# Quantum dressing chain に関するノート

黒木 玄

2004 年 8 月 7 日更新未完 (2004 年 8 月 4 日作成)

## 目 次



## 1 Periodic quantum dressing chain

$K$ は標数 0 の任意の体であるとする.
$n = 2g+1$ は 3 以上の奇数であるとする[1].

### 1.1 Lax 方程式

$\mathcal{A}$ は $v_1, \dots, v_n$ から生成される $K$ 上の結合代数[2]であるとし, $v_i$ の添字 $i$ を条件 $v_{i+n} = v_i$ ($i \in \mathbb{Z}$) によって整数全体に拡張しておく.

$\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n \in K$ を任意に取り, $\varepsilon_i$ の添字 $i$ を条件 $\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i$ ($i \in \mathbb{Z}$) によって整数全体に拡張しておく[3].

---

[1] 偶数の場合は別の計算と議論が必要である.
[2] 結合代数として 1 を持つもののみを考える.
[3] これは周期的 (periodic) な場合を扱うための仮定である. 準周期的 (quasi-periodic) な場合を扱うためには, $\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i$ という条件を $\kappa \in K$ を任意に固定して $\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i + \kappa$ という条件に緩めなければいけない. 周期的な場合は可積分系が得られ, 準周期的な場合は量子 Painlevé 系の一般化が得られる.

**定義 1.1 (local $L$-operators)** $\mathcal{A}$ 係数の 1 変数多項式環 $\mathcal{A}[z] = \mathcal{A} \otimes_K K[z]$ の元を成分に持つ次の行列を periodic quantum dressing chain の **local $L$-operators** と呼ぶ:

$$V_i(z) = \begin{bmatrix} v_i & 1 \\ v_i^2 - \varepsilon_i + z & v_i \end{bmatrix} \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

**定義 1.2 (local $B$-matrices)** $w_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{Z})$ かつ $w_{i+n} = w_i$ と仮定する. このとき次の行列を quasi-periodic quantum dressing chain の **local $B$-matrices** と呼ぶ:

$$W_i(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ w_i + z & 0 \end{bmatrix} \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

**補題 1.3 (Lax 方程式)** $\partial$ は $\mathcal{A}$ に作用する $K$-derivation であるとし, $\partial$ の作用を $\mathcal{A}[z]$ の上に条件 $\partial(z) = 0$ によって拡張しておく. そのとき, Lax 方程式

$$\partial(V_i(z)) = W_i(z)V_i(z) - V_i(z)W_{i+1}(z) \qquad (i \in \mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

が成立するための必要十分条件は

$$\partial(v_i) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k v_{i+k}^2 - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \varepsilon_{i+k} \qquad (i \in \mathbb{Z}), \tag{1.2}$$

$$w_i = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k v_{i+k}^2 - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \varepsilon_{i+k} = \partial(v_i) + v_i^2 - \varepsilon_i \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

が成立することである. 特に Lax 方程式 (1.1) から $\partial$ と $w_i$ は一意に決定される. $\square$

証明は直接の計算による (易しい).

**注意 1.4** 上の補題の証明には $\mathcal{A}$ が結合代数であることしか使わない. 代数 $\mathcal{A}$ は特別な結合代数である必要はない. $\square$

**注意 1.5** 上の補題は $K$-derivation $\partial$ がすでに与えられているときの結果である. 任意の $\mathcal{A}$ において, 等式 (1.2) で $K$-derivation $\partial$ を定義できるとは限らない. $\square$

**注意 1.6** Lax 方程式

$$\partial(V_i(z)) = W_i(z)V_i(z) - V_i(z)W_{i+1}(z) \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

は形式的に次の線形微分方程式系の両立条件の形をしている:

$$Y_i(z) = V_i(z)Y_{i-1}(z), \qquad \partial(Y_i(z)) = W_i(z)Y_i(z) \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

## 1.2　互いに可換な Hamiltonians

$\hbar \in K^\times$ であるとする.

**定義 1.7 (Heisenberg 代数 $\mathcal{A}_n^{\mathrm{pdc}}$)** 以下の生成元と基本関係式で定義された $K$ 上の結合代数を $\mathcal{A}_n^{\mathrm{pdc}}$ と書き, サイズ $n$ の **periodic quantum dressing chain の Heisenberg 代数**と呼ぶことにする:

- 生成元:　$v_1, \dots, v_n$.　($v_i$ の添字を $v_{i+n} = v_i$ によって整数全体に拡張しておく.)
- 基本関係式:　$[v_i, v_j] = (-1)^{j-i}\hbar \quad (i < j < i+n)$.

ここで $[A, B] = AB - BA$ (交換子) である. □

**注意 1.8** $\sum_{i=1}^n v_i$ は $\mathcal{A}_n^{\mathrm{pdc}}$ の中心元である. □

これ以後 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n^{\mathrm{pdc}}$ と仮定する $(n = 2g+1)$.

**定義 1.9 (monodromy matrices)** 次の行列 $\mathbb{V}_i(z)$ を periodic quantum dressing chain の (quantum) **monodromy matrices** と呼ぶ:

$$\mathbb{V}_i(z) = V_i(z)V_{i+1}(z)\cdots V_{i+n-1}(z) \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

**注意 1.10** 周期性 $W_{i+n}(z) = W_i(z)$ より, local $L$-operators $V_i(z)$ に関する Lax 方程式 $\partial(V_i(z)) = W_i(z)V_i(z) - V_i(z)W_{i+1}(z)$ から, monodromy matrices $\mathbb{V}_i(z)$ に関する次の Lax 方程式が導かれる:

$$\partial(\mathbb{V}_i(z)) = [W_i(z), \mathbb{V}_i(z)] \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

この方程式は形式的に $\mathbb{V}_i(z)$ のスペクトル保存変形の形をしている. □

**補題 1.11** $\mathbb{V}_i(z)$ 自身は $i$ によるが, その trace は $i$ によらない[4]. □

**注意 1.12** 非可換環の元を成分に持つ行列に関して公式 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ は一般に成立しないので上の補題は非自明である. □

**定義 1.13 (transfer matrix)** 上の補題よって $i$ によらずに定まる $\mathrm{tr}\,\mathbb{V}_i(z)$ を $T(z)$ と書き, periodic quantum dressing chain の **transfer matrix** と呼ぶことにする[5]:

$$T(z) := \mathrm{tr}\,\mathbb{V}_i(z) = \mathrm{tr}\big(V_i(z)V_{i+1}(z)\cdots V_{i+n-1}(z)\big) \in \mathcal{A}[z]. \quad \square$$

**補題 1.14** Transfer matrix $T(z)$ について以下が成立している:

(1) $T(z)$ は $z$ の $g$ 次式になる $(n = 2g+1)$. そこで $T(z)$ における $z^{g-k}$ の係数を $H_k$ と書くことにする.

(2) $H_0 = 2\sum_{i=1}^n v_i$ である. 特に $H_0$ は $\mathcal{A}$ の中心元である.

(3) $H_k$ は $v_i$ たちの $2k+1$ 次式になる. □

[4] この結果は quasi-periodic の場合には成立しない.
[5] この場合は行列でないが習慣に合わせて matrix と呼ぶ.

**定義 1.15 (Hamiltonians)** $H_1, \dots, H_g$ を periodic quantum dressing chain の **Hamiltonians** と呼ぶ ($n = 2g+1$). 特に $H_1$ を単に $H$ と書いて, periodic quantum dressing chain の **Hamiltonian** と呼ぶことがある. □

**補題 1.16 (Hamiltonian $H = H_1$ の具体的表示)** Hamiltonian $H = H_1$ は具体的に次のように表わされる:

$$H = H_1 = \sum_{1 \le i < j \le n} (v_i v_j^2 + v_i^2 v_j) + 2 \sum_{1 \le i < j < k \le n} v_i v_j v_k - \sum_{1 \le i, j \le n,\, i \ne j} \varepsilon_j v_i. \quad \square$$

**注意 1.17** 他の $H_k$ の具体的な表示もある. (後で書き加える予定) □

**例 1.18 ($n = 3$ の場合)** $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} H = H_1 &= v_1^2 v_2 + v_1 v_2^2 + v_1^2 v_3 + v_1 v_3^2 + v_2^2 v_3 + v_2 v_3^2 + 2 v_1 v_2 v_3 \\ &\quad - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) v_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) v_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) v_3. \quad \square \end{aligned}$$

**定理 1.19 (Hamiltonians の可換性)** Transfer matrices の可換性 $[T(z), T(w)] = 0$ が成立している. 特に Hamiltonians $H_1, \dots, H_g$ は互いに可換である ($n = 2g+1$). □

**注意 1.20 (可積分性)** 古典極限 $\hbar = 0$ で $H_k$ は $v_i$ たちの多項式とみなせる. そのとき $H_k$ たちは代数的に独立である. よって periodic quantum dressing chain の古典極限 (periodic classical dressing chain) は古典可積分系である. Periodic quantum dressing chain は「ある古典可積分系の量子化でかつ Hamiltonians の可換性が量子化で保たれている」という意味で量子可積分系である. □

**問題 1.21 (Hamiltonians の同時対角化)** Heisenberg 代数 $\mathcal{A}$ の適切な表現において periodic quantum dressing chain の Hamiltonians $H_k$ を同時対角化せよ. □

## 1.3 Heisenberg 方程式の Lax 表示

補題 1.16 を用いて直接計算すれば次の補題が証明される.

**補題 1.22 (Heisenberg 方程式)** Hamiltonian $H = H_1$ から得られる $v_i$ に関する Heisenberg 方程式の右辺 $\hbar^{-1}[H, v_i]$ は次の形になる:

$$\hbar^{-1}[H, v_i] = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k v_{i+k}^2 - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \varepsilon_{i+k}.$$

これの右辺は (1.2) の右辺に等しい. □

この補題から次の定理がただちに得られる.

**定理 1.23 (Heisenberg 方程式の Lax 表示)** Local $L$-operators $V_i(z)$ に関する Heisenberg 方程式の右辺 $\hbar^{-1}[H, V_i(z)]$ は次の Lax 表示を持つ:

$$\hbar^{-1}[H, V_i(z)] = W_i(z) V_i(z) - V_i(z) W_{i+1}(z). \quad \square$$

一般に任意の結合代数 $\mathcal{A}$ とその元 $a \in \mathcal{A}$ に対して $\partial(x) = [a, x]$ $(x \in \mathcal{A})$ によって $\mathcal{A}$ に作用する derivation $\partial$ を定義できる．よって上の定理から次の結果がただちに得られる．

**系 1.24** Periodic quantum dressing chain の Heisenberg 代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n^{\mathrm{pdc}}$ $(n = 2g+1)$ に作用する $K$-derivation $\partial$ を等式 (1.2) で定義可能である．その $\partial$ は次の条件で一意に特徴付けられる:

$$\partial(V_i(z)) = \hbar^{-1}[H, V_i(z)] = W_i(z)V_i(z) - V_i(z)W_{i+1}(z) \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

## 1.4 $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子可積分系との比較

$n = 2g+1$ は 3 以上の奇数であると仮定したので, 周期性 $v_{i+n} = v_i$ より, $v_i$ から $f_i$ への次の変数変換は可逆である:

$$f_i = v_i + v_{i+1} \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

$f_i$ も周期性 $f_{i+n} = f_i$ を満たしており, 逆変換は次で与えらえる:

$$v_i = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f_{i+k} = \frac{1}{2}(f_i - f_{i+1} + \cdots - f_{i+n-2} + f_{i+n-1}) \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

さらに定義 1.7 における $v_i$ の基本関係式は $f_i$ の次の関係式と同値である:

$$[f_i, f_j] = \begin{cases} \mp\hbar & (j \equiv i \pm 1 \mod n), \\ 0 & (j \not\equiv i \pm 1 \mod n). \end{cases}$$

**定義 1.25 ($\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子可積分系の $L$-operator)** $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子可積分系の $L$-operator $L(z)$ を次のように定める:

$$L(z) = \Lambda^2 + f\Lambda + \varepsilon.$$

ここで

$$\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \quad f = \mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_n),$$
$$\Lambda = E_{12} + \cdots + E_{n-1,n} + zE_{n1} \quad (E_{ij} \text{ は行列単位}). \quad \square$$

**定義 1.26 ($\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子可積分系の Hamiltonian)** $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子可積分系の Hamiltonian $H'$ を次のように定める[6]:

$$H' = \left(\frac{1}{g+2}\,\mathrm{tr}\big(L(z)^{g+2}\big) \text{ における } z \text{ の係数}\right). \quad \square$$

**定理 1.27 (二つの系の比較)** $n = 2g+1$ が 3 以上の奇数であるとき, サイズ $n$ の periodic quantum dressing chain の Hamiltonian $H$ と $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子可積分系の Hamiltonian $H'$ は $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n^{\mathrm{pdc}}$ の中心元の差を除いて等しい．より正確には次が成立している:

$$H' = H + 2\left(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n + \frac{g}{g+2}\hbar\right)\sum_{i=1}^{n} v_i.$$

よって, サイズ $n$ の periodic quantum dressing chain と $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子可積分系は本質的に等しい． $\square$

[6] 可積分性は次の定理からも出るし, 独立に証明可能でもある．

この定理と補題 1.22 を合わせると次が導かれる.

**系 1.28** 次の公式が成立している:

$$\hbar^{-1}[H', f_i] = \left(\sum_{k=1}^{g} f_{i+2k}\right) f_i - f_i \left(\sum_{k=1}^{g} f_{i+2k-1}\right) - \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}.$$

**証明.** 定理 2.26 と補題 1.22 より,

$$\hbar^{-1}[H', f_i] = \hbar^{-1}[H, f_i] = \hbar^{-1}[H, v_i + v_{i+1}] = v_i^2 - v_{i+1}^2 - \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}.$$

さらに $v_i$, $v_{i+1}$ を $f_j$ たちで表わす式を代入して整理すれば求める結果が得られる. □

一般に $n$ 次正方行列 $A$ に対して $A^{[k]}$ を

$$A^{[k]} := \Lambda^k A \Lambda^{-k}$$

と定める. $A^{[k]}$ は $A$ の成分を左上に $k$ だけ巡回的にずらして得られる行列になる.

**定義 1.29 ($\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子可積分系の $B$-matrix)** $L(z)^{g+1}$ の中の principal gradation で degree が $n$ 以上の部分を $B(z)\Lambda^n$ と書くと, $B(z)$ は次のように表わされる:

$$B(z) = \Lambda + \sum_{k=0}^{g} f^{[2k]} = \Lambda + (f + f^{[2]} + \cdots + f^{[2g]}).$$

この $B(z)$ を $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子可積分系の $B$-matrix と呼ぶ. □

系 1.28 から次の結果がただちに得られる.

**系 1.30** 次の公式が成立している:

$$\hbar^{-1}[H', L(z)] = [B(z), L(z)].$$

**証明.** 上の系を用いて左辺を計算すると,

$$\hbar^{-1}[H', L(z)] = \hbar^{-1}[H', f]\Lambda = \left\{ \left(\sum_{k=1}^{g} f^{[2k]}\right) f - f \left(\sum_{k=1}^{g} f^{[2k-1]}\right) - \varepsilon + \varepsilon^{[1]} \right\} \Lambda.$$

右辺を公式 $[A\Lambda^k, B\Lambda^l] = (AB^{[k]} - BA^{[l]})\Lambda^{k+l}$ を用いて直接計算すると,

$$\begin{aligned}
[B(z), L(z)] &= \left[\Lambda + \sum_{k=0}^{g} f^{[2k]}, \Lambda^2 + f\Lambda + \varepsilon\right] \\
&= (f^{[1]} - f)\Lambda^2 + \left(\sum_{k=0}^{g} f^{[2k]} - \sum_{k=0}^{g} f^{[2(k+1)]}\right)\Lambda^2 \\
&\quad + \left\{ \left(\sum_{k=0}^{g} f^{[2k]}\right) f - f \left(\sum_{k=0}^{g} f^{[2k+1]}\right) \right\} \Lambda + (\varepsilon^{[1]} - \varepsilon)\Lambda.
\end{aligned}$$

$f^{[2g+1]} = f$ を用いて最後の式を整理すれば余計な項がキャンセルして, 左辺に一致することがわかる. □

# 2 Quasi-periodic quantum dressing chain

$K$ は標数 0 の任意の体であるとする.
$n = 2g+1$ は 3 以上の奇数であるとする[7].

## 2.1 Lax 方程式

$\mathcal{A}$ は $u_1, \dots, u_n$ から生成される $K$ 上の結合代数であるとし, $\kappa \in K$ を任意に取り, $\mathcal{A}[t]$ の元 $v_1, \dots, v_n$ を

$$v_i = u_i + (-1)^{i-1}\frac{\kappa}{2}t \qquad (i = 1, \dots, n)$$

と定める. このとき $n$ は奇数なので

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} u_i + \frac{\kappa}{2}t$$

が成立している. $u_i$, $v_i$ の添字 $i$ を periodic condition

$$u_{i+n} = u_i, \quad v_{i+n} = v_i \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

によって整数全体に拡張しておく.

**注意 2.1** $n$ は奇数なので, $\kappa \neq 0$ のときすべての $i \in \mathbb{Z}$ に対して $v_i = u_i + (-1)^{i-1}\kappa t/2$ は成立していないことに注意せよ. たとえば $v_n = u_n + \kappa t/2$, $v_{n+1} = u_{n+1} + \kappa t/2$ となっている. □

$\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n \in K$ を任意に取り, $\varepsilon_i$ の添字 $i$ を quasi-periodic condition

$$\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i + \kappa \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

によって整数全体に拡張しておく.

**定義 2.2 (local $L$-operators)** $\mathcal{A}[t, z]$ の元を成分に持つ次の行列を quasi-periodic quantum dressing chain の **local $L$-operators** と呼ぶ:

$$V_i(z) = \begin{bmatrix} v_i & 1 \\ v_i^2 - \varepsilon_i + z & v_i \end{bmatrix} \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

$V_i(z)$ は次の準周期性を持つ:

$$V_{i+n}(z) = V_i(z - \kappa) \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

$\mathcal{A}[t, z]$ の元 $x$ と $\mathcal{A}[t, z]$ の元を成分に持つ行列 $X$ の $t$ による偏微分をそれぞれ $x_t$, $X_t$ と書くことにする. たとえば

$$v_{i,t} = (-1)^{i-1}\frac{\kappa}{2}, \quad V_i(z)_t = \begin{bmatrix} (-1)^{i-1}\kappa/2 & 0 \\ (-1)^{i-1}\kappa v_i & (-1)^{i-1}\kappa/2 \end{bmatrix} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

[7] 偶数の場合は別の計算と議論が必要である.

**定義 2.3 (local $B$-matrices)** $w_i \in \mathcal{A}[t]$ $(i \in \mathbb{Z})$ かつ $w_{i+n} = w_i$ と仮定する．このとき次の行列を quasi-periodic quantum dressing chain の **local $B$-matrices** と呼ぶ:

$$W_i(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ w_i + z & 0 \end{bmatrix} \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

$W_i(z)$ は次の準周期性を持つ:

$$W_{i+n}(z) = W_i(z - \kappa) \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

**補題 2.4 (Lax 方程式)** $\partial$ は $\mathcal{A}$ に作用する $K$-derivation であるとし, $\partial$ の作用を $\mathcal{A}[t,z]$ の上に条件 $\partial(t) = 1$, $\partial(z) = 0$ によって拡張しておく．そのとき, Lax 方程式

$$\partial(V_i(z)) = W_i(z)V_i(z) - V_i(z)W_{i+1}(z) \qquad (i \in \mathbb{Z}) \tag{2.1}$$

が成立するための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \partial(v_i) &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k v_{i+k}^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \varepsilon_{i+k} + \frac{\kappa}{2} \qquad (i \in \mathbb{Z}), \\ w_i &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_{i+k}^2 - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \varepsilon_{i+k} + \frac{\kappa}{2} = \partial(v_i) + v_i^2 - \varepsilon_i \qquad (i \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

が成立することである．特に Lax 方程式 (2.1) から $\partial$ と $w_i$ は一意に決定される． $\square$

証明は直接の計算による (易しい).

**注意 2.5** 上の補題の証明には $\mathcal{A}$ が結合代数であることしか使わない．代数 $\mathcal{A}$ は特別な結合代数である必要はない． $\square$

**注意 2.6** 上の補題は $K$-derivation $\partial$ がすでに与えられているときの結果である．任意の $\mathcal{A}$ において, 等式 (2.2) で $K$-derivation $\partial$ を定義できるとは限らない． $\square$

**注意 2.7** Lax 方程式

$$\partial(V_i(z)) = W_i(z)V_i(z) - V_i(z)W_{i+1}(z) \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

は形式的に次の線形微分方程式系の両立条件の形をしている:

$$Y_i(z) = V_i(z)Y_{i-1}(z), \qquad \partial(Y_i(z)) = W_i(z)Y_i(z) \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

## 2.2 Hamiltonians

$\hbar \in K^\times$ であるとする.

**定義 2.8 (Heisenberg 代数 $\mathcal{A}_n^{\mathrm{qpdc}}$)** 以下の生成元と基本関係式で定義された $K$ 上の結合代数を $\mathcal{A}_n^{\mathrm{qpdc}}$ と書き, サイズ $n$ の **quasi-periodic quantum dressing chain の Heisenberg 代数**と呼ぶことにする:

- 生成元: $u_1, \dots, u_n$. ($u_i$ の添字を $u_{i+n} = u_i$ によって整数全体に拡張しておく.)
- 基本関係式: $[u_i, u_j] = (-1)^{j-i}\hbar \quad (i < j < i+n)$.

ここで $[A,B] = AB - BA$ (交換子) である. □

**注意 2.9** $\sum_{i=1}^n u_i$ は $\mathcal{A}_n^{\mathrm{qpdc}}$ の中心元である. □

これ以後 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n^{\mathrm{qpdc}}$ と仮定する. そのとき前節のやり方で定義された $v_i \in \mathcal{A}[t]$ たちは定義 1.7 の $v_i$ の基本関係式を満たしている.

**定義 2.10 (monodromy matrices)** 次の行列 $\mathbb{V}_i(z)$ を quasi-periodic quantum dressing chain の (quantum) **monodromy matrices** と呼ぶ:

$$\mathbb{V}_i(z) = V_i(z)V_{i+1}(z)\cdots V_{i+n-1}(z) \quad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

**注意 2.11** 準周期性 $W_i(z) = W_{i+n}(z+\kappa)$ より, local $L$-operators $V_i(z)$ に関する Lax 方程式 $\partial(V_i(z)) = W_i(z)V_i(z) - V_i(z)W_{i+1}(z)$ から, monodromy matrices $\mathbb{V}_i(z)$ に関する次の形の Lax 方程式が導かれる:

$$\partial(\mathbb{V}_i(z)) = W_{i+n}(z+\kappa)\mathbb{V}_i(z) - \mathbb{V}_i(z)W_{i+n}(z).$$

この方程式は形式的に次の線形差分微分方程式系の両立条件になっている:

$$Y_{i+n}(z+\kappa) = \mathbb{V}_i(z)Y_{i+n}(z), \quad \partial(Y_{i+n}(z)) = W_{i+n}(z)Y_{i+n}(z). \quad \square$$

**補題 2.12** 次の公式が成立している:

$$\operatorname{tr}\mathbb{V}_{i+1}(z) = \operatorname{tr}\mathbb{V}_i(z)\big|_{\varepsilon_i \mapsto \varepsilon_i+\kappa}. \quad \square$$

**注意 2.13** 非可換環の元を成分に持つ行列に関して公式 $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ は一般に成立しないので上の補題は非自明である. □

**定義 2.14 (transfer matrices)** 次の行列を quasi-periodic quantum dressing chain の **transfer matrices** と呼ぶことにする[8]:

$$T_i(z) := \operatorname{tr}\mathbb{V}_i(z) = \operatorname{tr}\bigl(V_i(z)V_{i+1}(z)\cdots V_{i+n-1}(z)\bigr) \in \mathcal{A}[t,z] \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

**補題 2.15** Transfer matrices $T_i(z)$ について以下が成立している:

(1) $T_i(z)$ は $z$ の $g$ 次式になる ($n = 2g+1$). そこで $T_i(z)$ における $z^{g-k}$ の係数を $H_{i;k} \in \mathcal{A}[t]$ と書くことにする.

(2) $H_{i;0} = 2\sum_{i=1}^n v_i$ である. 特に $H_{i;0}$ は $\mathcal{A}[t]$ の中心元である.

(3) $H_{i;k}$ は $v_i$ たちの $2k+1$ 次式になる. □

**定義 2.16 (Hamiltonian)** 特に $H_{1;1}$ を単に $H$ と書いて, quasi-periodic quantum dressing chain の **Hamiltonian** と呼ぶことにする. □

[8] この場合は行列でないが習慣に合わせて matrix と呼ぶ.

**補題 2.17 (Hamiltonian $H = H_{1;1}$ の具体的表示)** Hamiltonian $H = H_{1;1}$ は具体的に次のように表わされる:

$$H = H_{1;1} = \sum_{1\le i<j\le n}(v_i v_j^2 + v_i^2 v_j) + 2\sum_{1\le i<j<k\le n} v_i v_j v_k - \sum_{1\le i,j\le n,\ i\ne j} \varepsilon_j v_i.$$

□

**注意 2.18** $v_i$ の中には時間変数 $t$ が陽に含まれているので上の Hamiltonian $H$ に付随する量子系は non-autonomous になる.

**注意 2.19** 他の $H_{i;k}$ の具体的な表示もある. (後で書き加える予定) □

**例 2.20 ($n=3$ の場合)** $n=3$ のとき

$$\begin{aligned} H = H_{1;1} &= v_1^2 v_2 + v_1 v_2^2 + v_1^2 v_3 + v_1 v_3^2 + v_2^2 v_3 + v_2 v_3^2 + 2 v_1 v_2 v_3 \\ &\quad - (\varepsilon_2+\varepsilon_3)v_1 - (\varepsilon_1+\varepsilon_3)v_2 - (\varepsilon_1+\varepsilon_2)v_3. \quad \square \end{aligned}$$

## 2.3 Heisenberg 方程式の Lax 表示

次の結果の証明には periodic case の場合の結果がそのまま使える.

**補題 2.21 (Heisenberg 方程式)** Hamiltonian $H = H_{1;1}$ から得られる $v_i$ に関する Heisenberg 方程式の右辺 $\hbar^{-1}[H, v_i] + v_{i,t}$ は次の形になる[9]:

$$\hbar^{-1}[H, v_i] + v_{i,t} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k v_{i+k}^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \varepsilon_{i+k} + \frac{\kappa}{2} \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

これの右辺は (2.2) の右辺に等しい. □

この補題から次の定理がただちに得られる.

**定理 2.22 (Heisenberg 方程式の Lax 表示)** Local $L$-operators $V_i(z)$ に関する Heisenberg 方程式の右辺 $\hbar^{-1}[H, V_i(z)] + V_i(z)_t$ は次の Lax 表示を持つ:

$$\hbar^{-1}[H, V_i(z)] + V_i(z)_t = W_i(z)V_i(z) - V_i(z)W_{i+1}(z) \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

一般に任意の結合代数 $\mathcal{A}$ と $a \in \mathcal{A}[t]$ に対して $\partial(x) = [a, x] + x_t$ ($x \in \mathcal{A}[t]$) によって $\mathcal{A}[t]$ に作用する derivation $\partial$ を定義できる. よって上の定理から次の結果がただちに得られる.

**系 2.23** 代数 $\mathcal{A}[t] = \mathcal{A}_n^{\mathrm{qpdc}}[t]$ ($n = 2g+1$) に作用する $K$-derivation $\partial$ を等式 (2.2) および $\partial(t) = 1$ で定義可能である. その $\partial$ は次の条件で一意に特徴付けられる:

$$\partial(V_i(z)) = \hbar^{-1}[H, V_i(z)] + V_i(z)_t = W_i(z)V_i(z) - V_i(z)W_{i+1}(z) \qquad (i \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

[9] $v_i$ は時間変数 $t$ を陽に含んでいるので $v_{i,t}$ の項が必要になる. 一般に従属変数 $x$ が時間変数を陽に含んでいる場合の Heisenberg 方程式は $\dot{x} = \hbar^{-1}[H, x] + x_t$ の形になる.

## 2.4 $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子モノドロミー保存系との比較

$n = 2g+1$ は 3 以上の奇数と仮定したので, $u_i$ から $g_i$ への次の変数変換は可逆である:

$$g_i = u_i + u_{i+1} \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_n^{\mathrm{qpdc}} \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

逆変換は次で与えらえる:

$$u_i = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k g_{i+k} = \frac{1}{2}(g_i - g_{i+1} + \cdots - g_{i+n-2} + g_{i+n-1}) \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

定義 2.8 における $u_i$ の基本関係式は $g_i$ の次の関係式と同値である:

$$[g_i, g_j] = \begin{cases} \mp\hbar & (j \equiv i \pm 1 \mod n), \\ 0 & (j \not\equiv i \pm 1 \mod n). \end{cases}$$

同様に $f_i$ を次のように定める:

$$f_i = v_i + v_{i+1} \in \mathcal{A}[t] \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

この $f_i$ は第 1.4 節 の $f_i$ と同じ関係式を満たしており, 次が成立している:

$$f_i = \begin{cases} g_i + \kappa t & (i \equiv 0 \mod n), \\ g_i & (i \not\equiv 0 \mod n). \end{cases}$$

**定義 2.24 ($\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子モノドロミー保存系の $L$-operator)** $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子モノドロミー保存系の $L$-operator $L(z)$ を次のように定める:

$$L(z) = \Lambda^2 + f\Lambda + \varepsilon.$$

ここで

$$\begin{aligned} &\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \\ &f = \mathrm{diag}(f_1, \dots, f_n) = \mathrm{diag}(g_1, \dots, g_{n-1}, g_n + \kappa t), \\ &\Lambda = E_{12} + \cdots + E_{n-1,n} + zE_{n1} \quad (E_{ij} \text{ は行列単位}). \quad \square \end{aligned}$$

**定義 2.25 ($\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子モノドロミー保存系の Hamiltonian)** $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子モノドロミー保存系の Hamiltonian $H'$ を次のように定める:

$$H' = \left(\frac{1}{g+2}\,\mathrm{tr}\big(L(z)^{g+2}\big) \text{ における } z \text{ の係数}\right). \quad \square$$

**定理 2.26 (二つの系の比較)** $n = 2g+1$ が 3 以上の奇数であるとき, サイズ $n$ の periodic quantum dressing chain の Hamiltonian $H$ と $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子モノドロミー保存系の Hamiltonian $H'$ は $\mathcal{A}[t] = \mathcal{A}_n^{\mathrm{qpdc}}[t]$ の中心元の差を除いて等しい. より正確に言えば次が成立している:

$$H' = H + 2\left(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n + \frac{g}{g+2}\hbar\right)\sum_{i=1}^{n} v_i.$$

よって, サイズ $n$ の quasi-periodic quantum dressing chain と $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子モノドロミー保存系は本質的に等しい. $\square$

この定理と補題 2.21 を合わせると次が導かれる.

**系 2.27** 次の公式が成立している:

$$\hbar^{-1}[H', f_i] + f_{i,t} = \left(\sum_{k=1}^{g} f_{i+2k}\right) f_i - f_i \left(\sum_{k=1}^{g} f_{i+2k-1}\right) - \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

**証明.** 定理 2.26 と補題 1.22 より,

$$\begin{aligned}\hbar^{-1}[H', f_i] + f_{i,t} &= \hbar^{-1}[H, f_i] + f_{i,t}\\ &= \hbar^{-1}[H, v_i] + v_{i,t} + \hbar^{-1}[H, v_{i+1}] + v_{i+1,t}\\ &= v_{i+n}^2 - v_{i+1}^2 - \varepsilon_{i+n} + \varepsilon_{i+1} + \kappa\\ &= v_i^2 - v_{i+1}^2 - \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}.\end{aligned}$$

さらに $v_i$, $v_{i+1}$ を $f_j$ たちで表わす式を代入して整理すれば求める結果が得られる. □

一般に $n$ 次正方行列 $A$ に対して $A^{[k]}$ を

$$A^{[k]} := \Lambda^k A \Lambda^{-k}$$

と定める. $A^{[k]}$ は $A$ の成分を左上に $k$ だけ巡回的にずらして得られる行列になる.

**定義 2.28 ($\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子モノドロミー保存系の $B$-matrix)** $L(z)^{g+1}$ の中の principal gradation で degree が $n$ 以上の部分を $B(z)\Lambda^n$ と書くと, $B(z)$ は次のように表わされる:

$$B(z) = \Lambda + \sum_{k=0}^{g} f^{[2k]} = \Lambda + (f + f^{[2]} + \cdots + f^{[2g]}).$$

この $B(z)$ を $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ に付随する量子モノドロミー保存系の $B$-matrix と呼ぶ. □

系 2.27 から次の結果がただちに得られる.

**系 2.29** 次の公式が成立している:

$$\hbar^{-1}[H', L(z)] = [B(z), L(z)], \qquad L(z)_t = \kappa z \partial_z(B(z)).$$

よって特に次の公式が成立している:

$$\hbar^{-1}[H', L(z)] + L(z)_t = [B(z), L(z)] + \kappa z \partial_z(B(z)).$$

ここで $\partial_z = \partial/\partial z$ である.

**証明.** $f_{i,t} = \kappa\delta_{i,n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ より $L(z)_t = \kappa z E_{n1}$ であり, $\kappa z \partial_z(B(z)) = \kappa z E_{n1}$ なので $L(z)_t = \kappa z \partial_z(B(z))$ であるから, 最後の等式を示せばよい.

$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1 + \kappa$ に注意しながら上の系を用いてその左辺を計算すると,

$$\begin{aligned}\hbar^{-1}[H', L(z)] + L(z)_t &= (\hbar^{-1}[H', f] + f_t)\Lambda\\ &= \left\{\left(\sum_{k=1}^{g} f^{[2k]}\right) f - f \left(\sum_{k=1}^{g} f^{[2k-1]}\right) - \varepsilon + \varepsilon^{[1]} + \kappa E_{nn}\right\}\Lambda.\end{aligned}$$

右辺を公式 $[A\Lambda^k, B\Lambda^l] = (AB^{[k]} - BA^{[l]})\Lambda^{k+l}$ を用いて直接計算すると,

$$\begin{aligned}
[B(z), L(z)] + \kappa z\partial_z(B(z)) &= \left[\Lambda + \sum_{k=0}^{g} f^{[2k]}, \Lambda^2 + f\Lambda + \varepsilon\right] + \kappa z E_{n1} \\
&= (f^{[1]} - f)\Lambda^2 + \left(\sum_{k=0}^{g} f^{[2k]} - \sum_{k=0}^{g} f^{[2(k+1)]}\right)\Lambda^2 \\
&\quad + \left\{\left(\sum_{k=0}^{g} f^{[2k]}\right) f - f\left(\sum_{k=0}^{g} f^{[2k+1]}\right)\right\}\Lambda + (\varepsilon^{[1]} - \varepsilon)\Lambda + \kappa E_{nn}\Lambda.
\end{aligned}$$

$f^{[2g+1]} = f$ を用いて最後の式を整理すれば余計な項がキャンセルして, 左辺に一致することがわかる. □

**注意 2.30** 以上の結果より, 系 2.23 の $\partial$ は次を満たしていることがわかる:

$$\partial(L(z)) = [B(z), L(z)] + \kappa z\partial_z(B(z))$$

この Lax 方程式は形式的に次の線形微分方程式系の両立条件に等しい:

$$\kappa z\partial_z(Y(z)) = L(z)Y(z), \qquad \partial(Y(z)) = B(z)Y(z).$$

よって $L(z)$, $B(z)$ に関する上の Lax 方程式はモノドロミー保存系の量子化であると考えられる. Hamiltonian $H'$ は陽に時間変数 $t$ を含んでいるのでそれに付随する量子系は non-autonomous である. これは古典的なモノドロミー保存系の場合と同様である. □

# 3　$A$ 型の拡大 affine Weyl 群作用