Weyl 群作用の不変行列式の双対公式

黒木 玄

2005 年 12 月 3 日更新　(2005 年 11 月 28 日作成)

そうそう以下の行列式の公式が証明できました. やはり 1 年生レベルの問題でした. あまりにも簡単なので, 証明できた瞬間に「1 年生に先に解かれずに終わってラッキーだった」と思いました.

定理 1 行列 K_i, L_j を次のように定める:

$$K_i = \begin{bmatrix} x_{i1} & 1 & & \\ & x_{i2} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & x_{in} \end{bmatrix} \qquad (n \times n \text{ 行列}, i = 1, \dots, m),$$

$$L_j = \begin{bmatrix} x_{1j} & 1 & & \\ & x_{2j} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ w & & & x_{mj} \end{bmatrix} \qquad (m \times m \text{ 行列}, j = 1, \dots, n).$$

n 次の単位行列を 1_n と書くことにする. このとき次の公式が成立している:

$$\det\bigl(K_1 \cdots K_m + (-1)^{m-1} w 1_n\bigr) = \det\bigl(L_1 \cdots L_n + (-1)^{n-1} z 1_m\bigr). \quad \square$$

補題 2 m 個の $n \times n$ 行列 $X_1, \dots, X_m$ に対して

$$\det \begin{bmatrix} X_1 & 1_n & & \\ & X_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1_n \\ w1_n & & & X_m \end{bmatrix} = \det\bigl(X_1 \cdots X_m + (-1)^{m-1} w 1_n\bigr).$$

証明. X_i たちが可逆であると仮定してもよい. そのとき

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} X_1 & 1_n & & & \\ & X_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1_n & \\ & & & X_{m-1} & 1_n \\ w1_n & & & & X_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & 1_n & & & & \\ & X_2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1_n & & \\ & & & X_{m-2} & 1_n & \\ -wX_m^{-1} & & & & X_{m-1} & 1_n \\ 0 & & & & & X_m \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
X_1 & 1_n & & & & \\
 & X_2 & \ddots & & & \\
 & & \ddots & 1_n & & \\
(-1)^2 w X_{m-1}^{-1} X_m^{-1} & & & X_{m-2} & 1_n & \\
0 & & & & X_{m-1} & 1_n \\
0 & & & & & X_m
\end{vmatrix} = \cdots
$$

$$
= \begin{vmatrix}
X_1 + (-1)^{m-1} w X_2^{-1} \cdots X_m^{-1} & 1_n & & \\
0 & X_2 & \ddots & \\
\vdots & & \ddots & 1_n \\
0 & & & X_m
\end{vmatrix}
$$

$$
= |X_1 + (-1)^{m-1} w X_2^{-1} \cdots X_m^{-1}||X_2| \cdots |X_m| = \mathrm{RHS}. \quad \square
$$

定理の証明. 次の mn × mn 行列を考える:

$$
T_1 = \begin{bmatrix}
K_1 & 1_n & & \\
 & K_2 & \ddots & \\
 & & \ddots & 1_n \\
w 1_n & & & K_m
\end{bmatrix} \qquad (mn \times mn \text{ 行列}).
$$

この行列は自然に $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ に作用する operator T とみなせる. 基底の並び方を変えると T は次のように表示される:

$$
T_2 = \begin{bmatrix}
L_1 & 1_m & & \\
 & L_2 & \ddots & \\
 & & \ddots & 1_m \\
z 1_m & & & L_n
\end{bmatrix} \qquad (mn \times mn \text{ 行列}).
$$

上の補題より $\det T_1 = \det T_2$ の左辺と右辺のそれぞれが証明したい公式の左辺と右辺に等しい. $\square$

死ぬほど簡単でした.

上の行列式公式はある種の unipotent crystals の双対性に関係しています. その双対性の親玉は T_1 や T_2 の表示を持つ $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ 上の operator T だということがわかったことになります.

Berenstein-Kazhdan (geometric and unipotent crystals の論文) にも Kajiwara-Noumi-Yamada (2 つの Weyl 群作用の論文) にも以上のような視点は無かったと思います.

前に話したのですが, $(m, n) = (2, n)$ で n が奇数の場合の量子化は長谷川さんの Weyl 群作用の A_{n-1} 型の場合に変数変換によって同値になります.

あと上と同様の考え方をすれば, 2 個のテンソル積ではなく, $\mathbb{C}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_N}$ に作用する operator T を考えることもできます. それによって N 個の互いに可換な Weyl 群作用を構成できるかもしれません.

問題 3 上に登場した operator T の正体は何か? $\square$

問題 4 q 差分古典ソリトン系からのリダクション? $\square$

問題 5 量子化? $\square$