# Quantum groups and quantum discrete dynamical systems with extended affine Weyl group symmetry of type $A^{(1)}_{m-1} \times A^{(1)}_{n-1}$ に関するメモ

Gen KUROKI

2007年2月23日の書き掛け版　(2007年2月4日作成)

## 目 次


**1 Discrete dynamical systems over a skew field** **1**

1.1 Extended affine Weyl groups $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ and $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{n-1}\bigr)$ . . . . . . . . . . . . . 1

1.2 $M^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$, $c_{ik}$, $d_{ik}$, $P_{ik}$, $Q_{ik}$, $\mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.3 $X$-operators . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.4 $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ symmetry . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.5 $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{n-1}\bigr)$ symmetry . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

1.6 $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr) \times \widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{n-1}\bigr)$ symmetry . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

**2 Quantum discrete dynamical systems** **13**


## 1 Discrete dynamical systems over a skew field

この section では非可換版の $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr) \times \widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{n-1}\bigr)$ の有理作用を構成する.

この section では $m$, $n$ は任意の 2 以上の整数であるとし, $\mathcal{K}$ は Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[r^{\pm 1}, p^{\pm}]$ を含む任意の斜体 (可換とは限らない体) であるとする.

### 1.1 Extended affine Weyl groups $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ and $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{n-1}\bigr)$

この subsection では $A$ 型の拡大アフィン Weyl 群に関するよく知られた結果をまとめておく.

生成元 $r_0, r_1, \dots, r_{m-1}$, $\omega$ と次の基本関係式によって定まる群を $A^{(1)}_{m-1}$ 型の**拡大アフィン Weyl 群**と呼び, $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ と表わす:

$$r_i r_j = r_j r_i \quad (j \not\equiv i, i \pm 1 \pmod{m}),$$

$$
\begin{aligned}
&r_i r_{i+1} r_i = r_{i+1} r_i r_{i+1},\\
&r_i^2 = 1,\\
&\omega r_i \omega^{-1} = r_{i+1}.
\end{aligned}
$$

ただし $r_i$ の添字 $i$ は $m$ 周期的に $\mathbb{Z}$ 全体に拡張しておく. $r_0, r_1, \dots, r_{m-1}$ から生成される $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ の部分群を $A^{(1)}_{m-1}$ 型の**アフィン Weyl 群**と呼び, $W\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ と表わす. $r_1, \dots, r_{m-1}$ から生成される $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ の部分群を $A_{m-1}$ 型の **Weyl 群**と呼び, $W(A_{m-1})$ と表わす. $i = 1, \dots, m-1$ に対する $r_i$ に互換 $(i, i+1)$ を対応させることによって $W(A_{m-1})$ は $m$ 次の置換群 $r_m$ と同一視される.

$\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ の元 $T_i$ を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \omega r_{m-1} \cdots r_3 r_2 r_1,\\
T_2 &= r_1 \omega r_{m-1} \cdots r_3 r_2,\\
T_3 &= r_2 r_1 \omega r_{m-1} \cdots r_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
T_m &= r_{m-1} \cdots r_3 r_2 r_1 \omega.
\end{aligned}
$$

このとき $T_i$ の添字を $m$ 周期的に $\mathbb{Z}$ 全体に拡張しておくと次が成立している:

$$
\begin{aligned}
&T_i T_j = T_j T_i, \quad \omega T_i \omega^{-1} = T_{i+1},\\
&r_i T_i r_i^{-1} = T_{i+1}, \quad r_i T_{i+1} r_i^{-1} = T_i, \quad r_i T_j r_i^{-1} = T_j \quad (j \not\equiv i, i+1 \pmod{m}).
\end{aligned}
$$

さらに $T_1, \dots, T_m$ から生成される $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ の部分群は $m$ 次元格子 $\mathbb{Z}^m$ に同型になる. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m$ に $T_1^{\lambda_1} \cdots T_m^{\lambda_m}$ を対応させることによって $T_1, \dots, T_m$ から生成される $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ の部分群と $m$ 次元格子 $\mathbb{Z}^m$ を同一視しておく. これによって拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ の全体は $S_m$ と $\mathbb{Z}^m$ の半直積と同一視される.

変数 $r$ から生成される $\mathbb{Z}$ 上の Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[r^{\pm1}]$ 上の多項式環 $\mathbb{Z}[r^{\pm1}][t_1, \dots, t_m]$ への拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr) = S_m \ltimes \mathbb{Z}^m$ の自己同型作用を次のように定めることができる:

$$
\rho(t_i) = t_{\rho(i)} \quad (\rho \in S_m), \quad T_i(t_i) = r t_i, \quad T_i(t_j) = t_j \quad (j \not\equiv i \pmod{m}).
$$

このとき $\omega$, $r_0$ は次のように作用している:

$$
\begin{aligned}
&\omega(t_m) = r t_1, \quad \omega(t_j) = t_{j+1} \quad (j = 1, \dots, m-1),\\
&r_0(t_1) = r^{-1} t_m, \quad r_0(t_m) = r t_1, \quad r_0(t_j) = t_j \quad (j = 2, \dots, m-1).
\end{aligned}
$$

この作用によって $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ は $\mathbb{Z}[r^{\pm1}][t_1, \dots, t_m]$ の自己同型群の部分群と同一視される.

拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{n-1}\bigr)$ の元 $r_k$, $T_k$, $\omega$ を $\widetilde{W}\bigl(A^{(1)}_{m-1}\bigr)$ の対応する元と区別するためにそれぞれを $s_k$, $U_k$, $\varpi$ と書くことにする. $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \varpi$ が満たすべき基本関係式は次の通り:

$$
\begin{aligned}
&s_k s_l = s_l s_k \quad (l \not\equiv k, k \pm 1 \pmod{n}),\\
&s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&s_k^2 = 1,\\
&\varpi s_k \varpi^{-1} = s_{k+1}.
\end{aligned}
$$

ここで $s_k$ の添え字は $s_{k+n} = s_k$ によって $\mathbb{Z}$ 全体に拡張されていることに注意でせよ. さらに $U_k$ の定義は次の通り:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \varpi s_{n-1} \cdots s_3 s_2 s_1,\\
U_2 &= s_1 \varpi s_{n-1} \cdots s_3 s_2,\\
U_3 &= s_2 s_1 \varpi s_{n-1} \cdots s_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
U_n &= s_{n-1} \cdots s_3 s_2 s_1 \varpi.
\end{aligned}
$$

このとき $U_k$ の添字を $n$ 周期的に $\mathbb{Z}$ 全体に拡張しておくと次が成立している:

$$
\begin{aligned}
&U_k U_l = U_l U_k, \quad \varpi U_k \varpi^{-1} = U_{k+1},\\
&s_k U_k s_k^{-1} = U_{k+1}, \quad s_k U_{k+1} s_k^{-1} = U_k, \quad s_k U_l s_k^{-1} = U_l \quad (l \not\equiv k, k+1 \pmod{n}).
\end{aligned}
$$

$\widetilde{W}\bigl(A_{n-1}^{(1)}\bigr)$ は $n$ 次の置換群 $S_n = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ と $n$ 次元格子 $\mathbb{Z}^n = \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ の半直積 $S_n \ltimes \mathbb{Z}^m$ と同一視される.

変数 $s$ から生成される $\mathbb{C}$ 上の Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[s^{\pm 1}]$ 上の多項式環 $\mathbb{Z}[s^{\pm 1}][u_1, \dots, u_n]$ への拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}\bigl(A_{n-1}^{(1)}\bigr) = S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$ の自己同型作用を次のように定めることができる:

$$
\sigma(u_k) = t_{\sigma(k)} \quad (\sigma \in S_n), \quad U_k(u_k) = s u_k, \quad U_k(u_l) = u_l \quad (l \not\equiv k \pmod{n}).
$$

このとき $\varpi$, $s_0$ は次のように作用している:

$$
\begin{aligned}
&\varpi(u_n) = s u_1, \quad \varpi(u_l) = u_{l+1} \quad (l = 1, \dots, n-1),\\
&s_0(u_1) = s^{-1} u_n, \quad s_0(u_n) = s u_1, \quad s_0(u_l) = u_l \quad (j = 2, \dots, m-1).
\end{aligned}
$$

この作用によって $\widetilde{W}\bigl(A_{n-1}^{(1)}\bigr)$ は $\mathbb{Z}[s^{\pm 1}][u_1, \dots, u_m]$ の自己同型群の部分群と同一視される.

## 1.2 $M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$, $c_{ik}$, $d_{ik}$, $P_{ik}$, $Q_{ik}$, $\mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$

Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[r^{\pm 1}, s^{\pm}]$ を含む斜体 $\mathcal{K}$ の元を成分に持つ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列全体の集合を $M_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(\mathcal{K})$ と表わす. 行列 $x = [x_{ik}] \in M_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(\mathcal{K})$ で準周期性

$$
x_{i+m,k} = r x_{ik}, \quad x_{i,k+n} = s x_{ik}.
$$

を満たすもの全体の集合を $M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ と表わすことにする. 準周期的な $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列 $x \in M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ に $m \times n$ 行列 $[x_{ik}]_{i=1,\dots,m;k=1,\dots,n} \in M_{mn}(\mathcal{K})$ を対応させせることによって, $M^{(r,s)}(\mathcal{K})$ と $M_{mn}(\mathcal{K})$ を同一視し, $M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ を単に $M_{mn}(\mathcal{K})$ と書くこともある.

$x = [x_{ik}] \in M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ とする.

$c_{ik} = c_{ik}(x)$ を次のように定める:

$$
c_{ik} = \overbrace{x_{ik} x_{i,k+1} \cdots x_{i,k+n-1}}^{n}.
$$

もしも $c_{ik}$ が $\mathcal{K}$ の中心元ならば $c_{i,k+l}$ と $c_{i+m,k}$ もそうであり, 次が成立している:

$$c_{i,k+l} = s^l c_{ik}, \quad c_{i+m,k} = r^n c_{ik}.$$

$d_{ik} = d_{ik}(x)$ を次のように定める:

$$d_{ik} = \overbrace{x_{i+m-1,k} \cdots x_{i+1,k} x_{ik}}^{m}.$$

もしも $d_{ik}$ が $\mathcal{K}$ の中心元ならば $d_{i+j,k}$ と $d_{i,k+n}$ もそうであり, 次が成立している:

$$d_{i+j,k} = r^j d_{ik}, \quad d_{i,k+n} = s^m d_{ik}.$$

$P_{ik} = P_{ik}(x) \in \mathcal{K}$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
P_{ik} &= \sum_{l=1}^{n} \overbrace{x_{ik} x_{i,k+1} \cdots x_{i,k+l-2}}^{l-1} \overbrace{x_{i+1,k+l} x_{i+1,k+l+1} \cdots x_{i+1,k+n-1}}^{n-l} \\
&= \overbrace{x_{i+1,k+1} x_{i+1,k+2} x_{i+1,k+3} \cdots x_{i+1,k+n-1}}^{n-1} \\
&+ \overbrace{x_{ik}}^{1} \overbrace{x_{i+1,k+2} x_{i+1,k+3} \cdots x_{i+1,k+n-1}}^{n-2} \\
&+ \overbrace{x_{ik} x_{i,k+1}}^{2} \overbrace{x_{i+1,k+3} \cdots x_{i+1,k+n-1}}^{n-3} \\
&+ \cdots \\
&+ \overbrace{x_{ik} \cdots x_{i,k+n-3}}^{n-3} \overbrace{x_{i+1,k+n-2} x_{i+1,k+n-1}}^{2} \\
&+ \overbrace{x_{ik} \cdots x_{i,k+n-3} x_{i,k+n-2}}^{n-2} \overbrace{x_{i+1,k+n-1}}^{1} \\
&+ \overbrace{x_{ik} \cdots x_{i,k+n-3} x_{i,k+n-2} x_{i,k+n-1}}^{n-1}
\end{aligned}$$

このとき次の準周期性が成立している:

$$P_{i,k+n} = s^{n-1} P_{ik}, \quad P_{i+m,k} = r^{n-1} P_{ik}.$$

$Q_{ik} = Q_{ik}(x) \in \mathcal{K}$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
Q_{ik} &= \sum_{j=1}^{m} \overbrace{x_{i+m-1,k+1} \cdots x_{i+j+1,k+1} x_{i+j,k+1}}^{m-j} \overbrace{x_{i+j-2,k} \cdots x_{i+1,k} x_{ik}}^{j-1} \\
&= \overbrace{x_{i+m-1,k+1} \cdots x_{i+3,k+1} x_{i+2,k+1} x_{i+1,k+1}}^{m-1} \\
&+ \overbrace{x_{i+m-1,k+1} \cdots x_{i+3,k+1} x_{i+2,k+1}}^{m-2} \overbrace{x_{ik}}^{1} \\
&+ \overbrace{x_{i+m-1,k+1} \cdots x_{i+3,k+1}}^{m-3} \overbrace{x_{i+1,k} x_{ik}}^{2} \\
&+ \cdots \\
&+ \overbrace{x_{i+m-1,k+1} x_{i+m-2,k+1}}^{2} \overbrace{x_{i+m-4,k} \cdots x_{i+1,k} x_{ik}}^{m-3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\overbrace{x_{i+m-1,k+1}}^{1}\overbrace{x_{i+m-3,k}x_{i+m-4,k}\cdots x_{i+1,k}x_{ik}}^{m-2}\\
&+\overbrace{x_{i+m-2,k}x_{i+m-3,k}x_{i+m-4,k}\cdots x_{i+1,k}x_{ik}}^{m-1}.
\end{aligned}
$$

このとき次の準周期性が成立している:

$$
Q_{i+m,k} = r^{m-1}Q_{ik}, \quad Q_{i,k+n} = s^{m-1}Q_{ik}.
$$

**Definition 1.1 ($\mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$)** 以下の条件を満たす $x = [x_{ik}] \in M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ 全体のなす $M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ の部分集合を $\mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ と書くことにする:

(1) 任意の $i,k$ に対して $c_{ik}(x)$ は $\mathcal{K}^\times$ の中心元である.

(1′) 任意の $i,k$ に対して $d_{ik}(x)$ は $\mathcal{K}^\times$ の中心元である.

(2) $i \not\equiv j \pmod m$ ならば任意の $\mu \in \mathbb{Z}$ に対して $c_{ik}(x) \neq s^\mu c_{jk}(x)$.

(2′) $k \not\equiv l \pmod n$ ならば任意の $\nu \in \mathbb{Z}$ に対して $d_{ik}(x) \neq r^\mu d_{il}(x)$.

(3) 任意の $i,k$ に対して $P_{ik}(x) \in \mathcal{K}^\times$.

(3′) 任意の $i,k$ に対して $Q_{ik}(x) \in \mathcal{K}^\times$. □

**Remark 1.2 ($m$ と $n$ の交換に関する双対性)** 全単射 $\theta : M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K}) \to M_{nm}^{(s^{-1},r^{-1})}(\mathcal{K})$ を次のように定めることができる:

$$
\theta(x) = y = [y_{ki}], \quad y_{ki} = x_{m+1-i,n+1-k} \quad (x = [x_{ik}] \in M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})).
$$

$M_{mn}(\mathcal{K}) = M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$, $M_{nm}(\mathcal{K}) = M_{nm}^{(s^{-1},r^{-1})}(\mathcal{K})$ と同一視し, $\theta$ を $M_{mn}(\mathcal{K})$ から $M_{nm}(\mathcal{K})$ への全単射とみなすとき, $m \times n$ 行列 $x \in M_{mn}(\mathcal{K})$ に対応する $n \times m$ 行列 $y = \theta(x)$ は $x$ の成分の並べ方を左右と上下双方について逆転させて転置するによって得られる.

$y = \theta(x)$ のとき以下が成立している:

$$
\begin{aligned}
&c_{ki}(y) = d_{2-i,n+1-k}(x), \quad d_{ki}(y) = c_{m+1-i,2-k}(x),\\
&P_{ki}(y) = Q_{2-i,n-k}(x), \quad\ \ Q_{ki}(y) = P_{m-i,2-k}(x).
\end{aligned}
$$

これより $\theta$ の $\mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ への制限は $\mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ から $\mathcal{X}_{nm}^{(s^{-1},r^{-1})}(\mathcal{K})$ への全単射を与えることがわかる. □

## 1.3 $X$-operators

$(i,j)$ 成分だけが 1 で他の成分が 0 であるような $m \times m$ 行列 (行列単位) を $E_{ij}$ と書き, $\Lambda(z) \in M_{mm}(\mathbb{Z}[z])$ を次のように定める:

$$
\Lambda(z) = \sum_{i=1}^{m-1} E_{i,i+1} + zE_{m1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & 0 \end{bmatrix} \quad (m \times m \text{ matrix}).
$$

$x = [x_{ik}] \in M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ に対して $M_{mm}(\mathcal{K}[z])$ に含まれる $m \times m$ 行列 $\Lambda_k = \Lambda_k(z)$, $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{ik}(x)$, $X_{ik}(z) = X_{ik}(x,z)$ を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_k = \Lambda(r^{-k}z), \\
&\mathbf{x}_{ik} = \operatorname{diag}(x_{ik}, x_{i+1,k} \ldots, x_{i+m-1,k}), \\
&X_{ik}(z) = \Lambda_k + \mathbf{x}_{ik} = \begin{bmatrix} x_{ik} & 1 & & \\ & x_{i+1,k} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ r^{-k}z & & & x_{i+m-1,k} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$X_{ik}(z)$ たちを **local $L$-operators** と呼ぶ. さらに**モノドロミー行列** $\mathbb{X}_{ik}(z) = \mathbb{X}_{ik}(x,z)$ を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{X}_{ik}(z) &= X_{ik}(z)X_{i,k+1}(z)\cdots X_{i,k+n-1}(z) \\
&= (\Lambda_k + \mathbf{x}_{ik})(\Lambda_{k+1} + \mathbf{x}_{i,k+1})\cdots(\Lambda_{k+n-1} + \mathbf{x}_{i,k+n-1}).
\end{aligned}
$$

**Remark 1.3** (**$P_{ik}$ の正体**) 準周期性 $x_{i+m,k} = rx_{ik}$ と条件

$$\Lambda_l \mathbf{x}_{ik} = \mathbf{x}_{i+1,k}\Lambda_{l+1}.$$

は同値であることに注意せよ. このことよりモノドロミー行列 $\mathbb{X}_{ik}(z)$ は次のように展開されることがわかる:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{X}_{ik}(z) &= \mathbf{x}_{ik}\mathbf{x}_{i,k+1}\cdots\mathbf{x}_{i,k+n-1} \\
&\quad + \left(\sum_{l=1}^{n} \overbrace{\mathbf{x}_{ik}\mathbf{x}_{i,k+1}\cdots\mathbf{x}_{i,k+l-2}}^{l-1}\overbrace{\mathbf{x}_{i+1,k+l}\mathbf{x}_{i+1,k+l+1}\cdots\mathbf{x}_{i+1,k+n-1}}^{n-l}\right)\Lambda_{k+n-1} + \cdots
\end{aligned}
$$

したがって以下が成立していることがわかる:

1. $\mathbb{X}_{ik}(z)$ の $(j,j)$ 成分の $z$ に関する定数項は $c_{i+j-1,k}$ に等しい.
2. $j = 1,\ldots,m-1$ に対して $\mathbb{X}_{ik}$ の $(j,j+1)$ 成分の $z$ に関する定数項は $P_{i+j-1,k}$ に等しく, $\mathbb{X}_{ik}$ の $(m,1)$ 成分の $z$ の係数は $r^{-(k+n-1)}P_{i+m-1,k}$ に等しい. □

**Lemma 1.4** $x_1,\ldots,x_m$ は斜体 $\mathcal{K}$ の元であり, $d = x_m\cdots x_2x_1$ は $\mathcal{K}$ の中心元であると仮定し, $X(z) = \Lambda(z) + \operatorname{diag}(x_1,\ldots,x_m)$ と置く. $c$ は $\mathcal{K}$ の任意の中心元であるとする. このとき $X(c)$ が可逆であるための必要十分条件は $c \neq (-1)^m d$ が成立することである. さらに $X((-1)^m d)v = 0$ を満たす縦ベクトル $v = [v_j]_{j=1}^m \in \mathcal{K}^m$ は常に次の形をしている:

$$
v = v(a) := \begin{bmatrix} a \\ -x_1 a \\ (-1)^2 x_2 x_1 a \\ \cdots \\ (-1)^{m-1} x_{m-1}\cdots x_2 x_1 a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathcal{K}.
$$

**Proof.** $d = x_m \cdots x_2 x_1$ が $\mathcal{K}$ の中心元であることより, $d = x_{i-1} \cdots x_2 x_1 x_m \ldots x_{i+1} x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ が出る. $X(c) \in M_{mm}(\mathcal{K})$ が非可逆であることと $X(c)v = 0$ を満たす $0$ でない $v \in \mathcal{K}^m$ が存在することは同値である. 条件 $X(c)v = 0$ を成分について書き直すと

$$v_2 = -x_1 v_1,\ v_3 = -x_2 v_2,\ \ldots,\ v_m = -x_{m-1} v_{m-1},\ c v_1 = -x_m v_m.$$

となる. これより次が出る:

$$c v_i = (-1)^m d v_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

よって $X(c)v = 0$ を満たす $0$ でない $v \in \mathcal{K}^m$ が存在するならば $c = (-1)^m d$ でなければいけない. 逆に $c = (-1)^m d$ ならば $v = v(1) \neq 0$ は $X(c)v = 0$ を満たしている. 以上によって $X(c)$ が可逆であるための必要十分条件は $c \neq (-1)^m d$ であることがわかる.

$X((-1)^m d)v = 0$ かつ $v_1 = a$ とすると $v_2 = -x_1 v_1 = -x_1 a$, $v_3 = -x_2 v_2 = x_2 x_1 a$, …, $v_n = (-1)^{m-1} x_{m-1} \cdots x_2 x_1 a$ であることがわかる. □

**Lemma 1.5 (key lemma)** $\mathbb{X}(z) \in M_{mm}(\mathcal{K}[z])$, $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z}$ を任意に取り, $d_1, \ldots, d_n$ は $\mathcal{K}^\times$ の中心元であるとし, $k \neq l$ ならば $r^{\mu_k} d_k \neq r^{\mu_l} d_l$ であると仮定する. このとき以下の条件を満たす $x = [x_{ik}] \in M_{mn}(\mathcal{K})$ は (存在するならば) 一意的である:

1. $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $X_k(z) = \Lambda(r^{-\mu_k} z) + \mathrm{diag}(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{mk})$ と置くと $X_1(z) X_2(z) \cdots X_n(z) = \mathbb{X}(z)$.

2. $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $x_{mk} \cdots x_{2k} x_{1k} = d_k$.

**Proof.** $n$ に関する帰納法で証明できる. $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}$ の一意性を示せば十分であることもわかる. $r^{\mu_k} d_k \neq r^{r^{\mu_n}} d_n$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ であり, $x_{mk} \cdots x_{2k} x_{1k} = d_k$ であるから, Lemma 1.4 より $X_k((-1)^m r^{\mu_n} d_n)$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ は可逆である. よって任意の $v \in \mathcal{K}^m$ に対して $\mathbb{X}((-1)^m r^{\mu_n} d_n)v = 0$ と $X_n((-1)^m r^{\mu_n} d_n)v = 0$ は同値である. さらにそのような $v$ は Lemma 1.4 より次の形をしている:

$$v = \begin{bmatrix} a \\ -x_{1n} a \\ (-1)^2 x_{2n} x_{1n} a \\ \cdots \\ (-1)^{m-1} x_{m-1,n} \cdots x_{2n} x_{1n} a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathcal{K}.$$

このような $v$ 全体の空間は $\mathbb{X}((-1)^m r^{\mu_n} d_n)v = 0$ という条件から定まり, $x_{mn} \cdots x_{2n} x_{1n} = d_n \neq 0$ である. よって $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}$ が $\mathbb{X}(z)$ と $d_n$ から一意的に決まることがわかる. □

## 1.4 $\widetilde{W}\big(A^{(1)}_{m-1}\big)$ symmetry

**Definition 1.6 ($\omega$)** 全単射 $\omega : \mathcal{X}^{(r,p)}_{mn}(\mathcal{K}) \to \mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$ を次のように定めることができる:

$$\omega(x) = [x'_{jl}] \quad (x = [x_{jl}] \in \mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})).$$

ここで

$$x'_{jl} = x_{j+1,l}. \quad \square$$

**Lemma 1.7** 任意の $x \in M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ に対して $P_{ik} = P_{ik}(x)$ は次を満たしている:

$$x_{ik}P_{i,k+1} - P_{ik}x_{i+1,k+n} = c_{ik} - c_{i+1,k+1}.$$

**Proof.** $P_{ik}x_{i+1,k+n}$ と $x_{ik}P_{i,k+1}$ を別々に計算すると

$$x_{ik}P_{i,k+1} = \sum_{l=1}^{n} \overbrace{x_{ik}x_{i,k+1}x_{i,k+2}\cdots x_{i,k+l-1}}^{l}\overbrace{x_{i+1,k+l+1}x_{i+1,k+l+2}\cdots x_{i+1,k+n}}^{n-l},$$

$$\begin{aligned} P_{ik}x_{i+1,k+n} &= \sum_{l=1}^{n} \overbrace{x_{ik}x_{i,k+1}\cdots x_{i,k+l-2}}^{l-1}\overbrace{x_{i+1,k+l}x_{i+1,k+l+1}\cdots x_{i+1,k+n-1}x_{i+1,k+n}}^{n-l+1} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \overbrace{x_{ik}x_{i,k+1}x_{i,k+2}\cdots x_{i,k+l-1}}^{l}\overbrace{x_{i+1,k+l+1}x_{i+1,k+l+2}\cdots x_{i+1,k+n}}^{n-l}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} x_{ik}P_{i,k+1} - P_{ik}x_{i+1,k+n} &= x_{ik}x_{i,k+1}x_{i,k+2}\cdots x_{i,k+n-1} - x_{i+1,k+1}x_{i+1,k+2}\cdots x_{i+1,k+n} \\ &= c_{ik} - c_{i+1,k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

$x \in \mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ に対して $\mathcal{K}$ の元 $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}(x)$, $A_{ik} = A_{ik}(x)$ を次のように定める:

$$\alpha_{ik} = c_{ik} - c_{i+1,k+1}, \quad A_{ik} = s^{-1}\frac{\alpha_{ik}}{P_{ik}}.$$

$\alpha_{i+m,k} = r^n\alpha_{ik}$, $P_{i+m,k} = r^{n-1}P_{ik}$ と $\alpha_{i,k+n} = s^n\alpha_{ik}$, $P_{i,k+n} = s^{n-1}P_{ik}$ のそれぞれより $A_{i+m,k} = rA_{ik}$ と $A_{i,k+n} = sA_{ik}$ が導かれる.

**Lemma 1.8** 任意の $x \in \mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ に対して $P_{ik} = P_{ik}(x)$ は次を満たしている:

$$A_{ik}x_{ik} - x_{i+1,k}A_{i,k+1} = A_{ik}A_{i,k+1}.$$

**Proof.** Lemma 1.7 と $x_{i+1,k+n} = sx_{i+1,k}$, $\alpha_{ik} = s^k\alpha_{i0}$ より

$$x_{ik}P_{i,k+1} - sP_{ik}x_{i+1,k} = s^k\alpha_{i0}.$$

この等式の両辺に $s^{-k}$ をかけ, $\widetilde{P}_{ik} = s^{-(k-1)}P_{ik}$ と置くと,

$$x_{ik}\widetilde{P}_{i,k+1} - \widetilde{P}_{ik}x_{i+1,k} = \alpha_{i0}.$$

この等式の両辺に左から $\widetilde{P}_{ik}^{-1}$ をかけ, 右から $\widetilde{P}_{i,k+1}^{-1}$ をかけ, さらに $\alpha_{i0}$ をかけると

$$\frac{\alpha_{i0}}{\widetilde{P}_{i,k+1}}x_{ik} - x_{i+1,k}\frac{\alpha_{i0}}{\widetilde{P}_{i,k+1}} = \frac{\alpha_{i0}}{\widetilde{P}_{i,k+1}}\frac{\alpha_{i0}}{\widetilde{P}_{i,k+1}}.$$

よって次が成立することに注意すれば補題の主張が証明される:

$$\frac{\alpha_{i0}}{\widetilde{P}_{ik}} = \frac{s^{-k}\alpha_{ik}}{s^{-(k-1)}P_{ik}} = A_{ik}. \quad \square$$

**Definition 1.9 ($\rho_i$)** 写像 $\rho_i : \mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K}) \to M^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$ を次のように定めることができる:

$$\rho_i(x) = x' = [x'_{jl}] \quad (x = [x_{jl}] \in \mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})).$$

ここで

$$\begin{aligned}
x'_{jl} &= x_{jl} - A_{j,l+1} = A_{jl}^{-1} x_{j+1,l} A_{j,l+1} = sP_{jl} x_{j+1,l} P_{j,l+1}^{-1} && (j \equiv i \ (\mathrm{mod}\, m)),\\
x'_{j+1,l} &= x_{j+1,l} + A_{jl} = A_{jl} x_{jl} A_{j,l+1}^{-1} = s^{-1} P_{jl}^{-1} x_{jl} P_{j,l+1} && (j \equiv i \ (\mathrm{mod}\, m)),\\
x'_{jl} &= x_{jl} && (j \not\equiv i, i+1 \ (\mathrm{mod}\, m)).
\end{aligned}$$

各定義式の 2 つ目以降の等号は Lemma 1.8 および $\alpha_{i,k+1} = s\alpha_{ik}$ より $A_{i,k+1} = \alpha_{ik}/P_{i,k+1}$ であることから導かれる. 定義より明らかに $\rho_{i+m} = \rho_i$ である. □

$x \in \mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$ に対して $m \times m$ 行列 $G^{(i)}_{jl}(z) = G^{(i)}_{jl}(x,z)$ を以下のように定める. $i' \equiv i \ (\mathrm{mod}\, m)$ を満たす唯一の $i' \in \{j, j+1, \ldots, j+m-1\}$ を取り,

$$\begin{aligned}
G^{(i)}_{jl}(z) &= E + A_{i'l} E_{i'-j+2,i'-j+1} && (i'-j+1 = 1, \ldots, m-1),\\
G^{(i)}_{jl}(z) &= E + r^{l-1} z^{-1} A_{i'l} E_{1m} && (i'-j+1 = m).
\end{aligned}$$

ここで $E$ は $m \times m$ の単位行列である.

**Lemma 1.10 ($\rho_i$ の Lax 表示)** 任意の $x \in \mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$ に対して

$$X_{jl}(\rho_i(x), z) = G^{(i)}_{jl}(x,z) X_{jl}(x,z) G^{(i)}_{j,l+1}(x,z)^{-1}. \qquad (*)$$

**Proof.** $i_0 := i'-j+1 = 1, \ldots, m-1$ のとき $(*)$ の右辺の 第 $(i_0, i_0)$, $(i_0, i_0+1)$, $(i_0+1, i_0)$, $(i_0+1, i_0+1)$ 成分を計算すると以下のようになる:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ A_{i'l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i'l} & 1 \\ 0 & x_{i'+1,l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A_{i',l+1} & 1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} x_{i'l} - A_{i',l+1} & 1 \\ A_{i'l} x_{i'l} - x_{i'+1,l} A_{i',l+1} - A_{i'l} A_{i',l+1} & x_{i'+1,l} + A_{i'l} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

したがって Lemma 1.8 より $(*)$ が成立することがわかる.

$i'-j+1 = m$ と仮定する. そのとき $i' = j+m-1$, $x_{jl} = x_{i'+1-m,l} = r^{-1} x_{i'+1,l}$ である. よって $(*)$ の右辺の第 $(1,1)$, $(1,m)$, $(m,1)$, $(m,m)$ 成分を計算すると以下のようになる:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & r^{l-1} z^{-1} A_{i'l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{jl} & 0 \\ r^{-l} z & x_{j+m-1,l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r^{l} z^{-1} A_{i'l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & r^{l-1} z^{-1} A_{i'l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{-1} x_{i'+1,l} & 0 \\ r^{-l} z & x_{i'l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r^{l} z^{-1} A_{i'l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} r^{-1}(x_{i'+1,l} + A_{i'l}) & r^{l-1}(A_{i'l} x_{i'l} - x_{i'+1,l} A_{i',l+1} - A_{i'l} A_{i',l+1}) \\ r^{-l} z & x_{i'l} - A_{i',l+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

したがって Lemma 1.8 より $(*)$ が成立することがわかる. □

$z$ の縦 $m$ ベクトル値函数 $v(z)$ に作用する作用素 $T_{z,s}$ を次のように定める:

$$T_{z,s}v(z) = s^{-(m-1)/2}\operatorname{diag}(s^{m-1}, s^{m-2}, \dots, 1)v(s^m z).$$

$z$ の $m\times m$ 行列値函数 $A(z)$ への $T_{z,s}$ の作用を次のように定める:

$$\begin{aligned} T_{z,s}(A(z)) &:= T_{z,s}A(z)T_{z,s}^{-1} \\ &= \operatorname{diag}(s^{m-1}, s^{m-2}, \dots, 1)A(s^m z)\operatorname{diag}(s^{m-1}, s^{m-2}, \dots, 1)^{-1}. \end{aligned}$$

すなわち $A(z)$ の成分を $a_{ij}(z)$ と書くと,

$$T_{z,s}(A(z)) = \begin{bmatrix} a_{11}(s^m z) & sa_{12}(s^m z) & s^2a_{13}(s^m z) & \ddots & s^{m-1}a_{1m}(s^m z) \\ s^{-1}a_{21}(s^m z) & a_{22}(s^m z) & sa_{23}(s^m z) & \ddots & \ddots \\ s^{-2}a_{31}(s^m z) & s^{-1}a_{32}(s^m z) & sa_{23}(s^m z) & \ddots & s^2a_{m-2,m}(s^m z) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & sa_{m-1,m}(s^m z) \\ s^{-(m-1)}a_{m1}(s^m z) & \ddots & s^{-2}a_{m,m-2}(s^m z) & s^{-1}a_{m,m-1}(s^m z) & a_{mm}(s^m z) \end{bmatrix}.$$

$A_{j,l+n} = sA_{jl}$ より

$$G^{(i)}_{j,l+n}(z) = T_{z,s}^{-1}(G^{(i)}_{jl}(z)), \quad \text{i.e.} \quad G^{(i)}_{jl}(z) = T_{z,s}(G^{(i)}_{j,l+n}(z)).$$

したがって Lemma 1.10 より次の結果が導かれる.

**Lemma 1.11** 任意の $x \in \mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$ に対して

$$\mathbb{X}_{jl}(\rho_i(x), z) = T_{z,s}(G^{(i)}_{j,l+n}(x,z))\mathbb{X}_{jl}(x,z)G^{(i)}_{j,l+n}(x,z)^{-1}. \quad \square$$

**Remark 1.12** Lemma 1.11 は $\rho_i$ の作用が形式的に次の線形差分方程式のゲージ変換を定めることを意味している:

$$T_{z,s}Y_{jl}(z) = \mathbb{X}_{jl}(z)Y_{jl}(z).$$

実際

$$\widetilde{Y}_{jl}(z) = G^{(i)}_{j,l+n}(z)Y_{jl}(z), \quad \widetilde{\mathbb{X}}_{jl}(z) = T_{z,s}(G^{(i)}_{j,l+n}(z))\mathbb{X}_{jl}(z)G^{(i)}_{j,l+n}(z)^{-1}$$

と置くと

$$\begin{aligned} T_{s,z}\widetilde{Y}_{jl}(z) &= T_{s,z}G^{(i)}_{j,l+n}(z)Y_{jl}(z) \\ &= T_{s,z}(G^{(i)}_{j,l+n}(z))T_{s,z}Y_{jl}(z) = T_{s,z}(G^{(i)}_{j,l+n}(z))\mathbb{X}_{jl}(z)Y_{jl}(z) \\ &= T_{s,z}(G^{(i)}_{j,l+n}(z))\mathbb{X}_{jl}(z)G^{(i)}_{j,l+n}(z)^{-1}G^{(i)}_{j,l+n}(z)Y_{jl}(z) = \widetilde{\mathbb{X}}_{jl}(z)\widetilde{Y}_{jl}(z). \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 1.13** (((($\mathbb{X}(z)$ への $\rho_i$ の作用が braid relation を満たすこと))) $\square$

**Theorem 1.14 (braid relations of $\rho_i$)**

1. $j \not\equiv i, i+1 \pmod m$ かつ $x, \rho_i(x), \rho_j(x) \in \mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$ ならば $\rho_i\rho_j(x) = \rho_j\rho_i(x)$.

2. $x, \rho_i(x), \rho_{i+1}(x), \rho_i\rho_{i+1}(x), \rho_{i+1}\rho_i(x) \in \mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$ ならば $\rho_i\rho_{i+1}\rho_i(x) = \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}(x)$.

3. $x, \rho_i(x) \in \mathcal{X}^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$ ならば $\rho_i^2(x) = x$. $\square$

**Proof.** (((Lemma 1.13 と Lemma 1.5 からこの定理が証明される.))) $\square$

## 1.5 $\widetilde{W}\bigl(A_{n-1}^{(1)}\bigr)$ symmetry

(((この subsection では $\varpi$, $\sigma_k$ の作用が定義され, それらが $\widetilde{W}\bigl(A_{n-1}^{(1)}\bigr)$ の基本関係式を満たしていることを示す.)))

**Definition 1.15** **($\varpi$)** 全単射 $\varpi : \mathcal{X}_{mn}^{(r,p)}(\mathcal{K}) \to \mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ を次のように定めることができる:

$$\varpi(x) = x' = [x'_{jl}] \quad (x = [x_{jl}] \in \mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})).$$

ここで

$$x'_{jl} = x_{j,l+1}. \quad \square$$

**Lemma 1.16** 任意の $x \in M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ に対して $Q_{ik} = Q_{ik}(x)$ は次を満たしている:

$$Q_{i+1,k}x_{ik} - x_{i+m,k+1}Q_{ik} = d_{ik} - d_{i+1,k+1}.$$

**Proof.** $Q_{i+1,k}x_{ik}$ と $x_{i+m,k+1}Q_{ik}$ を別々に計算すると

$$Q_{i+1,k}x_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \overbrace{x_{i+m,k+1}\cdots x_{i+j+2,k+1}x_{i+j+1,k+1}}^{m-j}\overbrace{x_{i+j-1,k}\cdots x_{i+2,k}x_{i+1,k}x_{ik}}^{j},$$

$$\begin{aligned} x_{i+m,k+1}Q_{ik} &= \sum_{j=1}^{m} \overbrace{x_{i+m,k+1}x_{i+m-1,k+1}\cdots x_{i+j+1,k+1}x_{i+j,k+1}}^{m-j+1}\overbrace{x_{i+j-2,k}\cdots x_{i+1,k}x_{ik}}^{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \overbrace{x_{i+m,k+1}\cdots x_{i+j+2,k+1}x_{i+j+1,k+1}}^{m-j}\overbrace{x_{i+j-1,k}\cdots x_{i+2,k}x_{i+1,k}x_{ik}}^{j}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} Q_{i+1,k}x_{ik} - x_{i+m,k+1}Q_{ik} &= x_{i+m-1,k}\cdots x_{i+2,k}x_{i+1,k}x_{ik} - x_{i+m,k+1}\cdots x_{i+2,k+1}x_{i+1,k+1} \\ &= d_{ik} - d_{i+1,k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

$x \in \mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ に対して $\mathcal{K}$ の元 $\beta_{ik} = \beta_{ik}(x)$, $B_{ik} = B_{ik}(x)$ を次のように定める:

$$\beta_{ik} = d_{ik} - d_{i+1,k+1}, \quad B_{ik} = r^{-1}\frac{\beta_{ik}}{Q_{ik}}.$$

$\beta_{i,k+n} = s^m\beta_{ik}$, $Q_{i,k+n} = s^{m-1}Q_{ik}$ と $\beta_{i+m,k} = r^m\beta_{ik}$, $Q_{i+m,k} = r^{m-1}Q_{ik}$ のそれぞれより $B_{i+m,k} = rB_{ik}$ と $B_{i,k+n} = sB_{ik}$ が導かれる.

**Lemma 1.17** 任意の $x \in \mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ に対して $B_{ik} = B_{ik}(x)$ は次を満たしている:

$$x_{ik}B_{ik} - B_{i+1,k}x_{i,k+1} = B_{i+1,k}B_{ik}.$$

**Proof.** Lemma 1.16 と $x_{i+m,k+1} = rx_{i,k+1}$, $\beta_{ik} = r^i\beta_{0k}$ より

$$Q_{i+1,k}x_{ik} - x_{i,k+1}rQ_{ik} = r^i\beta_{0k}.$$

この等式の両辺に $r^{-i}$ をかけ, $\widetilde{Q}_{ik} = r^{-(i-1)}Q_{ik}$ と置くと,

$$\widetilde{Q}_{i+1,k}x_{ik} - x_{i,k+1}\widetilde{Q}_{ik} = \beta_{0k}.$$

この等式の両辺に右から $\widetilde{Q}_{ik}^{-1}$ をかけ, 左から $\widetilde{Q}_{i,k+1}^{-1}$ をかけ, さらに $\beta_{0k}$ をかけると

$$x_{ik}\frac{\beta_{0k}}{\widetilde{Q}_{ik}} - \frac{\beta_{0k}}{\widetilde{Q}_{i,k+1}}x_{i+1,k} = \frac{\beta_{0k}}{\widetilde{Q}_{i,k+1}}\frac{\beta_{0k}}{\widetilde{Q}_{ik}}.$$

よって次が成立することに注意すれば補題の主張が証明される:

$$\frac{\beta_{0k}}{\widetilde{Q}_{ik}} = \frac{r^{-i}\beta_{ik}}{r^{-(i-1)}Q_{ik}} = B_{ik}. \quad \square$$

**Definition 1.18 ($\sigma_k$)** 写像 $\sigma_k : \mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K}) \to M_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ を次のように定めることができる:

$$\sigma_k(x) = x' = [x'_{jl}] \quad (x = [x_{jl}] \in \mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})).$$

ここで

$$\begin{aligned}
x'_{jl} &= x_{jl} - B_{j+1,l} = B_{j+1,l}x_{j,l+1}B_{jl}^{-1} = rQ_{j+1,l}^{-1}x_{j,l+1}Q_{jl} && (l \equiv k \ (\mathrm{mod}\, n)),\\
x'_{j,l+1} &= x_{j,l+1} + B_{jl} = B_{j+1,l}^{-1}x_{jl}B_{jl} = r^{-1}Q_{j+1,l}x_{jl}Q_{jl}^{-1} && (l \equiv k \ (\mathrm{mod}\, n)),\\
x'_{jl} &= x_{jl} && (l \not\equiv k, k+1 \ (\mathrm{mod}\, n)).
\end{aligned}$$

各定義式の 2 つ目以降の等号は Lemma 1.17 および $\beta_{i+1,k} = r\beta_{ik}$ より $B_{i+1,k} = \beta_{ik}/Q_{i+1,k}$ であることから導かれる. 定義より明らかに $\sigma_{k+n} = \sigma_k$ である. $\square$

**Lemma 1.19 ($\sigma_k$ の Veselov 表示)** 任意の $x \in \mathcal{X}_{mn}^{(r,s)}(\mathcal{K})$ に対して

$$\begin{aligned}
&X_{jl}(\sigma_k(x), z)X_{j,l+1}(\sigma_k(x), z) = X_{jl}(x, z)X_{j,l+1}(x, z) && (l \equiv k \ (\mathrm{mod}\, n)),\\
&X_{jl}(\sigma_k(x), z) = X_{jl}(x, z) && (l \not\equiv k, k+1 \ (\mathrm{mod}\, n)),\\
&d_{jl}(\sigma_k(x)) = rd_{j,l+1}(x) = d_{j+1,l+1}(x) && (l \equiv k \ (\mathrm{mod}\, n)),\\
&d_{j,l+1}(\sigma_k(x)) = r^{-1}d_{jl}(x) = d_{j-1,l}(x) && (l \equiv k \ (\mathrm{mod}\, n)),
\end{aligned}$$

**Proof.** 記号の簡単のため $x' = [x'_{jl}] = \sigma_k(x)$, $X_{jl} = X_{jl}(x, z)$, $X'_{jl} = X_{jl}(x', z)$, $\mathbf{x}_{jl} = \mathbf{x}_{jl}(x)$, $\mathbf{x}'_{jl} = \mathbf{x}_{jl}(x')$ と置く.

$l \equiv k \ (\mathrm{mod}\, n)$ のとき $x'_{jl} = x_{jl} - B_{j+1,l}$, $x'_{j,l+1} = x_{j,l+1} + B_{jl}$ であることより, 1 行目の公式は Lemma 1.17 の結果と同値であることがわかる.

$l \not\equiv k, k+1 \ (\mathrm{mod}\, n)$ のとき $x'_{jl} = x_{jl}$ であることから, 2 行目の公式が得られる.

$l \equiv k \ (\mathrm{mod}\, n)$ のとき $x'_{jl} = rQ_{j+1,l}^{-1}x_{j,l+1}Q_{jl}$, $x'_{j,l+1} = r^{-1}Q_{j+1,l}x_{j,l+1}Q_{jl}^{-1}$ であり, $Q_{j+m,l} = r^{m-1}Q_{jl}$ であることから, 3 行目と 4 行目の公式が得られる. $\square$

## 1.6 $\widetilde{W}\bigl(A_{m-1}^{(1)}\bigr) \times \widetilde{W}\bigl(A_{n-1}^{(1)}\bigr)$ symmetry

(((この subsection では $\widetilde{W}\bigl(A_{m-1}^{(1)}\bigr)$ の作用と $\widetilde{W}\bigl(A_{n-1}^{(1)}\bigr)$ の作用が可換であることを示す.)))

# 2 Quantum discrete dynamical systems

この section では量子版の $\widetilde{W}\big(A^{(1)}_{m-1}\big)\times\widetilde{W}\big(A^{(1)}_{n-1}\big)$ の有理作用を構成する.

非可換版と量子版の違いについて説明しよう. 前 section で構成した非可換版有理作用における $\rho_i$, $\sigma_k$ の定義域は集合 $M^{(r,s)}_{mn}(\mathcal{K})$ の部分集合であった. それに対してこの節で構成する量子版の有理作用は斜体への自己同型作用として構成される. 我々が欲しているのはこちらの方である.

# 参考文献


[1] Kajiwara, K., Noumi, M., and Yamada, Y., Discrete dynamical systems with $W(A^{(1)}_{m-1}\times A^{(1)}_{n-1})$ symmetry, `nlin.SI/0106029`

[2] Lipan, O. and Rasinariu, C., Baxter $T$-$Q$ equation for shape invariant potentials — The finite-gap potential case, `hep-th/0006074`

[3] Reshetikhin, N. and Veselov, A., Poisson Lie groups and Hamiltonian theory of the Yang-Baxter maps, `math.QA/0512328`