KP 階層と q-KP 階層の同等性

黒木 玄

2005 年 11 月 28 日作成

目 次

0 はじめに

2005 年 11 月 18 日のセミナーでは菊地君に色々教えてもらい, そして色々聴いてもらって (雑談的に), 個人的には非常に助かりました.

そしてその直後の土日と 2005 年 11 月 21 日 (月) の午前の AO 入試の監督のときにそのとき私が疑問に出した KP と q-KP のあいだの関係特に解の具体的表示について考え直していました.

定理 0.1 KP 階層 $=$ q-KP 階層. KP 階層と q-KP 階層は互いに相手の「無限個の時間変数を変数変換したもの」になっている. □

このノートではこの事実について簡単に説明します.

1 KP 階層と q-KP 階層の同等性

1.1 KP 階層と q-KP 階層の定義

定義 1.1 (KP 階層) KP 階層とは時間変数 $t_1, t_2, \dots$ たちの適切な函数環 R 上の形式 Laurent 級数環 $R((z^{-1}))$ の R 部分加群 F で以下の条件を満たすもののことである:

(A) 自然な写像の列 $F \to R((z^{-1})) \to R((z^{-1}))/R[[z^{-1}]]$ の合成 i_F の R 上の index は 0 に等しい. すなわち i_F の kernel と cokernel は同じ rank を持つ有限生成自由 R 加群である.

(B) $F \exp\left(\sum_{i>0} t_i z^i\right)$ は $\partial/\partial t_1, \partial/\partial t_2, \dots$ の作用で閉じている.

条件 (B) は次の条件と同値である:

(C) $F \exp\left(\sum_{i>0} t_i z^i\right)$ は t_i たちに関する任意の線形微分作用素の作用で閉じている.

さらに条件 (C) は R を適切に選んであれば次と同値である (この辺の議論はいい加減):

(D) $F \exp\left(\sum_{i>0} t_i z^i\right)$ は t_i たちの座標変換について閉じている. □

q-exponential $\exp_q$ を次のように定める:

$$\exp_q x = \left(\prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k\varepsilon x)\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{[k]!},$$
$$\varepsilon = 1-q, \qquad [k] = \frac{1-q^k}{1-q}, \qquad [k]! = [1][2]\cdots[k].$$

変数 x_i に関する q 差分作用素 D_i を次のように定める:

$$(D_i f)(x_i) = \frac{f(x_i)-f(qx_i)}{(1-q)x_i}.$$

定義 1.2 (q-KP 階層) q-KP 階層とは時間変数 $x_1, x_2, \dots$ たちの適切な函数環 R 上の形式 Laurent 級数環 $R((z^{-1}))$ の R 部分加群 F で以下の条件を満たすもののことである:

(a) 自然な写像の列 $F \to R((z^{-1})) \to R((z^{-1}))/R[[z^{-1}]]$ の合成 i_F の R 上の index は 0 に等しい. すなわち i_F の kernel と cokernel は同じ rank を持つ有限生成自由 R 加群である.

(b) $F \prod_{i>0} \exp_q x_i z^i$ は $D_1, D_2, \dots$ の作用で閉じている.

条件 (b) は次の条件と同値である:

(c) $F \prod_{i>0} \exp_q x_i z^i$ は x_i たちに関する任意の線形 q 差分作用素の作用で閉じている.

さらに条件 (c) は R を適切に選んであれば次と同値である (この辺の議論はいい加減):

(d) $F \prod_{i>0} \exp_q x_i z^i$ は x_i たちの座標変換について閉じている. □

1.2 KP 階層と q-KP 階層のあいだの変数変換

KP hiearchy の時間変数を $t_1, t_2, t_2, \ldots$ と書き, q-KP hierarchy の時間変数を $x_1, x_2, x_3, \ldots$ と書くとき, 変数変換は次の母函数表示によって定義される:

$$\exp\left(\sum_{i>0} t_i z^i\right) = \prod_{i>0} \exp_q x_i z^i. \tag{$*$}$$

前節の定義より, この変数変換によって KP 階層と q-KP 階層が一対一に対応していることがわかる.

注意 1.3 $\exp_q x$ の定義に $\varepsilon = 1 - q$ を入れておいたおかげで, $q \to 1$ の極限で $\exp_q x \to \exp x$ となる. よって $q = 1$ のとき q-KP 階層は KP 階層に一致する. □

2 q-KP 階層の解

KP 階層の解は様々な方法で構成され、τ 函数のレベルでの多項式解, N ソリトン解, テータ函数解のような興味深い特殊解を表現論的な方法や代数幾何的な方法で構成できる. それらは上の記号における時間変数 t_i で具体的に表示される. それらの時間変数を x_i に変数変換すれば q-KP 階層の解が得られる. そのようにして得られた q-KP 階層の解の q 差分版の時間変数 x_i による具体的表示はどのようになっているか.

2.1 多項式解

変数変換の公式 $(*)$ の左辺の z^n の係数は次に等しい:

$$p_n(t) = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n,\ k_i \geqq 0} \frac{t_1^{k_1}}{k_1!}\frac{t_2^{k_2}}{k_2!}\cdots\frac{t_n^{k_n}}{k_n!}$$

同様に $(*)$ の右辺の z^n の係数 $h_n(x)$ は次のように表わされる:

$$h_n(t) = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n,\ k_i \geqq 0} \frac{x_1^{k_1}}{[k_1]!}\frac{x_2^{k_2}}{[k_2]!}\cdots\frac{x_n^{k_n}}{[k_n]!}$$

KP 階層の (τ 函数のレベルでの) 多項式解は $p_n(t)$ たちを成分に持つ行列式 (Schur 多項式) で表わされる. その中の $p_n(t)$ を $h_n(x)$ で置き換えれば q-KP 階層の多項式解が得られる.

2.2 N ソリトン解

N ソリトン解の最も易しい構成方法は vertex operator を使うことである. 以下、KP 階層を表現するために使われる boson を

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}, \qquad [a_m, q] = \delta_{m,0}$$

と書くことにする. KP 階層の時間発展は次の operator で与えられる：

$$U = \exp\left(\sum_{i>0} t_i a_i\right).$$

U による conjugation で vertex operator

$$V_\lambda(z) = \exp\left(\lambda \sum_{m<0} \frac{z^{-m}}{-m} a_m\right) e^{\lambda q} z^{\lambda a_0} \exp\left(\lambda \sum_{m>0} \frac{z^{-m}}{-m} a_m\right)$$

は次のように変換される:

$$UV_\lambda(z)U^{-1} = \exp\left(\sum_{i>0} t_i z^i\right) V_\lambda(z).$$

右辺に登場した因子は t_i と x_i のあいだの変数変換の母函数表示 $(*)$ の左辺なので, 単純に次の公式が成立する:

$$UV_\lambda(z)U^{-1} = \left(\prod_{i>0} \exp_q x_i z^i\right) V_\lambda(z).$$

以上の公式より, KP の N ソリトン解は $\exp(\sum t_i z^i)$ で表示され, q-KP の N ソリトン解は $\prod \exp_q x_i z^i$ で表示されることがわかる.

以上によって少なくとも多項式解や N ソリトン解に関して, q-KP 階層の理論は KP 階層の理論と解の具体的表示の仕方も含めて完全に同値であり, 何も新しい内容を含んでいないことがわかった.

2.3 テータ函数解

実はこの場合だけは x_i による具体的な表示をどのように得たら良いかについてまだ十分に考えていない.

しかし, 代数幾何的な構成は $(*)$ の変数変換によって、完全に x_i の言葉だけで書き下すことができることはすぐにわかる.

以上の話はかなり自明な内容なので今度会ったときに簡単に説明できます.