化にもなっている．critical level の共形場理論は量子可積分系に対応しており, level が critical でない場合の共形場理論はモノドロミー保存変形の量子化に対応している．ただし名古屋が扱った場合を共形場理論が含むようにするためにはすでに存在する共形場理論の定式化を少し拡張しなければいけない．

すでに L-operator を共形場理論の立場で理解する方法は完全にわかっている.

共形場理論の立場ですべてを理解できるようになるまで名古屋が構成した Hamiltonians の真の姿は明らかにならないと考えられる.

2.2 戸田格子の一般化

前節の代数 $\mathcal{A}$ の ε_i から生成される部分代数 $\mathcal{A}_+$ は U_+ を principal grade が正の部分で割ってできる商代数と同一視できた. 割った結果は principal grade が 0 の部分しか残っていない. この部分を正の部分が残された商代数に変更すれば戸田格子を一般化したケースも扱うことができる. しかしこのような変更をほどこすと affine Weyl 群作用は定義されなくなる.

名古屋が扱った場合はモノドロミー保存変形の立場からは, 原点では確定特異点を持ち, 無限遠点に不確定特異点を持つ場合に対応している. (Noumi-Yamada は原点に確定特異点を持ち, 無限遠点に rank 2 の不確定特異点を持つ有理接続のモノドロミー保存変形を扱った.) affine Weyl 群作用は確定特異点で自然に定義される.

周期的戸田格子は原点と無限遠点の両方に rank 1 の不確定特異点を持つ場合に対応している. 不確定特異点の rank を 1 より大きくすればその一般化が得られる.

2.3 q 差分化?

名古屋が扱ったケースの q 差分化 (当然量子系) を affine U_q の立場から理解するための正しい道程はおそらく共形場理論の q 差分版を考えることである. しかし $q=1$ の場合の通常の共形場理論の場合と同様に Frenkel-Reshetikhin の構成を少し一般化しなければいけない.

最初にやるべき仕事は q 差分版の L-operator を q 差分版の共形場理論の立場で理解することである. universal L-operator を bra と ket で挟んでやれば q 差分版の L-operator が得られる. q 差分版の L-operator の正体がわかれば affine Weyl 群作用の正体を知るための決定的な手掛りも得られるだろう.

q 差分版の互いに可換な Hamiltonians は critical level の affine U_q の center から得られる. critical level の affine U_q の center の具体的記述に関しては Reshetikhin–Semenov-Tian-Shansky の仕事がある. critical level での center はむしろ q 差分版の方がよくわかっている.

最終的には以上の話が楕円量子群まで拡張されてあらゆるものがそこから理解可能になることを期待したい.