楕円曲線上の Wess-Zumino-Witten 模型

黒木玄 *

1999 年 3 月 18 日

概 要

楕円曲線上の Wess-Zumino-Witten 模型について概説する. まず, それに付随する Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard 方程式について説明し, 次に, 臨界レベルにおけるその模型が与える量子可積分系について説明する.

目 次

1 Affine Lie 環とその表現 **2**
1.1 Affine Lie 環とその表現 2
1.2 菅原作用素 3

2 射影直線上の WZW 模型 **4**

3 Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard 方程式 **6**
3.1 相関函数の定義 6
3.2 $H(w)$ に関する Ward-Takahashi identities 7
3.3 $E_\alpha(w)$ に関する Ward-Takahashi identities 8
3.4 Weyl-Kac denominator $\Pi = \Pi(q, h)$ 10
3.5 $T(w)$ に関する Ward-Takahashi identity (1) 10
3.6 $T(w)$ に関する Ward-Takahashi identity (2) 11
3.7 KZB 方程式の母函数表示 12
3.8 KZB 方程式 13

4 楕円 Calogero-Gaudin 模型 **15**
4.1 2 階の Hamiltonians 15
4.2 高階の Hamiltonians に関するスケッチ 16

*東北大学大学院理学研究科数学専攻

1 Affine Lie 環とその表現

1.1 Affine Lie 環とその表現

$\mathfrak{g}$ は有限次元複素単純 Lie 環であるとし, $(\ |\ )$ は $2h^\vee(A|B) = \mathrm{tr}_\mathfrak{g}(\mathrm{ad}\, A\, \mathrm{ad}\, B)$ $(A, B \in \mathfrak{g})$ と正規化された Killig form であるとする. ここで, $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の daul Coxeter number である. 例えば, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ならば $h^\vee = n$ である. このように正規化しておくと, $\mathfrak{g}$ の long root の長さの 2 乗が 2 に等しくなる. また, ρ を half sum of positive roots とすると, strange formula $24(\rho|\rho) = 2h^\vee \dim \mathfrak{g}$ が成立している.

単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に付随する affine Lie 環を $\hat{\mathfrak{g}}$ と書くことにする: $\hat{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}\hat{k}$. ただし, Lie 環構造は次の条件によって定められているものとする:

$$
\begin{aligned}
&[\hat{k}, \hat{\mathfrak{g}}] = 0, \\
&[\xi^m \otimes A, \xi^n \otimes B] = \xi^{m+n} \otimes [A, B] + \hat{k}(A|B) m \delta_{m+n,0} \quad \text{for } m, n \in \mathbb{Z},\ A, B \in \mathfrak{g}
\end{aligned}
$$

以下, 簡単のため $A \in \mathfrak{g}$, $m \in \mathbb{Z}$ に対して, $A[m] = \xi^m \otimes A$ と置く. $A \in \mathfrak{g}$ に対応する current operator を $A(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-1} A[m]$ と定める. 以下では, $A \in \mathfrak{g}$ と $A[0] \in \hat{\mathfrak{g}}$ を同一視し, $\mathfrak{g}$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分環とみなしておく.

$\mathfrak{g}$ の表現 M が level $k \in \mathbb{C}$ であるとは M に $\hat{k}$ が k 倍で作用していることであると定義する. 以下, $\hat{\kappa} = \hat{k} + h^\vee$, $\kappa = k + h^\vee$ と置く. $\hat{\kappa}$ の M への作用が消えているとき, すなわち level が $-h^\vee$ のとき, M は critical level であるという.

V は $\mathfrak{g}$ の表現であり, $k \in \mathbb{C}$ であるとし, V への $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分環 $\hat{\mathfrak{g}}_+ = \mathbb{C}[\xi] \otimes \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}\hat{k}$ の作用を $(A[m]v + a\hat{k})v = \delta_{m,0} Av + akv$ $(A \in \mathfrak{g},\ m \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{C})$ によって定める. この V から誘導された $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現を level k の Weyl module と呼び, $W_k(V)$ と書くことにする: $W_k(V) = U(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\hat{\mathfrak{g}}_+)} V$. (Lie 環 $\mathfrak{a}$ にの universal enveloping algebra を $U(\mathfrak{a})$ と表わす.) 以下では, $v \in V$ と $1 \otimes v \in W_k(V)$ を同一視し, V を $W_k(V)$ の $\mathfrak{g}$ 部分加群とみなしておく.

$\mathfrak{g}$ の Verma module から誘導される Weyl module は $\hat{\mathfrak{g}}$ の Verma module である. $\mathfrak{g}$ の表現 V が既約であっても, $W_k(V)$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現として既約であるとは限らないが, V と k の組み合わせが一般の位置にあれば $W_k(V)$ は既約になる. 例えば, V が有限次元既約表現でかつ k が無理数ならば $W_k(V)$ は既約になる.

$\mathfrak{g}$ の三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ を固定し, その三角分解に関する highest root を θ と書くことにする. k は正の整数であるとし, $P_k = \{\, \lambda \mid \lambda \text{ は dominant integral でかつ } (\lambda|\theta) \leqq k \,\}$ と置く. このとき, $\lambda \in P_k$ に対して, highest weight λ の $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 V_λ に対して, その Weyl module $W_{k,\lambda} = W_k(V_\lambda)$ の唯一の irreducible quotient $L_{k,\lambda}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現になり, highest weight を持つ $\hat{\mathfrak{g}}$ の任意の可積分既約表現はそれらのどれかに同型である. また, そのとき, V_λ の highest weight vector を v_λ と書き, $\mathfrak{g}$ の highest root vector を E_θ と書くと, $L_{k,\lambda}$ は $E_\theta[-1]^{k-(\lambda|\theta)+1} v_\lambda$ から生成される部分加群による $W_{k,\lambda}$ の quotient に等しい.

1.2 菅原作用素

菅原作用素 $S(z)$ を形式的に次のように定義する:

$$S(z) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\dim \mathfrak{g}} {}^{\circ}_{\circ} J_p(z) J^p(z) {}^{\circ}_{\circ}.$$

ここで, J_p, J^p は $(\ |\ )$ に関する $\mathfrak{g}$ の双対基底であり, ${}^{\circ}_{\circ}\ {}^{\circ}_{\circ}$ は normal product である: 任意の $A, B \in \mathfrak{g}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$${}^{\circ}_{\circ} A[m]B[n] {}^{\circ}_{\circ} = \begin{cases} A[m]B[n] & \text{if } m < 0, \\ B[n]A[m] & \text{if } m \geqq 0. \end{cases}$$

M は $\mathfrak{g}$ の表現であり, 任意の $v \in M$ に対して, 十分 m を大きくすると, 任意の $A \in \mathfrak{g}$ に対して, $A[m]v = 0$ が成立していると仮定する. 例えば, 前節で定義した Weyl module やその部分および商加群はこの条件を満たしている. (以下では, $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現と言えば, 常にこの条件を仮定する.)

このとき, 形式的に $S(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-2} S[m]$ と展開すると, 各 $S[m]$ は M 上の作用素として well-defined であり, 任意の $A \in \mathfrak{g}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して, 次を満たしている:

$$\begin{aligned} [S[m], A[n]] &= -\hat{\kappa} n A[m+n], \\ [S[m], S[n]] &= \hat{\kappa} \left[(m-n) S[m+n] + \frac{m^3 - m}{12} \delta_{m+n,0} \hat{k} \dim \mathfrak{g} \right]. \end{aligned}$$

よって, 以下が成立している:

- $\hat{\kappa}$ が M 上で可逆なとき, $T[m] = \hat{\kappa}^{-1} S[m]$ と置くと, $T[m]$ は M 上で Virasoro 代数の関係式を満たしている. M の level が k であるとき, Virasoro 代数の central charge は $c_k = k \dim \mathfrak{g} / \kappa$ になる. このとき, $T(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-2} T[m] = \hat{\kappa}^{-1} S(z)$ と置き, $T(z)$ を菅原 energy-momentum tensor と呼ぶことにする.
- M が critical level (i.e., $\hat{\kappa} = 0$ on M) であれば, M 上の作用素として, 各 $S[m]$ は affine Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の元および任意の $S[n]$ と可換である.

菅原作用素 $S(z)$ は $\mathfrak{g}$ の Casimir element $C_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2} \sum_p J_p J^p$ の affine 化である. $\mathfrak{g}$ の highest weight λ を持つ有限次元既約表現 V_λ 上での $C_{\mathfrak{g}}$ の値は $(\lambda | \lambda + 2\rho)/2$ に等しい. V_λ をそれから誘導される Weyl module $W_{k.\lambda}$ に埋め込むと, V_λ には自然に $S[0]$ が作用するが, その作用は $C_{\mathfrak{g}}$ の作用と一致している: $S[0] = C_{\mathfrak{g}} = (\lambda | \lambda + 2\rho)/2$ on V_λ. また, $m > 0$ のとき, $S[m] V_\lambda = \{0\}$ である. 特別な場合として, $\lambda = 0$ のとき, すなわち $V_\lambda = V_0$ が $\mathfrak{g}$ の 1 次元自明表現である場合を考えると, そこへの $S[-1]$ の作用も消える: $S[-1] V_0 = \{0\}$. また, $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ と自明表現の basis を $\mathbf{1}$ と書くことにすると, $S[-2]\mathbf{1} = \frac{1}{2} \sum_p J_p[-1] J^p[-1] \mathbf{1}$ が成立している.

正当化の仕方はここでは省略するが, 以下の公式が成立している: $A, B \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$A(z)B(w) = \frac{k(A|B)}{(z-w)^2} + \frac{[A,B](w)}{z-w} + {}^{\circ}_{\circ}A(z)B(w){}^{\circ}_{\circ},$$
$$S(w) = \frac{1}{2}\sum_p {}^{\circ}_{\circ}J_p(w)J^p(w){}^{\circ}_{\circ} = \frac{1}{2}\lim_{z\to w}\left[\sum_p J_p(z)J^p(w) - \frac{k\dim\mathfrak{g}}{(z-w)^2}\right]. \tag{1.1}$$

2 射影直線上の WZW 模型

いきなり, 楕円曲線の場合をやるのではなく, より簡単な射影直線上の Wess-Zumino-Witten (WZW) 模型について復習しよう. 楕円曲線の場合にも使える計算方法がより簡単な形式で現われので本質がわかり易くなる.

この節では, $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$ は互いに異なるものとし, $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_N)$ と書くことにする. また, $V_1, \ldots, V_N$ は $\mathfrak{g}$ の表現であるとし, M_0, M_∞ は前節で触れた条件を満足する $\hat{\mathfrak{g}}$ の level k の表現であるとする. 簡単のため, $V = \bigotimes_{i=1}^N V_i$ と置く. M_∞ への$\hat{\mathfrak{g}}$ の右作用を $vA[m] = -A[-m]v$ ($v \in M_\infty$, $A \in \mathfrak{g}$, $m \in \mathbb{Z}$) と定める. このとき, $\hat{k}$ の M_∞ への右作用は k 倍になる. また, この作用によって誘導される $S[m]$ の M_∞ への右作用は $vS[m] = S[-m]v$ ($v \in M_\infty$, $m \in \mathbb{Z}$) となる.

線形汎函数 $\Phi : M_\infty \otimes V \otimes M_0 \to \mathbb{C}$ は任意の $A \in \mathfrak{g}$, $m \in \mathbb{Z}$, $v_\infty \in M_\infty$, $v \in V$, $v_0 \in M_0$ に対して, 次の条件を満たしていると仮定する:

$$\Phi(v_\infty A[m] \otimes v \otimes v_0) - \Phi(v_\infty \otimes v \otimes A[m]v_0) = \sum_{i=1}^N z_i^m \rho_i(A)\Phi(v_\infty \otimes v \otimes v_0). \tag{2.1}$$

さらに, level が critical でないならば, 次の条件も仮定する:

$$\begin{aligned}&\Phi(v_\infty T[m] \otimes v \otimes v_0) - \Phi(v_\infty \otimes v \otimes T[m]v_0)\\ &\quad = \sum_{i=1}^N \left(z_i^{m+1}\frac{\partial}{\partial z_i} + (m+1)z_i^m \rho_i(C_\mathfrak{g})\right)\Phi(v_\infty \otimes v \otimes v_0)\end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで, $\rho_i(a)$ ($a \in U(\mathfrak{g})$) は v の i 番目のファクターへの a の作用である. すなわち, $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ に対して,

$$\rho_i(a)\Phi(v_\infty \otimes v \otimes v_0) = \Phi(v_\infty \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes av_i \otimes \cdots \otimes v_N \otimes v_0).$$

ここで仮定した条件は [TK] による (chiral) vertex operator の定義の $N+2$ 点の場合への単純な一般化である.

以下においては, $v_0 \in M_0$ は $A[m]v_0 = 0$ ($A \in \mathfrak{g}$, $m \geqq 0$) を満たし, $v_\infty \in M_\infty$ は $v_\infty A[m] = 0$ ($A \in \mathfrak{g}$, $m < 0$) を満たしていると仮定する. また, $w, w_i \in \mathbb{C}$ は $|z_i| > |w| > 0$, $|z_i| > |w_1| > |w_2| > 0$ を満たしていると仮定する. $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \in V$ と $A, B \in \mathfrak{g}$ とに対して次のよう

に置く:

$$\begin{aligned}
&\langle v(\vec{z})\rangle = \langle v_1(z_1)\cdots v_N(z_N)\rangle = \Phi(v_\infty \otimes v \otimes v_0),\\
&\langle v(\vec{z})A(w)\rangle = \Phi(v_\infty \otimes v \otimes A(w)v_0),\\
&\langle v(\vec{z})A(w_1)B(w_2)\rangle = \Phi(v_\infty \otimes v \otimes A(w_1)B(w_2)v_0),\\
&\langle v(\vec{z})S(w)\rangle = \Phi(v_\infty \otimes v \otimes S(w)v_0) = \kappa\Phi(v_\infty \otimes v \otimes T(w)v_0).
\end{aligned}$$

このとき, (2.1) を用いて計算すれば, 以下が成立していることがわかる:

$$\langle v(\vec{z})A(w)\rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i(A)}{w - z_i}\langle v(\vec{z})\rangle, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
&\langle v(\vec{z})A(w_1)B(w_2)\rangle\\
&= \frac{k(A|B)\langle v(\vec{z})\rangle}{(w_1 - w_2)^2} + \frac{\langle v(\vec{z})[A,B](w_2)\rangle}{w_1 - w_2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i(A)\langle v(\vec{z})B(w_2)\rangle}{w_1 - z_i}\\
&= \left[\frac{k(A|B)}{(w_1 - w_2)^2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i([A,B])}{(w_2 - z_i)(w_2 - w_1)} + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\rho_i(A)\rho_j(B)}{(w_1 - z_i)(w_2 - z_j)}\right]\langle v(\vec{z})\rangle.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

よって, (1.1) を用いることによって次の式を得る:

$$\begin{aligned}
\langle v(\vec{z})S(w)\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{\rho_i(J_p)\rho_j(J^p)}{(w - z_i)(w - z_2)}\langle v(\vec{z})\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\rho_i(C_\mathfrak{g})}{(w - z_i)^2} + \frac{\sum_{j(\neq i)} r_{i,j}(z_i - z_j)}{w - z_i}\right]\langle v(\vec{z})\rangle
\end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで, $r_{i,j}(z) = \sum_p \rho_i(J_p)\rho_j(J^p)/z$ と置いた. ($C_\mathfrak{g}$ は, 前に定義した通り, Casimir element $C_\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\sum_p J_p J^p$ である.)

一方, $\kappa \neq 0$ すなわち level が critical でないならば, (2.2) をから次の式が得られる:

$$\langle v(\vec{z})S(w)\rangle = \kappa\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\rho_i(C_\mathfrak{g})}{(w - z_i)^2} + \frac{1}{w - z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right]\langle v(\vec{z})\rangle. \tag{2.6}$$

得られた公式 (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) は Ward-Takahashi identities と呼ばれている.

以上によって, 菅原作用素に関する 2 つの Ward-Takahashi identities (2.5), (2.6) が得られたことになる. それらを比べることによって, $\kappa \neq 0$ ならば次が成立していることがわかる:

$$\left[\kappa\frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{j(\neq i)}\sum_{p}\frac{\rho_i(J_p)\rho_j(J^p)}{z_i - z_j}\right]\langle v(\vec{z})\rangle = 0. \tag{2.7}$$

この方程式は Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) 方程式と呼ばれている.

$\kappa = 0$ の場合は, $S(w_1)$ と $S(w_2)$ の可換性に注意して, $S(w_1)S(w_2)$ に関する Ward-Takahashi identities を 2 通りに計算することによって, 異なる w に対する次の作用素が互いに可換であることが証明される:

$$G(\vec{z};w) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}} \frac{\rho_i(J_p)\rho_j(J^p)}{(w-z_i)(w-z_2)} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\rho_i(C_{\mathfrak{g}})}{(w-z_i)^2} + \frac{\sum_{j(\neq i)} r_{i,j}(z_i-z_j)}{w-z_i}\right]. \tag{2.8}$$

これより, 次の式で定義される (rational) Gaudin Hamiltonians H_i の可換性が導かれる:

$$H_i = \sum_{j(\neq i)} r_{i,j}(z_i - z_j) = \sum_{j(\neq i)}\sum_{p} \frac{\rho_i(J_p)\rho_j(J^p)}{z_i - z_j} \qquad (i = 1,\dots,N). \tag{2.9}$$

上の $G(\vec{z};w)$ は Gaudin Hamiltonians の母函数である.

3 Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard 方程式

この節では Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard (KZB) 方程式の導出を行なう.

3.1 相関函数の定義

$\kappa \neq 0$ とし, 前節の (2.1), (2.2) までを仮定する. $\hat{\mathfrak{g}}$ の level k の表現 M_0 は以下の条件を満たしていると仮定する:

- M_0 は weight subspace の直和に分解する. すなわち, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathfrak{h}^*$ に対して,
$$M_0(\varepsilon,\nu) = \{\, v \in M_0 \mid T[0]v = \varepsilon v,\ Hv = \nu(H)v\ (H \in \mathfrak{h})\,\}$$
と置くと, $M_0 = \bigoplus_{\varepsilon,\nu} M_0(\varepsilon,\nu)$.
- $\hat{\mathfrak{g}}$ のある Verma module $M_{k,\lambda}$ が存在して, 任意の$\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $\dim M_0(\varepsilon,\nu) < \dim M_{k,\lambda}(\varepsilon,\nu)$. 特に, 全ての $M_0(\varepsilon,\nu)$ は有限次元である.

$M_0^\dagger(\varepsilon,\nu) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_0(\varepsilon,\nu),\mathbb{C})$, $M_0^\dagger = \oplus_{\varepsilon,\nu} M_0^\dagger(\varepsilon,\nu)$ と置くと, $M_0^\dagger$ は自然に $\hat{\mathfrak{g}}$ の右表現とみなせる. 右表現として $M_\infty = M_0^\dagger$ であると仮定する. このとき, $M_\infty \otimes M_0 = M_0^\dagger \otimes M_0$ 上の線形汎函数 f の trace が次のように定義される:

$$\mathrm{tr}_{M_0} f = \sum_{\varepsilon,\nu} f(C_{\varepsilon,\nu}).$$

ここで, $C_{\varepsilon,\nu}$ は $M_0^\dagger(\varepsilon,\nu) \otimes M_0(\varepsilon,\nu)$ の canonical element である.

$c = c_k = k\dim\mathfrak{g}/\kappa$ と置き, $q = e^{2\pi i\tau}$, $|q| < 1$, $h \in \mathfrak{h}$ であると仮定する.

$|w| > |z_i| > |qw|$, $|w_1| > |w_2| > |z_i| > |qw_1|$, $A, B \in \mathfrak{g}$ であるとし, 次のように置く:

$$\begin{aligned}
&\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \langle v_1(z_1)\cdots v_N(z_N)\rangle = \mathrm{tr}_{M_0}\,\Phi(\bullet\, q^{T[0]-c/24}e^h \otimes v \otimes \bullet), \\
&\langle A(w)v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \mathrm{tr}_{M_0}\,\Phi(\bullet\, q^{T[0]-c/24}e^h A(w) \otimes v \otimes \bullet), \\
&\langle A(w_1)B(w_2)v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \mathrm{tr}_{M_0}\,\Phi(\bullet\, q^{T[0]-c/24}e^h A(w_1)B(w_2) \otimes v \otimes \bullet), \\
&\langle T(w)v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \mathrm{tr}_{M_0}\,\Phi(\bullet\, q^{T[0]-c/24}e^h T(w) \otimes v \otimes \bullet).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

より一般に, M_0 上の作用素 a に対して, 次のように置く:

$$\langle av(\vec{z})\rangle_{q,h} = \mathrm{tr}_{M_0}\,\Phi(\bullet\, q^{T[0]-c/24}e^h a\otimes v\otimes \bullet),$$
$$\langle v(\vec{z})a\rangle_{q,h} = \mathrm{tr}_{M_0}\,\Phi(\bullet\, q^{T[0]-c/24}e^h \otimes v\otimes a\bullet).$$

3.2 $H(w)$ に関する Ward-Takahashi identities

H_a $(a=1,\dots,\dim\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ の orthonomal basis であるとする. $\mathfrak{g}$ の roots 全体の集合, positive roots 全体の集合をそれぞれ Δ, Δ_+ と書くことにする. $\alpha\in\Delta$ に対する root vector E_α を取り, $(E_\alpha|E_{-\alpha})=1$ が成立するように normalize しておく. $H_\alpha=[E_\alpha,E_{-\alpha}]$ と置くと, $H_\alpha\in\mathfrak{h}$ であり, $(\ |\ )$ による同一視 $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}$ によって, $H_\alpha=\alpha$ が成立している: $(H_\alpha|H_\beta)=\alpha(H_\beta)$. このとき, H_a, E_α と $H_a, E_{-\alpha}$ は $\mathfrak{g}$ の双対基底である.

(2.1) より, $H\in\mathfrak{h}$ に対して以下が成立していることがわかる:

$$\langle H[m]v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \sum_{i=1}^N z_i^m\rho_i(H)\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}, + q^m\langle H[m]v(\vec{z})\rangle_{q,h}$$
$$\langle H[0]v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \langle Hv(\vec{z})\rangle_{q,h} = \partial_H\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}.$$

ここで, $h\in\mathfrak{h}$ の函数に作用する ∂_H は $\partial_H f(h) = \left[\frac{\partial}{\partial s}f(h+sH)\right]_{s=0}$ と定義されている. 前者の式の $m=0$ の場合より, 次の $\mathfrak{h}$-invariance が成立していることがわかる:

$$\sum_{i=1}^N \rho_i(H)\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} = 0. \tag{3.2}$$

また, 上の式を足し上げることによって, 次の Ward-Takahashi identity を得る:

$$w\langle H(w)v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \left[\partial_H + \sum_{i=1}^N Z(z_i/w)\rho_i(H)\right]\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}. \tag{3.3}$$

ここで, $Z(z)$ は $1>|z|>|q|$ において次のように定義された函数である:

$$Z(z) = \sum_{m\neq 0}\frac{z^m}{1-q^m} + \frac{1}{2}.$$

$\frac{1}{1-z} = \sum_{m\geqq 0} z^m$, $\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z}$ を用いて, この定義式の右辺を

$$Z(z) = \frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z} + \sum_{m>0}\frac{z^m q^m}{1-q^m} + \sum_{m<0}\frac{z^m}{1-q^m} = \frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z} + \sum_{m>0}\frac{q^m}{1-q^m}(z^m - z^{-m}) \tag{3.4}$$

と変形することによって, $|q^{-1}|>|z|>|q|$ に収束域を延長し, $z\to 1$ で $Z(z)-\frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z}\to 0$ が成立することや, $|q^{-1}|>|z|>1$ において $Z(qz)=Z(z)+1$ が成立することが確かめられる. したがって, $Z(z)$ は $\mathbb{C}^*$ 上の有理型函数に一意に延長される. $Z(z)$ は以下の性質によって一意に特徴付けられる:

- $Z(z)$ は $\mathbb{C}^*$ 上の有理型函数で極は $\{q^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ に限られる.
- $Z(qz) = Z(z) + 1$.
- $Z(z) - \frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z} \to 0$ (as $z \to 1$).

(注: $z = e^u$ と置くと, $\frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z} = -u^{-1} + O(u)$.) この特徴付けによって, $Z(z)$ は次の表示を持つことも確かめられる:

$$Z(z) = \sum_{m>0}\left(\frac{1}{1-zq^m} - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z} + \sum_{m<0}\frac{1}{1-zq^m}.$$

上と同様にして, $H \in \mathfrak{h}$ に対して以下が成立することがわかる:

$$\begin{aligned}
&(1-q^m)w_2\langle H[m]H(w_2)v(\vec{z})\rangle_{q,h} \\
&\quad = k(H|H)mw_2^m\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} + \sum_{i=1}^N z_i^m\rho_i(H)\langle v(\vec{z})H(w_2)\rangle_{q,h}, \\
&\langle H[0]H(w_2)v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \partial_H\langle H(w_2)v(\vec{z})\rangle_{q,h}.
\end{aligned}$$

これらを足し上げて, 次の Ward-Takahashi identity を得る:

$$\begin{aligned}
&w_1w_2\langle H(w_1)H(w_2)v(\vec{z})\rangle_{q,h} \\
&= \Bigg[k(H|H)Z'(w_2/w_1) \\
&\qquad + \left(\partial_H + \sum_{i=1}^N Z(z_i/w_1)\rho_i(H)\right)\left(\partial_H + \sum_{i=j}^N Z(z_j/w_2)\rho_j(H)\right)\Bigg]\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

ここで, $Z'(z) = z\frac{\partial}{\partial z}Z(z)$ と置いた. $Z'(z)$ は $Z'(qz) = Z'(z)$ を満たしている. また, (3.4) より, $|q^{-1}| > |z| > |q|$ において, $Z'(z)$ は次の表示を持つ:

$$Z'(z) = \frac{z}{(1-z)^2} + \sum_{m>0}\frac{mq^m}{1-q^m}(z^m + z^{-m}). \qquad (3.6)$$

(注: $z = e^u$ と置くと, $\frac{z}{(1-z)^2} = u^{-2} + O(1)$.)

3.3 $E_\alpha(w)$ に関する Ward-Takahashi identities

$\alpha \in \Delta$ に対して以下が成立する:

$$(1-q^me^{-\alpha(h)})\langle E_\alpha[m]v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \sum_{i=1}^N z_i^m\rho_i(E_\alpha)\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}.$$

これを足し上げることによって, 次の式を得る:

$$w\langle E_\alpha(w)v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \sum_{i=1}^N \sigma(e^{-\alpha(h)}; z_i/w)\rho_i(E_\alpha)\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}.$$

ここで, $\sigma(x;z)$ は $1>|z|>|q|$ において次のように定義された函数である:

$$\sigma(x;z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{z^m}{1-q^mx}.$$

この式の右辺を $1/(1-z)=\sum_{m\geqq 0}z^m$ を用いて

$$\begin{aligned}\sigma(x;z)&=\sum_{m>0}\frac{z^mq^mx}{1-q^mx}+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-x}-1+\sum_{m<0}\frac{z^m}{1-q^mx}\\&=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-x}-1+\sum_{m>0}\left(\frac{z^mq^mx}{1-q^mx}-\frac{z^{-m}q^mx^{-1}}{1-q^mx^{-1}}\right)\end{aligned}\tag{3.7}$$

と変形することによって, $|q^{-1}|>|z|>|q|$ に収束域を延長し, $|q^{-1}|>|z|>1$ において $\sigma(x;qz)=x^{-1}\sigma(x;z)$ が成立していることを確かめられる. したがって, $\sigma(x;z)$ は z の函数として $\mathbb{C}^*$ 上の有理型函数に一意に延長される. $0\neq x\neq q^m$ $(m\in\mathbb{Z})$ のとき, $\sigma(x;z)$ は z の函数として以下の性質によって一意に特徴付けられる:

- $\sigma(x;z)$ は $\mathbb{C}^*$ 上の有理型函数で極は $\{q^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ に限られる.
- $\sigma(x;qz)=x^{-1}\sigma(x;z)$.
- $\sigma(x;z)=1/(1-z)+(\text{regular at } z=1)$.

この特徴付けによって, $\sigma(x;z^{-1})=-\sigma(x^{-1};z)$ が成立することや, $\sigma(x;z)$ は $1>|x|>|q|$ のとき次の表示を持つことも確かめられる:

$$\sigma(x;z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{x^m}{1-q^mz}.$$

この表示より, $\sigma(x;z)=\sigma(z;x)$ が成立することもわかる.

上と同様にして, $\alpha\in\Delta$ に対して以下が成立する:

$$\begin{aligned}&(1-q^me^{-\alpha(h)})w_2\langle E_\alpha[m]E_{-\alpha}(w_2)v(\vec{z})\rangle_{q,h}\\&=kmw_2^m\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}+w_2^mw_2\langle H_\alpha(w_2)v(\vec{z})\rangle_{q,h}+\sum_{i=1}^N z_i^m\rho_i(E_\alpha)\langle E_{-\alpha}(w_2)v(\vec{z})\rangle_{q,h}.\end{aligned}$$

これを足し上げることによって, 次の式を得る:

$$\begin{aligned}&w_1w_2\langle E_\alpha(w_1)E_{-\alpha}(w_2)v(\vec{z})\rangle_{q,h}\\&=\left[k\sigma'(e^{-\alpha(h)};w_2/w_1)+\sigma(e^{-\alpha(h)};w_2/w_1)\left(\partial_{H_\alpha}+\sum_{i=1}^N Z(z_i/w_2)\rho_i(H_\alpha)\right)\right.\\&\qquad\left.+\sum_{i=1}^N\sigma(e^{\alpha(h)};z_i/w_1)\rho_i(E_\alpha)\sum_{j=1}^N\sigma(e^{-\alpha(h)};z_j/w_2)\rho_j(E_{-\alpha})\right]\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}\end{aligned}\tag{3.8}$$

ここで, $\sigma'(x;z):=z\frac{\partial}{\partial z}\sigma(x;z)$ と置いた. 式 (3.7) より, $|q^{-1}|>|z|>|q|$ において, $\sigma'(x;z)$ は次の表示を持つ:

$$\sigma'(x,z)=\frac{z}{(1-z)^2}+\sum_{m>0}\left(\frac{mz^mq^mx}{1-q^mx}+\frac{mz^{-m}q^mx^{-1}}{1-q^mx^{-1}}\right).\tag{3.9}$$

3.4 Weyl-Kac denominator $\Pi = \Pi(q,h)$

$\hat{\mathfrak{g}}$ の Weyl-Kac denominator $\Pi = \Pi(q,h)$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\Pi = \Pi(q,h) =& q^{(\rho|\rho)/(2h^\vee)} \prod_{m>0}(1-q^m)^{\dim \mathfrak{h}} \\ & \times e^{\rho(h)} \prod_{\alpha\in\Delta_+}\left[(1-e^{-\alpha(h)})\prod_{m>0}(1-q^m e^{-\alpha(h)})(1-q^m e^{\alpha(h)})\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Strange formula より $(\rho|\rho)/(2h^\vee) = \dim \mathfrak{g}/24$ であることにも注意せよ. $\Pi = \Pi(q,h)$ の対数微分は次のようになる: $H \in \mathfrak{h}$ に対して,

$$\frac{\partial_H \Pi}{\Pi} = \rho(H) + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha(H)\left[\frac{e^{-\alpha(h)}}{1-e^{-\alpha(h)}} + \sum_{m>0}\left(\frac{q^m e^{-\alpha(h)}}{1-q^m e^{-\alpha(h)}} - \frac{q^m e^{\alpha(h)}}{1-q^m e^{\alpha(h)}}\right)\right], \tag{3.11}$$

$$\frac{\left[q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{(\rho|\rho)}{2h^\vee}\right]\Pi}{\Pi} = -\sum_{m>0}\left[\frac{mq^m \dim \mathfrak{h}}{1-q^m} + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\left(\frac{q^m e^{-\alpha(h)}}{1-q^m e^{-\alpha(h)}} + \frac{q^m e^{\alpha(h)}}{1-q^m e^{\alpha(h)}}\right)\right]. \tag{3.12}$$

3.5 $T(w)$ に関する Ward-Takahashi identity (1)

菅原作用素の Ward-Takahashi identity を得るためには, $H = H_a$ $(a = 1, \dots, \dim \mathfrak{h})$ に対する等式 (3.5) と $\alpha \in \Delta$ に対する等式 (3.8) を全て足し合わせ, 両辺から $\frac{w1w2}{(w_1-w_2)^2} = \frac{w2/w1}{(1-w2/w1)^2}$ の $k \dim \mathfrak{g}$ 倍を引き去り, $w_1, w_2 \to w$ とすれば良い. そのとき, (3.6), (3.9), (3.12) より,

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[\dim \mathfrak{h}\, Z'(z) + \sum_{\alpha\in\Delta}\sigma'(e^{-\alpha(h)};z) - \frac{z\ \dim \mathfrak{g}}{(1-z)^2}\right] = -\frac{\left[q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{(\rho|\rho)}{2h^\vee}\right]\Pi}{\Pi} \tag{3.13}$$

が成立し, (3.7), (3.11) より,

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\sum_{\alpha\in\Delta}\alpha(H)\left(\sigma(e^{-\alpha(h)};z) - \sigma(e^{\alpha(h)};z)\right) = \frac{\partial_H \Pi}{\Pi} \tag{3.14}$$

が成立し, $H_\alpha = \sum_a \alpha(H_a)H_a$ であることに注意せよ. 結果的に次の公式が得られる:

$$\begin{aligned}&\kappa w^2 \langle T(w)v(\vec{z})\rangle_{q,h} \\ &= \left[-k\frac{\left[q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{(\rho|\rho)}{2h^\vee}\right]\Pi}{\Pi} + \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{h}}\frac{\partial_{H_a}\Pi}{\Pi}H_a(\vec{z};w)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{h}} H_a(\vec{z};w)H_a(\vec{z};w) + \sum_{\alpha\in\Delta}E_\alpha(\vec{z};w)E_{-\alpha}(\vec{z};w)\right)\right]\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

ここで,

$$H_a(\vec{z};w) = \partial_{H_a} + \sum_{i=1}^{N} Z(z_i/w)\rho_i(H_a), \tag{3.16}$$

$$E_\alpha(\vec{z};w) = \sum_{i=1}^{N} \sigma(e^{-\alpha(h)};z_i/w)\rho_i(E_\alpha). \tag{3.17}$$

さらに, $[H_a(\vec{z};w),\Pi] = \partial_{H_a}\Pi$ などに注意すると,

$$\begin{aligned}
&\kappa\,\Pi\, w^2\langle T(w)v(\vec{z})\rangle_{q,h} \\
&= -\left(\left[kq\frac{\partial}{\partial q} - \frac{k(\rho|\rho)}{2h^\vee} + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}} \partial_{H_a}\partial_{H_a}\right]\Pi\right)\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}} H_a(\vec{z};w)H_a(\vec{z};w) + \sum_{\alpha\in\Delta} E_\alpha(\vec{z};w)E_{-\alpha}(\vec{z};w)\right)(\Pi\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.6 $T(w)$ に関する Ward-Takahashi identity (2)

別のやり方で $T(w)$ の Ward-Takahashi identity を計算する. (2.2) より,

$$\begin{aligned}
(1-q^m)\langle T[m]v(\vec{z})\rangle_{q,h} &= \sum_{i=1}^{N}\left[z_i^{m+1}\frac{\partial}{\partial z_i} + (m+1)z_i^m\rho_i(\kappa^{-1}C_{\mathfrak{g}})\right]\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}, \\
\langle T[0]v(\vec{z})\rangle_{q,h} &= \left[q\frac{\partial}{\partial q} + \frac{c}{24}\right]\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

前者の式の $m=0$ の場合から, 次の translation invariance が成立していることがわかる:

$$\sum_{i=1}^{N}\left[z_i\frac{\partial}{\partial z_i} + \Delta_i\right]\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} = 0. \tag{3.20}$$

ここで, $\Delta_i = \rho_i(\kappa^{-1}C_{\mathfrak{g}})$ と置いた. この条件は $\langle v_1(z_1)\cdots v_N(z_N)\rangle_{q,h}\, dz_1^{\Delta_1}\cdots dz_N^{\Delta_N}$ が, 任意の $a\in\mathbb{C}^*$ に対する変換 $(z_1,\ldots,z_N)\mapsto(az_1,\ldots,az_N)$ で不変であることを意味している. また, 上の式を足し上げることによって, 次が成立していることがわかる:

$$w^2\langle T(w)v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \left[T(\vec{z};w) + \frac{c}{24}\right]\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}. \tag{3.21}$$

ここで,

$$T(\vec{z};w) = \sum_{i=1}^{N} Z'(z_i/w)\Delta_i + \sum_{i=1}^{N} Z(z_i/w)\left(z_i\frac{\partial}{\partial z_i} + \Delta_i\right) + q\frac{\partial}{\partial q}. \tag{3.22}$$

さらに, 両辺に Π を乗じることによって,

$$\Pi\, w^2\langle T(w)v(\vec{z})\rangle_{q,h} = -\left(\left[q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{c}{24}\right]\Pi\right)\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} + T(\vec{z};w)(\Pi\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}). \tag{3.23}$$

3.7 KZB 方程式の母函数表示

Strange formula と $c = k\dim\mathfrak{g}/\kappa$ より, $\frac{c}{24} = \frac{k(\rho|\rho)}{2\kappa h^\vee}$ となることに注意して, $T(w)$ に関する 2 つの Ward-Takahashi identities (3.18), (3.23) を比べてみることによって, 次の等式が得られる:

$$\left[T(\vec{z};w) - \frac{1}{2\kappa}\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}} H_a(\vec{z};w)H_a(\vec{z};w) + \sum_{\alpha\in\Delta} E_\alpha(\vec{z};w)E_{-\alpha}(\vec{z};w)\right)\right](\Pi\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h})$$
$$= \frac{h^\vee}{\kappa}\left(\left[q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{2h^\vee}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}}\partial_{H_a}\partial_{H_a}\right]\Pi\right)\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} \tag{3.24}$$

$N = 0$ のとき, $\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \langle\mathbf{1}\rangle_{q,h}$ は M_0 の character に等しい. よって, M_0 が $\mathfrak{g}$ の highest weight $-\rho$ を持つ Verma module から誘導された level $k = 0$ の Weyl module (すなわち $\hat{\mathfrak{g}}$ の highest weight $(0,-\rho)$ の Verma module) であるとき, $\langle\mathbf{1}\rangle_{q,h} = \Pi^{-1}$ が成立している. このとき, 上の等式 (3.24) の左辺は消える. よって, Π は次の熱方程式を満たしていることがわかる:

$$\left[q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{2h^\vee}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}}\partial_{H_a}\partial_{H_a}\right]\Pi = 0. \tag{3.25}$$

したがって, (3.24) の右辺は常に消える. (注: この計算方法は [B] に書いてある.) 以上によって, 次の定理が得られる.

Theorem 3.1 (KZB 方程式の母函数表示) $\langle v(\vec{v})\rangle_{q,h}$ を (3.1) で定義し, $\Pi = \Pi(q,h)$ を (3.10) で定義するとき, $F = \Pi\langle v(\vec{v})\rangle_{q,h}$ は以下の方程式を満たしている:

$$\sum_{i=1}^N \rho_i(H)F = 0 \quad \text{for } H\in\mathfrak{h} \qquad (\mathfrak{h}\text{-invariance}), \tag{3.26}$$

$$\sum_{i=1}^N \left(z_i\frac{\partial}{\partial z_i} + \Delta_i\right)F = 0 \qquad (\text{translation invariance}), \tag{3.27}$$

および

$$\kappa T(\vec{z};w)F = G(\vec{z};w)F \qquad (\text{ある微分方程式系の母函数表示}). \tag{3.28}$$

ここで, $\Delta_i = \rho_i(\kappa^{-1}C_\mathfrak{g})$ であり,

$$G(\vec{z};w) = \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}} H_a(\vec{z};w)H_a(\vec{z};w) + \sum_{\alpha\in\Delta} E_\alpha(\vec{z};w)E_{-\alpha}(\vec{z};w)\right) \tag{3.29}$$

である. $T(\vec{z};w)$, $H_a(\vec{z};w)$, $E_\alpha(\vec{z};w)$ はそれぞれ (3.22), (3.16), (3.17) によって定義された. 上の方程式を KZB 方程式の w をパラメーターとする母函数表示と呼ぶことにする.

3.8 KZB 方程式

方程式 (3.28) の左辺は w に関して $\mathbb{C}^*$ 上の有理型函数であり, $w \mapsto qw$ で不変であり, 高々 2 位の極を $q^m z_i$ $(i = 1, \dots, N,\ m \in \mathbb{Z})$ のみに持つ. したがって, 次の形で一意的に表示される:

$$\sum_{i=1}^{N} Z'(z_i/w)P_i + \sum_{i=1}^{N} Z(z_i/w)Q_i + R.$$

ここで, P_i, Q_i, R は w によらない函数であり, $w \mapsto qw$ に関する不変性より, $\sum_{i=1}^{N} Q_i = 0$ でなければいけない. このとき, 方程式 (3.28) は $P_i = 0$, $Q_i = 0$, $R = 0$ と同値である.

P_i, Q_i は z_i の近傍における (3.28) の左辺の Laurent 展開を調べれば比較的容易に計算でき, R は $\min\{|q^{-1}z_i|\} > |w| > \max\{|z_i|\}$ なる領域における w に関する Laurent 展開の定数項を求めることによって計算される.

$Z(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} + O(1-z)$ を用いると, $Z(z)^2 = Z'(z) + (\text{regular at } z = 1)$ であることがすぐにわかる. $\sigma(x^{-1}; z)\sigma(x; z)$ は $z \mapsto qz$ で不変で極が $\{q^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ にしかないので, $z = 1$ における Laurent 展開は $z/(1-z)^2 + (\text{regular at } z = 1)$ の形になる. よって, $\sigma(x^{-1}; z)\sigma(x; z) = Z'(z) + \text{const.}$ である. これらの結果を用いると, $i = 1, \dots, N$ に対して,

$$\begin{aligned}
G(\vec{z}; w) = &\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{h}} \left(Z(z_i/w) \left(\rho_i(H_a)\partial_{H_a} + \sum_{j(\neq i)} Z(z_j/z_i)\rho_i(H_a)\rho_j(H_a) \right) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2} Z'(z_i/w)\rho_i(H_a)\rho_i(H_a) \right) \\
&+ \sum_{\alpha\in\Delta} \left(Z(z_i/w) \sum_{j(\neq i)} \sigma(e^{\alpha(h)}; z_j/z_i)\rho_i(E_\alpha)\rho_j(E_{-\alpha}) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2} Z'(z_i/w)\rho_i(E_\alpha)\rho_i(E_{-\alpha}) \right) \\
&+ (\text{regular at } w = z_i) \\
&= Z'(z_i/w)\rho_i(C_{\mathfrak{g}}) \\
&+ Z(z_i/w) \left(\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{h}} \rho_i(H_a)\partial_{H_a} + \sum_{j(\neq i)} (\rho_i \otimes \rho_j)(r(z_j/z_i)) \right) \\
&+ (\text{regular at } w = z_i).
\end{aligned}$$

ここで,

$$r(z) = Z(z) \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{h}} H_a \otimes H_a + \sum_{\alpha\in\Delta} \sigma(e^{\alpha(h)}; z) E_\alpha \otimes E_{-\alpha}. \tag{3.30}$$

この式と (3.22) を比べてみることによって, $P_i = 0$ でかつ

$$\kappa Q_i = \left[\kappa \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \Delta_i \right) - \left(\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{h}} \rho_i(H_a)\partial_{H_a} + \sum_{j(\neq i)} (\rho_i \otimes \rho_j)(r(z_j/z_i)) \right) \right] F \tag{3.31}$$

となることがわかる. ここで, $\Delta_i = \rho_i(\kappa^{-1}C_{\mathfrak{g}})$ である.

次に R を計算しよう. $\dot{\sigma}(x,z) = x\frac{\partial}{\partial x}\sigma(x,z)$ と置く. (3.4), (3.6), (3.7) より, $1 > |z| > |q|$ において以下が成立することが確かめられる:

$$Z(z)^2 - Z'(z) = 2\sum_{m\neq 0}\frac{z^m}{(1-q^m)(1-q^{-m})} + \sum_{m\neq 0}\frac{1}{(1-q^m)(1-q^{-m})} + \frac{1}{4}, \tag{3.32}$$

$$\dot{\sigma}(x,z) = -\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{z^m}{(1-q^m x)(1-q^{-m}x^{-1})}. \tag{3.33}$$

この両式の右辺は, $|q^{-1}| > |z| > |q|$ で収束するので, 特に $z = 1$ で正則である. これらの公式と $\mathfrak{h}$-invariance (3.2) を用いると, (3.15) と同様のやり方で (もしくは (3.15) を用いて), 次を示せる:

$$\begin{aligned}\kappa\langle T[0]v(\vec{z})\rangle_{q,h} = \Bigg[&- k\frac{\left[q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{(\rho|\rho)}{2h^\vee}\right]\Pi}{\Pi} + \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}}\frac{\partial_{H_a}\Pi}{\Pi}\partial_{H_a} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}}\partial_{H_a}\partial_{H_a} + \sum_{i,j=1}^{N}(\rho_i\otimes\rho_j)(s(z_j/z_i))\right)\Bigg]\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

ここで,

$$s(z) = (Z(z)^2 - Z'(z))\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}} H_a\otimes H_a - \sum_{\alpha\in\Delta}\dot{\sigma}(e^{\alpha(h)}, z)E_\alpha\otimes E_{-\alpha}, \tag{3.35}$$

$$(\rho_i\otimes\rho_j)(A\otimes B) = \rho_i(A)\rho_j(B).$$

($i = j$ の場合も $(\rho_i\otimes\rho_j)(A\otimes B)$ が定義されていることに注意せよ.) したがって, (3.18) と同様にして, 以下の式が得られる:

$$\begin{aligned}&\kappa\,\Pi\,\langle T[0]v(\vec{z})\rangle_{q,h} \\ &= -\left(\left[kq\frac{\partial}{\partial q} - \frac{k(\rho|\rho)}{2h^\vee} + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}}\partial_{H_a}\partial_{H_a}\right]\Pi\right)\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}}\partial_{H_a}\partial_{H_a} + \sum_{i,j=1}^{N}(\rho_i\otimes\rho_j)(s(z_j/z_i))\right)(\Pi\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}).\end{aligned} \tag{3.36}$$

一方, (3.19) より,

$$\Pi\,\langle T[0]v(\vec{z})\rangle_{q,h} = -\left(\left[q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{c}{24}\right]\Pi\right)\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h} + q\frac{\partial}{\partial q}(\Pi\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}). \tag{3.37}$$

(3.36), (3.37) より, 次が成立することがわかる:

$$\kappa R = \left[\kappa q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}}\partial_{H_a}\partial_{H_a} + \sum_{i,j=1}^{N}(\rho_i\otimes\rho_j)(s(z_j/z_i))\right)\right]F. \tag{3.38}$$

以上の計算によって, $\sum_{i=1}^N \rho(H_i)$ の作用で消える函数空間上の作用素として, (3.29) で定義された $G(\vec{z};w)$ に関して, 次の等式が成立していることもわかる:

$$\begin{aligned} G(\vec{z};w) &= \sum_{i=1}^N Z'(z_i/w)\rho_i(C_{\mathfrak{g}}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N Z(z_i/w)\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}} \rho_i(H_a)\partial_{H_a} + \sum_{j(\neq i)} (\rho_i\otimes\rho_j)(r(z_j/z_i))\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}} \partial_{H_a}\partial_{H_a} + \sum_{i,j=1}^N (\rho_i\otimes\rho_j)(s(z_j/z_i))\right). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Theorem 3.2 (KZB 方程式) $\langle v(\vec{v})\rangle_{q,h}$ を (3.1) で定義し, $\Pi = \Pi(q,h)$ を (3.10) で定義するとき, $F = \Pi\langle v(\vec{v})\rangle_{q,h}$ は $\mathfrak{h}$-invariance (3.26), translation invariance (3.27) および以下の方程式を満たしている:

$$\kappa\left(z_i\frac{\partial}{\partial z_i} + \Delta_i\right)F = H_iF, \tag{3.40}$$

$$\kappa q\frac{\partial}{\partial q}F = H_0F. \tag{3.41}$$

ただし, $\Delta_i = \rho_i(\kappa^{-1}C_{\mathfrak{g}})$ であり,

$$H_i = \sum_{a=1}^N \rho_i(H_a)\partial_{H_a} + \sum_{j(\neq i)} (\rho_i\otimes\rho_j)(r(z_j/z_i)) \qquad (i=1,\dots,N), \tag{3.42}$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}} \partial_{H_a}\partial_{H_a} + \sum_{i,j=1}^N (\rho_i\otimes\rho_j)(s(z_j/z_i))\right). \tag{3.43}$$

$r(z)$, $s(z)$ はそれぞれ (3.30), (3.35) で定義された. これを KZB 方程式と呼ぶ. ($\sum_{i=1}^N Q_i = 0$ でなければいけないので, $\sum_{i=1}^N H_i = 0$ である.)

この方程式は [FV] に書いてあるものと一致している.

4 楕円 Calogero-Gaudin 模型

4.1 2 階の Hamiltonians

前節の (3.42), (3.43) で定義した H_i $(i=0,\dots,N)$ を (2 階の) 楕円 Calogero-Gaudin Hamiltonians と呼ぶことにする. それらは, 射影直線上の場合と同様に互いに可換であることが示される. しかし, critical level においては, $\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}$ の trace を用いた定義に必要な $T[0]$ を定義できない, したがって, $\langle v(\vec{z})\rangle_{q,h}$ の満たすべき条件を直接楕円曲線の言葉で与えなければいけない. ここでは説明を省略するがそのような定式化は [KT2] に書いてある. さらに, twisted の

場合と一般のコンパクト・リーマン面の場合の定式化が [KT1] で説明されている. そこに書いてある方法を用いると, 射影直線の場合と同様に (2 階の) 楕円 Calogero-Gaudin Hamiltonians の可換性を証明できる.

特別に $N = 1$ の場合を考える. このとき, $\mathfrak{g}$ の表現 V_1 の weight zero subspace $V_1(0)$ の dual space に値を持つ $\mathfrak{h}$ 上の函数の空間に Hamiltonians は作用しており, 非自明なのは次の H_0 だけである:

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{h}} \partial_{H_a}\partial_{H_a} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta} p(e^{\alpha(h)})E_\alpha E_{-\alpha}. \tag{4.1}$$

ここで, $p(x) = -\dot{\sigma}(x, 1)$ と置いた.

$p(qx) = p(x)$ でかつ $p(x)$ の極は $\{q^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ のみであり, $p(x) = -\frac{x}{(1-x)^2} + (\text{regulat at } x = 1)$ が成立している. よって, $x = e^{2\pi i u}$ と置くと, $4\pi^2 p(x) = \wp(u) + \eta_1$ が成立していることがわかる. ここで, $\wp(u)$ は Weierstrass の $\wp$ 函数であり, η_1 は q のみの函数である. $h \in \mathfrak{h}$ を $h = 2\pi i u$ と表わし, $\mathfrak{h}$ 上の座標系 x_a を $h = 2\pi i \sum_a u_a H_a$ によって定める. このとき, $\partial_{H_a} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial u_a}$ である. よって, H_0 の $4\pi^2$ 倍から $\eta_1 C_{\mathfrak{g}}$ を引き去ることによって次の作用素が得られる:

$$H_{\mathrm{GC}} = -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{h}} \left(\frac{\partial}{\partial u_a}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta} \wp(\alpha(u))E_\alpha E_{-\alpha}. \tag{4.2}$$

さらに, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の場合を考え, その Cartan subalgebra を $\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_i x_i = 0\}$ と取り, x_i 達を $\mathfrak{h}$ 上の座標とみなしておく. $\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$ の $\mathfrak{h}$ 上への制限を $\Delta_{\mathfrak{h}}$ と書くことにする. $\mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}](t_1 \cdots t_n)^\beta$ には $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ が $E_{i,j} \mapsto t_i\frac{\partial}{\partial t_j}$ ($E_{i,j}$ は行列単位) によって自然に作用している. V_1 は $v_\beta = (t_1 \cdots t_n)^\beta$ から生成される $\mathfrak{g}$ の表現であるとする. (もしも β が正の整数ならば, V_1 は $\mathfrak{g}$ の vector representation $\mathbb{C}^n$ の対称積 $S^{\beta n}(\mathbb{C}^n)$ に同型である.) このとき, V_1 の weight zero subspace は $\mathbb{C}v_\beta$ に等しく, $i \neq j$ のとき, $E_{ij}E_{ji} = x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j} + 1\right)$ の v_β 作用は $\beta(\beta + 1)$ に等しい. よって, 次が成立している:

$$H_{\mathrm{GC}} = -\frac{1}{2}\Delta_{\mathfrak{h}} + \beta(\beta + 1)\sum_{1\leqq i<j\leqq n} \wp(x_i - x_j). \tag{4.3}$$

これは, 楕円 Calogero-Moser 模型の Hamiltonian に等しい ([OP]).

4.2 高階の Hamiltonians に関するスケッチ

高階の Hamiltonians は大体以下のように記述されるはずである.

まず, 2 階の菅原作用素 $S_2(w)$ が $U(\mathfrak{g})$ の Casimir element $C_2 = C_{\mathfrak{g}}$ の affine 化として得られたように, $U(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ の生成元 C_d (d は C_dの次数) の affine 化として, 高階の菅原作用素 $S_d(w)$ を構成する. (A_r, B_r, C_r 型の場合は [Hay] で構成されている.)

すると, $S_2(w)$ から 2 階の Hamiltonians の母函数 $G_2(w) = G(\vec{z}; w)$ が得られたように, $S_d(w)$ から d 階の Hamiltonians の母函数 $G_d(w)$ が得られる.

$G_2(w)$ は $w = z_i$ に高々 2 位の極を持ち, $(w - z_i)^{-2}$ の係数は $\rho_i(C_2)$ に等しく, $(w - z_i)^{-1}$ の係数が $N - 1$ 個の独立な Hamiltonians を与え, w に関する定数項がもう 1 つの Hamiltonian

を与え, 合計で N 個の独立な 2 階の Hamiltonians を与えた. 同様に $G_d(w)$ は $w = z_i$ に高々 d 位の極を持ち, $(w - z_i)^{-d}$ の係数は $\rho_i(C_d)$ に一致し, $N(d-1)$ 個の独立な d 階の Hamiltonians を与える.

例えば, A_{n-1} 型の場合 (すなわち $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$) ならば d は $2, 3, 4, \ldots, n$ を動く. 他の任意の型においても, $d-1$ 達の和は $\mathfrak{g}$ の maximal nilpotent subalgebra の次元 $\dim \mathfrak{n}$ に等しくなる. よって, 合計で $N \dim \mathfrak{n}$ 個の独立な Hamiltonians が得られることになる.

各点 z_i ごとに flag variety を考え $\mathfrak{g}$ の元をその上の微分作用素だとみなすと, Hamiltonians は N 個の flag varieties と $\mathfrak{h}$ の直積の上のスカラー値函数係数の微分作用素とみなせる. その空間の次元 $N \dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{h}$ から, $\mathfrak{h}$-invariance の分の $\dim \mathfrak{h}$ を引き去ると, 得られた独立 Hamiltonians の個数 $N \dim \mathfrak{n}$ にちょうど等しくなる. これは, 楕円 Calogero-Gaudin 模型が量子可積分系であることを意味している.

ちなみに, ジーナス g が 2 以上の compact Riemann 面 X 場合は次のようになるはずである. $G_d(w)$ の極は $N(d-1)$ 個の独立な d 階の Hamiltonians を与え, $G_d(w)$ の "定数項" の部分は $\dim H^0(X, \Omega^{\otimes d}) = (g-1)(2(d-1)+1)$ 個の独立な Hamiltonians を与える. 結局合計で $N \dim \mathfrak{n} + (g-1) \dim \mathfrak{g}$ 個の独立な Hamiltonians が得られる. これは, X プラス N 点上での stable parabolic G-bundles ($\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$) の moduli space の次元に等しい. これより, 菅原作用素が与える互いに可換な Hamiltonians はその上の量子可積分系を与えていると推測される.

参考文献

[B] Bernard, D.: On the Wess-Zumino-Witten models on the torus. Nucl. Phys. **B303**, 77–93 (1988)

[FV] Felder, G., Varchenko, A.: Integral representation of solutions of the elliptic Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard equations. Internat. Math. Res. Notices **5**, 221–233 (1995)

[Hay] Hayashi, T.: Sugawara operators and Kac-Kazhdan conjecture. Invent. math. **94**, 13–52 (1988)

[KT1] Kuroki, G., Takebe, T.: Twisted Wess-Zumino-Witten models on elliptic curves. Comm. Math. Phys. **190**, 1–56 (1997)

[KT2] Kuroki, G., Takebe, T.: Bosonization and integral representation of solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard equations. preprint `math.QA/9809157` to appear in Comm. Math. Phys.

[OP] Olshanetsky, M., Perelomov, A.: Quantum integrable systems related to Lie algebras. Phys. Rep. **94**, 313–404 (1983)

[TK] Tsuchiya, A., Kanie, Y.: Vertex operators in conformal field theory on P^1 and monodromy representations of braid group. In: Conformal field theory and solvable

lattice models (Kyoto, 1986), Adv. Stud. Pure Math. **16**, 297–372 (1988); Errata. In: Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, Adv. Stud. Pure Math., **19**, 675–682 (1989)