共形場理論におけるコセット構成と双対性

黒木玄

1994年9月6日講演*

目 次

1 What is CFT?

共形場理論 (conformal field theory, CFT) とはコンパクト Riemann 面上の conformal blocks の空間に関する理論であり, 様々な共形場理論 (various conformal field theories) が存在する.

Example.

- Belavin-Polyakov-Zamolodchikov (BPZ) minimal models
- Wess-Zumino-Witten (WZW) models
- W-algebras

*研究集会『量子化, 幾何学, 可積分系』, 1994 年 9 月 5 日 (月)—7 日 (水), 京大会館 (京都市左京区吉田河原町 15–9) での講演原稿をもとに 2010 年 4 月 29 日に LaTeX 化.

- parafermions
- coset models
- Super Symmetry + (—)
- ······ □

それぞれの共形場理論ごとに conformal blocks の空間が定義される.
後で WZW models と BPZ minimal models と coset models について説明する.
共形場理論の定式化には次の二通りの方法がある:

(R) Representation theoretic approach

(G) Geometric approach

この講演ではこの二つのアプローチのあいだを行ったり来たりする.

2 Wess-Zumino-Witten model

Wess-Zumino-Witten (WZW) model は半単純 Lie 群 G のゲージ対称性を持つコンパクト Riemann 面上の量子場の理論である. 以下, 次のように仮定する.
X : compact Riemann surface,
G : semisimple Lie group over $\mathbb{C}$,
$\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G =$ (Lie algebra of G).

WZW model の conformal blocks の構成方法には表現論的方法 (R) と幾何的方法 (G) の二種類がある:

(R) affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$,
highest weight integrable representations,
adelic formulation on X

(G) moduli space of principal G-bundles on X,
determinant line bundle ($\leftarrow G = SL_n(\mathbb{C})$)

まず (R) 表現論的方法について説明し, その次に $G = SL_n(\mathbb{C})$ の場合について (G) 幾何的方法を説明する.

2.1 (R) Representation theoretic formulation of WZW model

以下のように記号を用意しておく.

$K := \mathbb{C}(X) =$ (the field of rational functions on X),
$\widehat{K}_p :=$ (the completion of K at $p \in X$) $\cong \mathbb{C}((z_p))$,
$\widehat{O}_p \cong \mathbb{C}[[z_p]]$,
$\mathcal{A} := \prod'_{p\in X} \widehat{K}_p$, adelic ring ($\prod'$ は制限直積),
$\widehat{O} := \prod_{p\in X} \widehat{O}_p$, “maximal compact”,

$\widehat{O} \subset \mathcal{A} \supset K$,

$\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}C$, affine Lie algebra,
$\hat{\mathfrak{g}}_{\mathcal{A}} := \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}C$, adele of affine Lie algebras,
$\mathfrak{g} \otimes \widehat{O} \subset \hat{\mathfrak{g}}_{\mathcal{A}} \supset \mathfrak{g} \otimes K$,
$k = 0, 1, 2, \dots$ (level と呼ばれる理論のパラメーター),
$\{L_{k,\lambda}\}_{\lambda \in P_k} = \{$h.w. integrable representations of $\hat{\mathfrak{g}}$ with level $k\}$,

$p_1, \dots, p_N \in X$,
$\lambda_1, \dots, \lambda_N \in P_k$,
$\lambda_p := \lambda_i$ if $p = p_i$, $\lambda_p := 0$ otherwise,
$\vec{\lambda} = (\lambda_p)_{p \in X}$,
$\mathbb{L}_{k,\vec{\lambda}} := \bigotimes'_{p \in X} L_{k,\lambda_p}$ ($\bigotimes'$ は制限テンソル積).

(略された図: コンパクト Riemann 面の X 点 $p_1, \dots, p_N$ のそれぞれに最高ウェイト $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ で指定された表現が突き刺さっている.)

WZW model とは次のように保型形式の adele による構成と類似の方法で定義されたベクトル空間に関する理論である:

$\mathcal{L}_{k,\vec{\lambda};X} := \mathbb{L}_{k,\vec{\lambda}}/(\mathfrak{g} \otimes K)\mathbb{L}_{k,\vec{\lambda}}$, coinvariant quotient space,
$\mathcal{L}^*_{k,\vec{\lambda};X} \cong [\mathbb{L}^*_{k,\vec{\lambda}}]^{\mathfrak{g} \otimes K}$, invariant subspace.

Definition. $\mathcal{L}^*_{k,\vec{\lambda};X}$ を **conformal blocks** の空間と呼ぶ. □

$$\mathcal{L}_{k;X}\binom{\lambda_1,\dots,\lambda_N}{p_1,\dots,p_N} := \left[\left(\bigotimes_{i=1}^N L_{k,\lambda_i}\right)^*\right]^{\mathfrak{g} \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(*p_1 + \dots + *p_N))}, \text{ invariant subspace.}$$

Lemma. $\mathcal{L}^*_{k,\vec{\lambda};X} \cong \mathcal{L}^*_{k;X}\binom{\lambda_1,\dots,\lambda_N}{p_1,\dots,p_N}$ (自然な同型). □

Conformal blocks の空間を adele を用いて定義したが, この結果を用いれば有限個の点 $p_1, \dots, p_N$ のみ関係したデータのみで再定義可能であることがわかる.

Theorem (WZW model の基本定理, [TUY])**.**

(1) $\dim \mathcal{L}^*_{k,\vec{\lambda};X} = \dim \mathcal{L}^*_{k;X}\binom{\lambda_1,\dots,\lambda_N}{p_1,\dots,p_N} < \infty$.

(2) $\dim \mathcal{L}^*_{k;X}\binom{\lambda_1,\dots,\lambda_N}{p_1,\dots,p_N}$ は点付きコンパクト Riemann 面 $(X; p_1, \dots, p_N)$ を変形しても変わらない. 実際には stable curve まで変形しても次元が変わらない.
($\Leftarrow$ Exists projectively flat connection + (3))

(3) $(X; p_1, \dots, p_N)$ が stable curve であり, その ordinary double point のひとつを q とし, q を二点 q', q'' に分離してできる stable curve を $(\widetilde{X}; p_1, \dots, p_N, q', q'')$ と表わす. このとき次の自然な同型が存在する:

$$\mathcal{L}^*_{k;X}\binom{\lambda_1,\dots,\lambda_N}{p_1,\dots,p_N} \cong \bigoplus_{\mu \in P_k} \mathcal{L}^*_{k;\widetilde{X}}\binom{\lambda_1,\dots,\lambda_N,\mu,\mu^\dagger}{p_1,\dots,p_N,q',q''}.$$

以上の性質 (2)+(3) は conformal blocks の factorization property と呼ばれている. □

2.2 (G) Geometric formulation of WZW model

以下, $G = SL_n(\mathbb{C})$ と仮定し, 以下のように定める.

$\mathcal{SU}_X(n)$:= (moduli sp. of semistable vector bundles on X of rank n with trivial det.),
θ_n := (determinant line bundle on $\mathcal{SU}_X(n)$).

Definition. $H^0(\mathcal{SU}_X(n), \theta_n^k)$ を **generalized theta functions** の空間と呼ぶ. □

2.3 (R)=(G)

Theorem ((R)=(G), [BL])**.** $\vec{\lambda} = \vec{0} := (0)_{p\in X}$ (すなわち Riemann 面上のすべての点の highest weight が 0) のとき自然な同型

$$H^0(\mathcal{SU}_X(n), \theta_n^k) \cong \mathcal{L}^*_{k,\vec{0};X}.$$

が存在する. これによって generalized theta functions の空間と conformal blocks の空間を同一視できる. □

Remark. $\vec{\lambda} \neq \vec{0}$ の場合には "parabolic structure" (level structure) 付きの vector bundles の moduli space を考えることによって, 同様の結果を得ることができる. □

Problem. WZW models 以外の CFTs の geometric な解釈. □

[BL] の方針は以下の通り.

すべての点での trivialization 付きの vector bundles の同型類の集合を

$$T_0 := \left\{ (E,t) \;\middle|\; \begin{array}{l} t = (t_X, (t_p)_{p\in X}), \\ E: \text{ vector bundle of rank } n \text{ with trivial det.}, \\ t_p : \widehat{\mathcal{O}}_p^n \xrightarrow{\sim} E_p \otimes_{\mathcal{O}_p} \widehat{\mathcal{O}}_p \quad \text{trivialization at } p, \\ t_X : K^n \xrightarrow{\sim} H^0(X, E\otimes_{\mathcal{O}_X} K) \quad \text{trivialization at generic point} \end{array} \right\} \Big/ \cong.$$

と定める. このとき $(E,t) \in T_0$, $p \in X$ に対して γ_p を同型写像の合成

$$\gamma_p = \hat{t}_{X,p}^{-1} \circ t_p : \widehat{K}_p^n \xrightarrow{\sim} E_p \otimes_{\mathcal{O}_p} \widehat{K}_p \xrightarrow{\sim} \widehat{K}_p^n$$

によって定める. ここで $\hat{t}_{X,p}$ は $t_X : K^n \xrightarrow{\sim} H^0(X, E\otimes_{\mathcal{O}_X} K)$ から誘導された同型写像 $\widehat{K}_p^n \xrightarrow{\sim} E_p \otimes_{\mathcal{O}_p} \widehat{K}_p$ を表わす. これによって次の同型写像が得られる:

$$T_0 \xrightarrow{\sim} SL_n(\mathcal{A}) = \prod\nolimits'_{p\in X} SL_n(\widehat{K}_p), \quad (E,t) \mapsto (\gamma_p)_{p\in X}.$$

ゆえに

$$\mathcal{SU}_X(n) \fallingdotseq SL_n(K)\backslash SL_n(\mathcal{A})/SL_n(\widehat{\mathcal{O}}) =: \mathcal{SL}_X(n.$$

右辺の $\mathcal{SL}_X(n)$ は stack として well-defined である.

Lemma. 無限次元 Grassmann 多様体 $SL_n(\mathcal{A})/SL_n(\widehat{\mathcal{O}})$ 上の determinant line bundle を $\tilde{\theta}_n$ と表わすと, 次の自然な同型が得られる:

$$\mathcal{L}^*_{k,\vec{0}} \cong H^0(SL_n(\mathcal{A})/SL_n)(\widehat{\mathcal{O}}), \tilde{\theta}_n^k). \quad \square$$

この Lemma を通して, generalized theta functions と affine Lie algebra の highrst weight integrable representations を関係付けることができ, それによって (R)=(G) の定理を示すことができる.

3 Strange duality conjecture

まず幾何的定式化の場合について説明し, 次に表現論的定式化の場合について説明する.

3.1 (G) Geometric strange duality conjecture

以下のように定める.

$\mathcal{SU}_X(n) :=$ (moduli sp. of semistable vector bundles on X of rank n with trivial det.),
$\mathcal{U}_X(n,d) :=$ (moduli sp. of semistable vector bundles on X of rank n and of degree d),
$\mathcal{U}_X^*(n) := \mathcal{U}_X(n, n(g-1)) \qquad (g :=$ (genus of X)),

$\tau_{r,l} : SU_X(r) \times \mathcal{U}^*(l) \to \mathcal{U}^*(rl), \quad (E,F) \mapsto E \otimes_{\mathcal{O}_X} F,$

$\Theta_n :=$ (divisor $\{\, E \in \mathcal{U}_X^*(n) \mid H^0(X,E) \neq 0 \,\}$ に対応する $\mathcal{U}^*(n)$ 上の line bundle),
$\theta_n :=$ (divisor $\{\, E \in \mathcal{SU}_X(n) \mid H^0(X, E \otimes_{\mathcal{O}_X} L) \neq 0 \,\}$ に対応する $\mathcal{SU}^*(n)$ 上の line bundle).

ただし $L \in J^{g-1}(X) = \mathrm{Pic}^{g-1}(X)$ を任意にひとつ与えておく.

Lemma. $\tau_{r,l}^*(\Theta_{rl}) \cong \theta_r^{\otimes l} \boxtimes \Theta_l^{\otimes r}$. □

Lemma. $\dim H^0(\mathcal{U}_X^*(n), \Theta_n) = 1$. □

これらによって次の線形写像が得られる:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \cong H^0(\mathcal{U}_X^*(rl), \Theta_{rl}) &\hookrightarrow H^0(\mathcal{SU}_X(r) \times \mathcal{U}_X^*(l), \tau_{r,l}(\Theta_{rl})) \\ &\cong H^0(\mathcal{SU}_X(r), \theta_r^{\otimes l}) \otimes H^0(\mathcal{U}_X^*(l), \Theta_l^{\otimes r}). \end{aligned}$$

これより次の線形写像が誘導される:

$$\nu_{r,l} : H^0(\mathcal{SU}_X(r), \theta_r^{\otimes l})^* \to H^0(\mathcal{U}_X^*(l), \Theta_l^{\otimes r}).$$

Conjecture ([B],[DT])**.** 写像 $\nu_{r,l}$ は常に同型になるだろう. □

この予想を Beauville [B] は strange duality と呼んでいる.
そこでこの予想を **strange duality conjecture** と呼ぶことにする.

Remark (予想を支持する結果)**.**

- Beauville-Narasimhan-Ramanan [BNR] proved the case of $l = 1$.
- Verlinde formula $\implies \dim H^0(\mathcal{SU}_X(r), \theta_r^{\otimes l}) = \dim H^0(\mathcal{U}_X^*(l), \Theta_l^{\otimes r})$.
- Donagi-Tu [DT] generalized the conjecture to an arbitrary degree. □

3.2 (R) 表現論的定式化における類似の結果

WZW model の表現論的定式化の方で類似の結果は得られていないか?
答: “local version” と $\mathbb{P}^1$ 上の N 点 conformal blocks に関する結果が存在する.

3.2.1 (R) “local version” (各点 $p \in X$ での表現論)

Affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ の level k の highest weight integrable representation を $L_\lambda^{\hat{\mathfrak{g}}_k}$ と表わす. ここで λ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の highest weight の $\mathfrak{g}$-part である. 以下, $\mathrm{sl}_n(\mathbb{C})$ を $\mathrm{sl}(n)$ と略記する.

高さが r で level が l の半無限 Young diagrams 全体の集合を次のように定める:

$$\mathcal{Y}_{r,l} = \{\, Y = (y_i)_{i=1}^r \in \mathbb{Z}^r \mid y_1 \geqq \cdots \geqq y_r,\ y_1 - y_r \leqq l \,\}.$$

半無限 Young diagram $Y = (y_i)_{i=1}^r \in \mathcal{Y}_{r,l}$ の重さ $|Y|$ を次のように定める:

$$|Y| = y_1 + y_2 + \cdots + y_r$$

半無限 Young diagram $Y \in \mathcal{Y}_{r,l}$ に対応する Maya diagram $M = M(Y)$ を次のように定める:

$$M = M(Y) = (m_{ij}), \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & (j \geqq y_i) \\ 0 & (j > y_i). \end{cases}$$

Maya diagram $M = (m_{ij})$ の転置 ${}^tM = ({}^tm_{ij})$ を次のように定める:

$${}^tm_{j,\nu r+i} = m_{i,\nu l+j} \quad (\nu \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, l).$$

転置 ${}^tM(Y)$ に対応する $\mathcal{Y}_{l,r}$ の元を Y の転置と呼び, ${}^tY$ と表わす.

有限 Young diagrams の集合 $\overline{\mathcal{Y}}_{r,l}$ を次のように定める:

$$\overline{\mathcal{Y}}_{r,l} = \{\, \overline{Y} = (\bar{y}_i)_{i=1}^r \in \mathcal{Y}_{r,l} \mid \bar{y}_r = 0 \,\}.$$

半無限 Young diagram $Y \in \mathcal{Y}_{r,l}$ に対して Young diagram $\overline{Y} \in \overline{\mathcal{Y}} r, l$ を次のように定める:

$$\overline{Y} = (\bar{y}_i)_{i=1}^r, \quad \bar{y}_i = y_i - y_r.$$

$\overline{\mathcal{Y}}_{r,l}$ の各々の元と $\widehat{\mathrm{sl}}(r)$ の level l の highest weight integrable representation の highest weight の $\mathrm{sl}(r)$-part は一対一に対応している. $\overline{Y} \in \overline{\mathcal{Y}}_{r,l}$ に対応する $\widehat{\mathrm{sl}}(r)$ の level l の highest weight integrable representation を $L_{\overline{Y}}^{\widehat{\mathrm{sl}}(r),l}$ と表わす.

次の結果がよく知られている:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} L_{\Lambda_p}^{\widehat{\mathrm{sl}}(rl)_1} \otimes L_p^{\widehat{\mathrm{gl}}(1)_{rl}} = \bigoplus_{Y \in \mathcal{Y}_{r,l}} L_{\overline{Y}}^{\widehat{\mathrm{sl}}(r)_l} \otimes L_{{}^t\overline{Y}}^{\widehat{\mathrm{sl}}(l)_r} \otimes L_{|Y|}^{\widehat{\mathrm{gl}}(1)_{rl}}$$

ここで $\mathcal{F}$ はある種の Fermion Fock space である. したがって次が成立している:

$$L_{\Lambda_p}^{\widehat{\mathrm{sl}}(rl)_1} = \bigoplus_{|Y|=p} L_{\overline{Y}}^{\widehat{\mathrm{sl}}(r)_l} \otimes L_{{}^t\overline{Y}}^{\widehat{\mathrm{sl}}(l)_r}.$$

3.2.2 (R) $\mathbb{P}^1$ 上の N 点 conformal blocks の場合

Affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ のゲージ対称性を持つ WZW model の conformal blocks の空間を $\mathcal{L}_{k,\vec{\lambda};X}^{\hat{\mathfrak{g}},*}$ と表わす.

Theorem ([NT])**.** 表現のあいだの自然な同型は次の線形写像を誘導する:

$$\mathbb{C} \cong \mathcal{L}^{\widehat{\mathrm{sl}}(rl)_1,*}_{\vec{\lambda};\mathbb{P}^1} \hookrightarrow \bigoplus_{\vec{\mu}\in\mathcal{Y}(\lambda)} \mathcal{L}^{\widehat{\mathrm{sl}}(r)_l,*}_{\vec{\mu};\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}^{\widehat{\mathrm{sl}}(l)_r,*}_{{}^t\vec{\mu};\mathbb{P}^1}.$$

ここで $\vec{\lambda} = (\overline{\lambda_p})_{p\in X}$, $\lambda_{p_i} = \overline{\Lambda}_{m_i}$ $(i = 1, \dots, N)$ であり, 他の λ_p は 0 であり,

$$\mathcal{Y}(\lambda) = \{\, (\mu_p)_{p\in X} \mid \mu_{p_i} \in \mathcal{Y}_{r,l},\ |\mu_{p_i}| = m_i\ (i = 1, \dots, N),\ \text{他の } \mu_p \text{ は } 0 \,\}$$

であり, ${}^t\mu = (\overline{{}^t\mu_p})_{p\in X}$ である. 上の線形写像から誘導される写像 $\mathcal{L}^{\widehat{\mathrm{sl}}(r)_l}_{\vec{\mu};\mathbb{P}^1} \to \mathcal{L}^{\widehat{\mathrm{sl}}(l)_r,*}_{{}^t\vec{\mu};\mathbb{P}^1}$ は同型である:

$$\mathcal{L}^{\widehat{\mathrm{sl}}(r)_l}_{\vec{\mu};\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{L}^{\widehat{\mathrm{sl}}(l)_r,*}_{{}^t\vec{\mu};\mathbb{P}^1}. \quad \square$$

Remark. $\mathbb{P}^1$ 上の N 個の点 $p_1, \dots, p_N$ の位置を動かすことが [NT] の証明の本質的なところで使われている. すなわち conformal blocks の factorization property と Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) equation が定める braid 群の monodromy 表現の構造が本質的に使われている.

Nakanishi-Tsuchiya [NT] の定理を任意のコンパクト Riemann 面に拡張できれば, Beauville-Laszlo [BL] の結果 (R)=(G) によって, strange duality conjecture を示すことができる. Nakanishi-Tsuchiya [NT] の定理を任意のコンパクト Riemann 面に拡張の証明にも conformal blocks の factorization property が本質的に使われることになるだろう.

実際にそうならば, strange duality の証明に KZ equation が定める braid 群の monodromy 表現の構造に関する結果が使われることになり, 非常に興味深い. $\square$

4 Coset construction

以下, Goddard-Kent-Olive [GKO] などによる Virasoro algebra の coset construction およびそれに付随する共形場理論を扱う.

4.1 GKO coset construction of unitary representations

以下のような設定を扱う.

$\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$,
$\hat{\mathfrak{g}} = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}C$, affine Lie algebra,
$k = 1, 2, 3, \dots$ (level, C の固有値),
$P_k = \{0, 1, 2, \dots, k\} \ni \lambda$,
$L_{k,\lambda} =$ (level k, highest weight λ を持つ highest weight integrable representation of $\hat{\mathfrak{g}}$),
$\mathrm{Vir} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]\dfrac{d}{dt} \oplus \mathbb{C}C'$, the Virasoro algebra,
$c := 1 - \dfrac{6}{(k+2)(k+3)}$ (central charge, C' の固有値),
$h_{\lambda,\mu} = \dfrac{((k+3)(\lambda+1) - (k+2)(\mu+1))^2 - 1}{4(k+2)(k+3)}$,
$V_{c,h} =$ (cenral charge c, h.w. h を持つ h.w. irreducible representation of Vir).

Theorem ([GKO])**.** $\lambda \in P_k$, $\varepsilon \in P_1$ に対して, 以下の自然な同型が得られる:

$$L_{k,\lambda} \otimes L_{1,\varepsilon} \cong \bigoplus_{\mu \in P_{k+1},\ \lambda+\mu+\varepsilon \equiv 0 \bmod 2} L_{k+1,\mu} \otimes V_{c,h_{\lambda,\mu}} \quad \square$$

Remark. これによって [GKO] は上の定理に現われる $V_{c,h_{\lambda,\mu}}$ がすべて Vir の unitary representation であることを示した. 実は central charge c が 1 未満であるような Vir の unitary representations はそれらで尽きていることも知られている ([FQS], [L]). $\square$

4.2 Coset construction of conformal blocks

Vir に対しても WZW model の場合と同様にして conformal blocks の空間できる. それらを WZW model の場合と同様に次のように表わす:

$$\mathcal{V}^*_{c,\vec{h};X} \cong \mathcal{V}^*_{c;X}\binom{h_1,\dots,h_N}{p_1,\dots,p_N}.$$

[GKO] による表現のあいだの自然な同型は次の線形写像を誘導する:

$$\mathcal{L}^*_{k,\vec{\lambda};X} \otimes \mathcal{L}^*_{1,\vec{\varepsilon};X} \hookrightarrow \bigoplus_{\vec{\mu}: \lambda_p+\mu_p+\varepsilon_p \equiv 0 \bmod 2} \mathcal{L}^*_{k+1,\vec{\mu};X} \otimes \mathcal{V}^*_{c,\vec{h}_{\vec{\lambda},\vec{\mu}};X}.$$

この線形写像から次の写像が誘導される:

$$\varphi : \mathcal{L}_{k+1,\vec{\lambda};X} \otimes \mathcal{L}^*_{k,\vec{\varepsilon};X} \to \mathcal{V}^*_{c,\vec{h}_{\vec{\lambda},\vec{\mu}};X} \otimes \mathcal{L}_{1,\vec{\varepsilon};X}.$$

Conjecture. 写像 φ は常に同型になるだろう. $\square$

Remark. $k = 1, 2, \dots$, $c = 1 - 6/((k+2)(k+3))$ に対して集合 R_c を

$$R_c = \{\, h_{\lambda,\mu} \mid \lambda \in P_k,\ \mu \in P_{k+1} \,\}$$

と定める. 対称性 $h_{k-\lambda,k+1-\mu} = h_{\lambda,\mu}$ より R_p の元の個数は $(k+1)(k+2)/2$ である. よって集合のあいだの次の一対一対応が得られる:

$$P_k \times P_{k+1} \cong R_c \times P_1, \quad (\lambda,\mu) \leftrightarrow (h,\varepsilon).$$

ここで $\lambda + \mu + \varepsilon \equiv 0 \pmod 2$, $h = h_{\lambda,\mu}$ である. $\square$

Remark. $X = \mathbb{P}^1$ 上の 3 点 conformal blocks の場合に写像 φ の定義域と値域の次元は等しい. よって WZW model および Virasoro algebra に対する CFT の factorization properties から以下が導かれる:

(1) 写像 φ の定義域と値域の次元は常に等しい.

(2) $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点 conformal blocks に関して上の予想が成立すれば一般の場合も予想が成立する. $\square$

Example. $k = 1$, $c = 1/2$ の場合には $R_c = \{0, 1/2, 1/16\}$ である. この場合には $L_{1,0}$, $L_{1,1}$, $V_{1/2,0}$, $V_{1/2,1/2}$, $V_{1/2,1/16}$ を Fermion を使って構成できる. そのことを使えば $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点 conformal blocks に関して $k = 1$ の場合に予想が成立することを示せる. 池田岳 [I] は実際にこの方針に基づいてその場合の予想を証明している. $\square$

参考文献

[B] Beauville, Arnaud: Vector bundles on curves and generalized theta functions: recent results and open problems. Current topics in complex algebraic geometry (Berkeley, CA, 1992/93), 17–33, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[BL] Beauville, Arnaud and Laszlo, Yves: Conformal blocks and generalized theta functions. Comm. Math. Phys. 164 (1994), no. 2, 385–419.

[BNR] Beauville, Arnaud, Narasimhan, M. S., and Ramanan, S.: Spectral curves and the generalised theta divisor. J. Reine Angew. Math. 398 (1989), 169–179.

[DT] Donagi, Ron and Tu, Loring W.: Theta functions for $\mathrm{SL}(n)$ versus $\mathrm{GL}(n)$. Math. Res. Lett. 1 (1994), no. 3, 345–357.

[FQS] Friedan, Daniel, Qiu, Zongan, and Shenker, Stephen: Conformal invariance, unitarity, and critical exponents in two dimensions. Phys. Rev. Lett. 52 (1984), no. 18, 1575–1578.

[GKO] Goddard, P., and Kent, A., and Olive, D.: Virasoro algebras and coset space models. Phys. Lett. B 152 (1985), no. 1-2, 88–92.

[I] Ikeda, Takeshi: Coset constructions of conformal blocks. Dissertation, Tohoku University, Sendai, 1996. Tohoku Mathematical Publications, 3. Tohoku University, Mathematical Institute, Sendai, 1996. ii+55 pp.

[L] Langlands, Robert P.: On unitary representations of the Virasoro algebra. Infinite-dimensional Lie algebras and their applications (Montreal, PQ, 1986), 141–159, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1988.

[NT] Nakanishi, Tomoki, and Tsuchiya, Akihiro: Level-rank duality of WZW models in conformal field theory. Comm. Math. Phys. 144 (1992), no. 2, 351–372.

[TUY] Tsuchiya, Akihiro, Ueno, Kenji, and Yamada, Yasuhiko: Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries. Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, 459–566, Adv. Stud. Pure Math., 19, Academic Press, Boston, MA, 1989.