差分 Schlesinger 方程式と拡大 affine Weyl 群作用

黒木 玄

最終更新: 2003 年 11 月 4 日 15:50 (作成: 2003 年 9 月 24 日)

目 次

Notation

添字の i と虚数単位を区別するために, 虚数単位を $\imath$ と書くことにする.

1 はじめに

複素射影直線上の確定特異点型接続のモノドロミー保存変形の理論の量子化と差分化に関しては表 1.1 が基本的である.

	古典力学	量子力学
微分	Schlesinger 方程式	Knizhnik-Zamolodchikov 方程式
差分	差分 Schlesinger 方程式	差分 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式

表 1.1: Schlesinger-Knizhnik-Zamolodchikov 方程式たち

差分 Schlesinger 方程式は Borodin [4] によって導入された (第 2 節で簡単に紹介する).

差分 Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) 方程式は I. B. Frenskel と Reshetikhin が導入した ([7]). ただしそれは q 差分版である. q 差分 KZ 方程式とただの差分 KZ 方程式の違いは方程式の基本的構成要素である量子 R-matrix が trigonometric か rational かの違いに対応している. 表 1.1 は rational R-matrix に付随する世界に関する表であると考えられる. もちろん楕円 R-matrix に付随する楕円差分 KZ 方程式を考えることもできる.

一般に KZ 型の方程式は古典 r-matrix または量子 R-matrix が与えられれば考えることができる (たとえば教科書 [5] を参照せよ). Knizhnik-Zamolodchikov 自身が立てた方程式は rational r-matrix に対応している.

楕円差分 Schlesinger 方程式については (私が知る限り) まだ十分な研究がなされていないと思われる. しかし, Odesskii [17] はすでに楕円差分 Schlesinger 方程式を構成するために必要な行列係数楕円多項式の因数分解に関する結果を得ている.

q 差分 Schlesinger 方程式については Borodin が [4] で「次の論文に書く」と言っているが, その論文はまだ発表されていないようだ. q 差分 Schlesinger 方程式の構成に必要な「行列係数三角多項式の因数分解」に関する結果もまだ知られていないと思われる.

差分 Schlesinger 方程式と差分 KZ 方程式の関係も十分に解明されたとは言えない. 特に解のレベルでの古典極限 (KZ $\to$ Schlesinger) がどのようになっているかはまだわかっていない.

基本的な表 1.1 のように理解されるべき項目の一つに Kajiwara-Noumi-Yamada [10] による「互いに可換な 2 つの拡大 affine Weyl 群の作用」がある.

おそらく, 2 つの作用の片方は差分 Schlesinger 方程式の類似物として理解可能である. その理由を第 5.1 節, 第 5.2 節で簡単に説明する. 「互いに可換な 2 つの拡大 affine Weyl 群の作用」の半分の量子化は差分 KZ 方程式の類似物として構成されることになるだろう.

もう片方の作用は野海 [15] で解説されている方法と同じやり方で構成される. そちらの量子化も重要な問題である.

2 Borodin による差分 Schlesinger 方程式の構成

Borodin [4] は以下のような方針で差分 Schlesinger 方程式を導入した:

1. G. D. Birkhoff [1], [2] の仕事を引用して, 線形常差分方程式 $Y(z+1) = M(z+1)Y(z)$ の接続行列 $P(z)$ を導入し, 線形常差分方程式のモノドロミー保存変換を定義する. ここで $M(z)$ は generic な $m \times m$ 行列係数の n 次多項式である.

2. Jimbo-Miwa [8] の方法を用いて, $\det M(z) = 0$ の根を整数だけシフトする線形常差分方程式の Schlesinger 変換を構成する.
3. $M(z)$ が $M(z) = A(z - X_1)\cdots(z - X_n)$ と表わされているとき, 各 X_k ごとにその m 個の固有値を同じだけシフトさせる特別な Schlesinger 変換を構成する.
4. そのような特殊な Schlesinger 変換の微分極限は確定特異点型線形常微分方程式のモノドロミー保存変形方程式すなわち Schlesinger 方程式とみなせることを示す.

以下ではこの方針に沿って Borodin の仕事 [4] の一部を紹介することにする. (ただし 4 の詳細については原論文を参照してもらうことにして省略する.)

2.1 線形常差分方程式に関する接続問題

$m \times m$ 行列値函数 $Y(z)$ に関する線形常差分方程式

$$Y(z+1) = M(z)Y(z), \qquad M(z) = A(z^n + M_1 z^{n-1} + \cdots + M_{n-1}z + M_n). \tag{2.1}$$

について考える. ここで $M_1, \ldots, M_n$ は $m \times m$ 複素行列であり, A は対角成分がどれも 0 でないような対角行列である[1]:

$$A = \mathrm{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_m), \qquad \rho_i \in \mathbb{C}^\times.$$

あとで $\rho_i^z = e^{z \log \rho_i}$ という函数を考えるので $\arg \rho_i$ を任意に固定し $\log \rho_i$ の値を一意に定めておく[2]. 上の $M(z)$ に対して定数 $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{C}$ を次のように定める:

$$d_i := M_{1;ii} + \frac{n}{2} \qquad (M_{1;ii} \text{ は } M_1 \text{ の第 } (i,i) \text{ 成分}). \tag{2.2}$$

定理 2.1 (Borodin [4] Propositions 1.1) $\rho_1, \ldots, \rho_m$ が互いに異なるとき, 線形常差分方程式 (2.1) の次の形の形式解 $Y^f(z)$ が一意に存在する:

$$Y^f(z) = z^{nz} e^{-nz}(1 + Y_1^f z^{-1} + Y_2^f z^{-2} + \cdots)\,\mathrm{diag}(\rho_1^z z^{d_1}, \ldots, \rho_m^z z^{d_m}).$$

ここで各 Y_k^f は $m \times m$ 行列である[3]. □

定理 2.2 (Birkhoff [1] Theorems III, IV) $\rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R}$ $(i \neq j)$ であると仮定する.
このとき以下が成立する:

1. 線形常差分方程式 (2.1) の解 $Y^\pm(z)$ で以下の条件を満たすものが一意に存在する:
   (a) $Y^-(z)$ (resp. $Y^+(z)$) は $\mathrm{Re}\, z \ll 0$ (resp. $\mathrm{Re}\, z \gg 0$) で正則である.
   (b) $Y^-(z)$ (resp. $Y^+(z)$) は $\mathrm{Re}\, z \ll 0$ (resp. $\mathrm{Re}\, z \gg 0$) において定理 2.1 の形式解 $Y^f(z)$ に漸近展開される.

---

[1] ここで A は始めから対角行列であるとしてあるが, 対角化可能性とどの固有値もゼロでないと仮定すれば十分である.

[2] $\log \rho = \log |\rho| + \imath \arg \rho$.

[3] Borodin [4] Proposition 1.2 によれば, $A = 1$ でかつ $M_1 = \mathrm{diag}(r_1, \ldots, r_m)$, $r_i \neq r_j$ $(i \neq j)$ の場合にもこの定理と同様の結果が成立する.

2. このとき
$$P(z) = [p_{ij}(z)]_{i,j=1}^{m} := Y^{+}(z)^{-1}Y^{-}(z)$$
と置くと, $p_{ij}(z)$ は次の形をしている:
$$p_{ii}(z) = 1 + c_{ii}^{(1)} e^{2\pi\imath z} + \cdots + c_{ii}^{(n-1)} e^{2\pi\imath(n-1)z} + e^{2\pi\imath d_i} e^{2\pi\imath nz},$$
$$p_{ij}(z) = e^{2\pi\imath\lambda_{ij} z}\left(c_{ij}^{(0)} + c_{ij}^{(1)} e^{2\pi\imath z} + \cdots + c_{ij}^{(n-1)} e^{2\pi\imath(n-1)z}\right) \qquad (i \neq j).$$
ここで, $c_{ij}^{(k)}$ はある定数であり, λ_{ij} は $(\arg\rho_i - \arg\rho_j)/(2\pi)$ より大きい[4]最小の整数である. d_i, $c_{ij}^{(k)}$ を線形常差分方程式 (2.1) の**特性定数 (characteristic constants)** と呼び, $P(z)$ を線形常差分方程式 (2.1) の**接続行列 (connection matrix)** と呼ぶことにする. □

注意 2.3 $Y^{\pm}(z)$ が線形常差分方程式 (2.1) の解であることより,
$$Y^{-}(z) = M(z-1)\cdots M(z-k)Y^{-}(z-k),$$
$$Y^{+}(z) = M(z)^{-1}\cdots M(z+k-1)^{-1}Y^{+}(z+k)$$
が成立する. (a) より十分大きな k を取ることによって, $Y^{-}(z)$ は複素平面全体で正則であり, $Y^{+}(z)$ の極は高々 $M(z+j)^{-1}$ $(j \in \mathbb{Z}_{\leq 0})$ の極から来るものに限ることがわかる. 条件 (b) より, $Y^{+}(z)$ は $\mathrm{Re}\, z \gg 0$ で $GL_m(\mathbb{C})$ に値を持つ正則函数になり,
$$Y^{+}(z)^{-1} = Y^{+}(z+k)^{-1}M(z+k-1)\cdots M(z)$$
であるから, $Y^{+}(z)^{-1}$ は複素平面全体で正則である. したがって, $P(z) = Y^{+}(z)^{-1}Y^{-}(z)$ は複素平面全体で正則になる. $Y^{\pm}(z)$ が共に線形常差分方程式 (2.1) の解であることより, $P(z+1) = P(z)$ であることもすぐにわかる. 上の定理はさらに強く $P(z)$ の形が制限されることを主張している. □

特性定数 d_i, $c_{ij}^{(k)}$ もしくは接続行列 $P(z)$ が線形常差分方程式 (2.1) に対するモノドロミー・データの類似物である.

定義 2.4 線形常差分方程式 (2.1) の**モノドロミー保存変換 (monodromy preserving transformation)** とは接続行列 $P(z)$ を保つような $M(z)$ の変換のことである. □

d_i を整数だけシフトしても接続行列 $P(z)$ は不変であるので, モノドロミー保存変換は, 特性定数の $c_{ij}^{(k)}$ を不変に保つが, d_i の方は整数だけシフトする可能性がある. d_i の定義式 (2.2) より, d_i を整数だけシフトすることは $M_{1;ii}$ を整数だけシフトするのと同じことである.

一般に与えられた線形常差分方程式に対して接続行列を計算することはおそろしく難しい. 最も簡単でかつ基本的な Gamma 函数の例を示しておこう.

[4] $i \neq j$ のとき, $\rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R}$ と仮定しているので, $(\arg\rho_i - \arg\rho_j)/(2\pi)$ が整数になることはない.

2.2　例: Gamma 函数の漸近展開

複素数値函数 $Y(z)$ に関する線形常差分方程式 $Y(z+1) = zY(z)$ は Gamma 函数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-z-1}\,dt = \frac{1}{1-e^{2\pi\imath z}} \int_C e^{-w} w^{-z-1}\,dw$$

を解に持つ. ここで, C は図 2.1 のような積分経路である. C に沿って動く積分変数 w は正の実軸方向の無限遠から出発して時計と同じ向きに原点のまわりを回転してから正の実軸方向の無限遠に帰る. そのとき $\arg w$ は -2π から 0 までを動く.

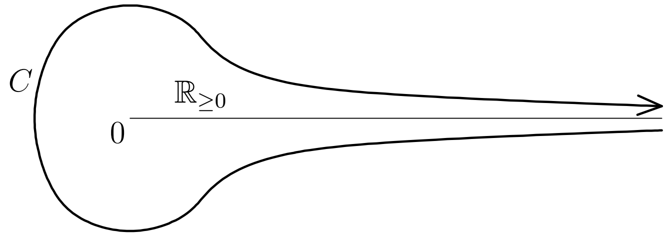

図 2.1: 積分経路 C

Gamma 函数の前者の積分表示は $\operatorname{Re} z > 0$ で収束し, 後者の積分は任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する. 前者の積分表示より $\Gamma(z)$ は $\operatorname{Re} z > 0$ で正則であり, 後者の積分表示より $(1-e^{2\pi\imath z})\Gamma(z)$ は複素平面全体で正則であることがわかる. $\Gamma(z)$ が $\operatorname{Re} z > 0$ で正則でかつ $\Gamma(z) = z^{-1}(z+1)^{-1}\cdots(z+k-1)^{-1}\Gamma(z+k)$ であるより $\Gamma(z)$ の極はすべて単純で $z = 0, -1, -2, \dots$ の上にのみあり, $z = -k$ での留数が $(-1)^k k!$ に等しいこともわかる.

$\Gamma(z)$ および $(1-e^{2\pi\imath z})\Gamma(z)$ は $z \to \infty$ で次のように漸近展開される:

$$\Gamma(z) \simeq \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12} z^{-1} + \frac{1}{288} z^{-2} + \cdots\right) \quad (-\pi < \arg z < \pi),$$
$$(1-e^{2\pi\imath z})\Gamma(z) \simeq \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12} z^{-1} + \frac{1}{288} z^{-2} + \cdots\right) \quad (0 < \arg z < 2\pi).$$

$\Gamma(z)$ 自身は $\arg z$ の範囲の違いによって異なる漸近展開を持つことに注意せよ. 定理 2.2 の記号のもとで,

$$Y^+(z) = \Gamma(z)/\sqrt{2\pi}, \qquad Y^-(z) = (1-e^{2\pi\imath z})\Gamma(z)/\sqrt{2\pi},$$
$$P(z) = Y^-(z)/Y^+(z) = 1 - e^{2\pi\imath z}.$$

最急降下法 (method of steepest descents) もしくは鞍部点法 (saddle point method) などを用いた Gamma 函数の漸近展開に関しては Bleistein-Handelsman [3] Section 2.2, Example 5.1.1, Section 7.4 もしくは西本 [14] 第 7 章第 7.2 節などを参照せよ. 漸近展開の係数の数値に関しては岩波数学公式 III [13] p.5 などを参照せよ.

より一般に, 複素数値函数に関する有理函数係数の線形常差分方程式

$$Y(z+1) = \rho \frac{(z-a_1)\cdots(z-a_m)}{(z-b_1)\cdots(z-b_n)} Y(z)$$

は次の函数を解に持つ:

$$f(z) = \rho^z \frac{\Gamma(z-a_1)\cdots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\cdots\Gamma(z-b_n)}.$$

このように複素数値函数に関する有理函数係数の線形常微分方程式の理論では Gamma 函数が基本的な役目を果たす.

2.3 線形常差分方程式に関する Riemann-Hilbert 問題

定理 2.2 の状況に戻ろう. 接続行列 $P(z)$ は nm^2 個の特性定数 d_i, $c_{ij}^{(k)}$ を含み, $A = \mathrm{diag}(\rho_1,\ldots,\rho_m)$ を固定すれば $M(z)$ も nm^2 個の任意定数 $M_{1;ij},\ldots,M_{n;ij}$ を含む. よって, 写像

$$(M_1,\ldots,M_n) \mapsto \bigl(\{d_i\},\{c_{ij}^{(k)}\}\bigr)$$

もしくは写像

$$(M_1,\ldots,M_n) \mapsto P(z)$$

がどの程度単射もしくは全射であるかという問題は自然である.

全射性については次が成立している.

定理 2.5 (Birkhoff [2] §17) $\rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R}$ $(i \neq j)$ であると仮定する.
そのとき, 写像 $(M_1,\ldots,M_n) \mapsto P(z)$ は全射である. すなわち, 任意に定数の組 d_i, $c_{ij}^{(k)}$ が与えられたとき, d_i を適当に整数だけシフトすれば, ある $m\times m$ 行列の組 $(M_1,\ldots,M_n)$ で線形常差分方程式 (2.1) の特性定数が d_i, $c_{ij}^{(k)}$ に一致するものが存在する. □

どの程度単射でないか, すなわち, モノドロミー保存変換がどのような形をしているかについては次の結果がある.

定理 2.6 (Birkhoff [1] Theorem VII) $\rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R}$ $(i \neq j)$ であると仮定する.
$M_k(z)$ $(k=1,2)$ は最高次の係数がともに $A = \mathrm{diag}(\rho_1,\ldots,\rho_m)$ であるような $m\times m$ 行列係数の n 次多項式であるとする. 線形常差分方程式 $Y_k(z+1) = M_k(z)Y_k(z)$ $(k=1,2)$ の特性定数は一致していると仮定する. このとき, ある $m\times m$ 行列値有理函数 $U(z) \in GL_m(\mathbb{C}(z))$ で

$$M_2(z) = U(z+1)M_1(z)U(z)^{-1}, \quad Y_2^{\pm}(z) = U(z)Y_1^{\pm}(z),$$

を満たすものが存在する. □

一般に任意の $U(z) \in GL_m(\mathbb{C}(z))$ に対して,

$$\tilde{M}(z) := U(z+1)M(z)U(z)^{-1}$$

を $M(z)$ の $U(z)$ による**ゲージ変換**と呼ぶ. $Y(z)$ が (2.1) の解であることと, $\tilde{Y}(z) = U(z)Y(z)$ が $\tilde{Y}(z+1) = \tilde{M}(z)\tilde{Y}(z)$ の解であることは同値である. ただし, $M(z)$ は z について多項式であったが, そのゲージ変換 $\tilde{M}(z)$ も多項式になるとは限らない. 次の定理は容易に示される.

定理 2.7 (モノドロミー保存変換の構成法) $\rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R}$ $(i \neq j)$ であると仮定する．
$U(z) \in GL_m(\mathbb{C}(z))$ による $M(z)$ のゲージ変換

$$\tilde{M}(z) = U(z+1)M(z)U(z)^{-1}$$

が z の多項式になると仮定する．このとき, 線形常差分方程式 (2.1) とそのゲージ変換

$$\tilde{Y}(z+1) = \tilde{M}(z)\tilde{Y}(z)$$

のあいだに次の関係が存在する:

$$\tilde{Y}^f(z) = U(z)Y^f(z), \qquad \tilde{Y}^{\pm}(z) = U(z)Y^{\pm}(z), \qquad \tilde{P}(z) = P(z).$$

特に $M(z) \mapsto \tilde{M}(z) = U(z+1)M(z)U(z)^{-1}$ は線形常差分方程式 (2.1) のモノドロミー保存変換である．□

注意 2.8 (スペクトル保存変換とモノドロミー保存変換の違い) $U(z) \in GL_m(\mathbb{C}(z))$ による $M(z) \mapsto U(z)M(z)U(z)^{-1}$ という変換は $M(z)$ のスペクトル保存変換である．この変換と線形常差分方程式 (2.1) のゲージ変換の違いに注意せよ．この違いはちょうど「可解格子模型における互いに可換な転送行列」と「差分 KZ 方程式[5]における互いに可換な Hamiltonians」の違いに対応している．差分 KZ 方程式の Hamiltonians の構成には「転送行列には現われないスペクトル・パラメーターのシフト」が必要である．そのシフトの存在は線形常差分方程式のゲージ変換の量子化という考え方をすればよく理解できる．□

2.4　線形常差分方程式の Schlesinger 変換

Borodin [4] は Jimbo-Miwa [8] の方法を用いて微分極限で複素射影直線上の確定特異点型接続の Schlesinger 変換になっているような線形常差分方程式 (2.1) モノドロミー保存変換を構成した．

$a_1, \dots, a_{mn} \in \mathbb{C}$, $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}(a_1, \dots, a_{mn}, d_1, \dots, d_m)\\ &\quad := \{\, (M_1, \dots, M_n) \in M_m(\mathbb{C}) \mid a_k \text{ たちは } \det M(z) \text{ の根全体で } d_i = M_{1;ii} + n/2\}\end{aligned}$$

と置く．ここで $M(z)$ は次のように定義されていたのであった:

$$M(z) = A(z^n + M_1 z^2 + \cdots + M_{n-1}z + M_n), \qquad A = \operatorname{diag}(\rho_1, \dots, \rho_m), \quad \rho_i \neq 0.$$

定理 2.9 (Borodin [4] Theorem 2.1) $\rho_i/\rho_j \notin \mathbb{R}$ $(i \neq j)$ および $a_k - a_l \notin \mathbb{Z}$ $(k \neq l)$ を仮定する．このとき

$$\sum_{k=1}^{mn} \kappa_k + \sum_{i=1}^{m} \delta_i = 0$$

[5]たとえば I. B. Frenkel-Reshetikhin [7] の q 差分 KZ 方程式．このノートでは q 差分 KZ 方程式を含む KZ 方程式の差分化全般を差分 KZ 方程式と呼ぶ場合がある．

を満たす任意の $\kappa_1, \dots, \kappa_{mn} \in \mathbb{Z}$, $\delta_1, \dots, \delta_m \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_{mn}, d_1, \dots, d_m)$ のある Zariski 開集合 $\mathcal{A}$ が存在して, 任意の $(M_1, \dots, M_n) \in \mathcal{A}$ に対して

$$\tilde{M}(z) := U(z+1)M(z)U(z)^{-1} = A(z^n + \tilde{M}_1 z^2 + \cdots + \tilde{M}_{n-1} z + \tilde{M}_n), \tag{2.3}$$

$$(\tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_n) \in \mathcal{M}(a_1 + \kappa_1, \dots, a_{mn} + \kappa_{mn}, d_1 + \delta_1, \dots, d_m + \delta_m) \tag{2.4}$$

満たす $U(z) \in GL_m(\mathbb{C}(z))$ が一意に存在する．この $U(z)$ は線形常差分方程式 (2.1) のモノドロミー保存変換を与える．対応 $(M_1, \dots, M_n) \mapsto (\tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_n)$ は代数多様体間の双有理写像である．この双有理写像を**線形常差分方程式 (2.1) の Schlesinger 変換**と呼ぶことにする． □

この定理の証明と elementary な場合[6]における $U(z)$ の具体形については Borodin の論文 [4] を参照せよ．Borodin は上の定理の変換が微分極限で複素射影直線上の確定特異点型接続の Schlesinger 変換に移ることも示している ([4] Theorem 5.3).

注意 2.10 (R 行列と Schlesinger 変換の関係) Manojlović-Samtleben [12] は楕円曲線上の捻られた確定特異点型接続の elementary Schlesinger 変換が Belavin の量子 R 行列と Belavin-Drinfeld の古典 r 行列を用いて表わされることを示している．その結果の rational limit も成立している．その結果の差分版も成立していると思われる． □

2.5 差分 Schlesinger 方程式

$M(z)$ は次のように表わされていると仮定する[7]:

$$M(z) = A(z - X_1) \cdots (z - X_n).$$

ここで $X_1, \dots, X_n \in M_m(\mathbb{C})$ であり, $A = \mathrm{diag}(\rho_1, \dots, \rho_m)$, $\rho_i \neq 0$ である．X_k の固有値全体の集合を

$$\mathrm{Sp}(X_k) = \{\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,m}\}$$

と表わすことにする．$M(z)$ が上のように表わされているとき,

$$\det M(z) = \rho_1 \cdots \rho_m \det(z - X_1) \cdots \det(z - X_n)$$

であるから, $\det M(z)$ の根全体の集合と $\bigcup_{k=1}^n \mathrm{Sp}(X_k)$ は一致する．よって, 定理 2.9 で構成された線形常差分方程式 (2.1) の Schlesinger 変換は $\lambda_{k,i}$, d_i たちをそれぞれ整数 $\kappa_{k,i}$, δ_i でシフトする変換であるとみなせる．(ただし $\kappa_{k,i}, \delta_i \in \mathbb{Z}$ は $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \kappa_{k,i} + \sum_{i=1}^m \delta_i = 0$ を満たしていなければいけない.)

Borodin はそのような変換全体[8]から

$$\kappa_{k,i} = -s_k \in \mathbb{Z} \qquad (X_k \text{ の固有値を } s_k \text{ だけ減らす}),$$

$$\delta_i = \delta := \sum_{k=1}^n s_k \qquad (\text{すべての } d_i \text{ を } \delta \text{ だけ増やす})$$

[6] κ_k, δ_i の中に ± 1 であるものが一つずつ存在して他が 0 である場合のこと.

[7] M_k から X_k への変数変換は Miura 変換に似ている.

[8] 線形常差分方程式 (2.1) の Schlesinger 変換の全体は $\mathbb{Z}^{m(n+1)-1}$ に同型な Abel 群をなす.

の場合だけを抜き出し, それらで生成される離散的時間発展を**差分 Schlesinger 方程式 (difference Schlesinger equation)** と呼んだ ([4] Section 3). すなわち, 差分 Schlesinger 方程式とは上の場合に対応する Schlesinger 変換で構成された $\mathbb{Z}^n$ と同型な Abel 群の有理作用のことである.

定理 2.11 (Borodin [4] Proposition 4.4) 定理 2.9 の仮定のもとで, 各 $k = 1, \ldots, n$ に対して

$$\kappa_{l,i} = -\delta_{l,k}, \qquad \delta_i = 1.$$

に対応する線形常差分方程式 (2.1) の Schlesinger 変換を T_k と書くことにする. すなわち T_k は X_k の固有値を 1 減らし, 他の X_l $(l \neq k)$ の固有値を変えずに, すべての d_i を 1 増やす Schlesinger 変換である. T_k は $M_m(\mathbb{C})^n = \{(X_1, \ldots, X_n)\}$ に双有理写像として作用している. T_k による $(X_1, \ldots, X_n)$ の像を

$$T_k(X_1, \ldots, X_n) = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$$

と書くことにする. このとき, $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ は次の条件によって一意に特徴付けられる:

$$\begin{aligned}
&(z+1-X_k)(z+1-X_{k+1})\cdots(z+1-X_n)A(z-X_1)\cdots(z-X_{k-1}) \\
&\qquad = (z+1-\tilde{X}_{k+1})\cdots(z+1-\tilde{X}_n)A(z-\tilde{X}_1)\cdots(z-\tilde{X}_{k-1})(z-\tilde{X}_k),
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Sp}(X_l) - \delta_{l,k} = \mathrm{Sp}(\tilde{X}_l) \qquad (l = 1, \ldots, n).$$

以下, この条件で特徴付けられた $(X_1, \ldots, X_n)$ の互いに可換な離散時間発展 $T_1, \ldots, T_n$ が定める非線形偏差分方程式系を**差分 Schlesinger 方程式**と呼ぶことにする. □

2.6　微分極限について

線形常差分方程式 (2.1) の微分極限の取り方について簡単に説明しよう.

まず, $\tilde{Y}(z)$ を次のように定める:

$$\tilde{Y}(z) = \frac{Y(z)}{\Gamma(z-z_1)\cdots\Gamma(z-z_n)}.$$

さらに, $M(z) = A(z-X_1)\cdots(z-X_n)$ における各 X_k を $X_k = z_k - B_k$ $(B_k \in M_m(\mathbb{C}))$ と置く. すなわち

$$z - X_k = z - z_k + B_k$$

と置く. このとき z_k の値をずらすことと X_k の m 個の固有値を同じ値だけずらすことに等しい. これによって差分 Schlesinger 方程式による X_k の固有値のシフトは座標 z_k のシフトと解釈されることになる.

線形常差分方程式 (2.1) と

$$\tilde{Y}(z+1) = \tilde{M}(z)\tilde{Y}(z), \qquad \tilde{M}(z) = A\left(1 + \frac{B_1}{z-z_1}\right)\cdots\left(1 + \frac{B_n}{z-z_n}\right)$$

は同値になる. さらに, $z = \varepsilon^{-1}\zeta$, $z_k = \varepsilon^{-1}\zeta_k$ を代入して得られる

$$\tilde{Y}(\varepsilon^{-1}(\zeta+\varepsilon)) = \tilde{M}(\varepsilon^{-1}\zeta)\tilde{Y}(\varepsilon^{-1}\zeta)$$

という線形常差分方程式の解の族 $\tilde{Y}(\varepsilon,\zeta)$ を考える. このときもしも $\varepsilon\to 0$ で

$$B_k=\mathcal{B}_{k,0}+o(1),\quad A=1+\varepsilon\mathcal{B}_{\infty,1}+o(\varepsilon),\quad \tilde{Y}(\varepsilon,\zeta)=\mathcal{Y}(\zeta)+o(1)$$

が成立しているならば,

$$\begin{aligned}\tilde{M}(\varepsilon^{-1}\zeta)&=(1+\varepsilon\mathcal{B}_{\infty,0}+o(\varepsilon))\left(1+\varepsilon\frac{\mathcal{B}_{1,0}}{\zeta-\zeta_1}+o(\varepsilon)\right)\cdots\left(1+\varepsilon\frac{\mathcal{B}_{n,0}}{\zeta-\zeta_n}+o(\varepsilon)\right)\\&=1+\varepsilon\left(\mathcal{B}_{\infty,1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathcal{B}_{k,0}}{\zeta-\zeta_k}\right)+o(\varepsilon),\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{d\mathcal{Y}(\zeta)}{d\zeta}=\mathcal{M}(\zeta)\mathcal{Y}(\zeta),\qquad \mathcal{M}(\zeta)=\mathcal{B}_{\infty,1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathcal{B}_{k,0}}{\zeta-\zeta_k}\tag{2.5}$$

が成立する. これが線形常差分方程式 (2.1) の一つの微分極限である.

Borodin は上の微分極限において線形常差分方程式 (2.1) の Schlesinger 変換が線形常微分方程式 (2.5) の Schlesinger 変換に移ることを示している ([4] Section 5).

実は線形常差分方程式 (2.1) の微分極限をうまく取れば任意の有理函数係数線形常微分方程式が得られる. そのような極限は上の微分極限と特異点の合流の手続きの合成によっても得られるし, 以下に説明するように直接にも得られる.

上と同様に Gamma 函数によるゲージ変換によって, 極限を取る前の線形常差分方程式は次の形をしていると考えて良い:

$$Y(\zeta+\varepsilon)=M(\zeta)Y(\zeta).$$

ここで

$$\begin{aligned}&M(\zeta)=M_\infty(\zeta)M_1(\zeta-\zeta_1)\cdots M_n(\zeta-\zeta_n),\\&M_\infty(\zeta)=1+\varepsilon(B_{\infty,1}+B_{\infty,2}\zeta+\cdots+B_{\infty,r_\infty}\zeta^{r_\infty-1}),\\&M_k(\zeta-\zeta_k)=1+\varepsilon\left(\frac{B_{k,0}}{\zeta-\zeta_k}+\frac{B_{k,1}}{(\zeta-\zeta_k)^2}+\cdots+\frac{B_{k,r_k}}{(\zeta-\zeta_k)^{r_k+1}}\right)\qquad(k=1,\dots,n).\end{aligned}$$

このときもしも $\varepsilon\to 0$ で

$$B_{k,\nu}=\mathcal{B}_{k,\nu}+o(1),\quad Y(\zeta)=\mathcal{Y}(\zeta)+o(1)$$

が成立しているならば, 上の差分方程式の $\varepsilon\to 0$ での微分極限は次の最も一般的な形の有理函数係数線形常微分方程式になる:

$$\frac{d\mathcal{Y}(\zeta)}{d\zeta}=\left[\sum_{k=1}^{r_\infty}\mathcal{B}_{\infty,k}z^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{r_k}\frac{\mathcal{B}_{k,\nu}}{(\zeta-\zeta_k)^{\nu+1}}\right]\mathcal{Y}(\zeta).$$

3　差分 Schlesinger 方程式の代数的再構成

Borodin [4] は差分 Schlesinger 方程式を第 2 節で説明した筋道で構成した．その出発点は Birkhoff による線形常差分方程式の解析学に関する論文 [1], [2] であった．

しかし, Borodin [4] の差分 Schlesinger 方程式は以下のような方針で純代数的に再構成可能である:

1. 行列係数の n 次多項式の空間に A_{n-1} 型の Weyl 群 $W(A_{n-1}) = S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ の作用を構成する．
2. その作用を拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)}) = \langle \omega, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle = S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$ に拡張する．
3. 差分 Schlesinger 方程式を拡大 affine Weyl 群の中の lattice $\mathbb{Z}^n$ の作用で定義する．

この節ではこの方針で差分 Schlesinger 方程式を再構成することにする．

n 個の $m \times m$ 行列の組 $(X_1, \dots, X_n)$ の組全体のなす空間を考える:

$$M_m(\mathbb{C})^n = \{\, (X_1, \dots, X_n) \mid X_1, \dots, X_n \in M_m(\mathbb{C}) \,\}.$$

$(X_1, \dots, X_n) \in M_m(\mathbb{C})^n$ に対して $M(z)$ を次のように定める:

$$M(z) = A(z - X_1) \cdots (z - X_n).$$

ここで A は可逆な $m \times m$ 行列である．以下, A は固定し, $(X_1, \dots, X_n) \in M_m(\mathbb{C})^n$ のみを動かす[9]．n は格子模型におけるサイトの個数に対応しており, $z - X_k$ は各サイトにおける local L-operator に対応している．

3.1　置換群の作用

次の定理の証明はたとえば Odesskii [17] Section 3 にある．Borodin [4] Lemma 4.3 も参照せよ．

定理 3.1 任意の置換 $\sigma \in S_n$ と generic な $(X_1, \dots, X_n) \in M_m(\mathbb{C})^n$ に対して,

$$\begin{aligned} &(z - X_1) \cdots (z - X_n) = (z - \tilde{X}_1) \cdots (z - \tilde{X}_n) \\ &\det(z - X_k) = \det(z - \tilde{X}_{\sigma(k)}) \qquad (k = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

を満たす $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ が一意に存在する．しかも対応

$$\sigma : (X_1, \dots, X_n) \mapsto (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$$

は置換群 S_n の $M_m(\mathbb{C})^n = \{(X_1, \dots, X_n)\}$ への有理作用を定める．□

Odesskii はこの定理の楕円函数類似も証明している ([17] Section 4)．三角函数類似についてはまだ十分にわかっていないように思われる．

注意 3.2 定理 3.1 で構成された S_n の $M_m(\mathbb{C})^n$ への有理作用に関する注意:

[9] 第 2 節では A は対角行列であると仮定したが, この節では A は可逆な行列であれば何でもよい．

1. S_n の $M_m(\mathbb{C})^n$ への有理作用は $M(z) = A(z - X_1)\cdots(z - X_n)$ を保つ.
2. S_n の $M_m(\mathbb{C})^n$ への有理作用の定義は $M(z) = A(z-X_1)\cdots(z-X_n)$ の最高次の係数 A は無関係である. しかし, 次の項で説明するように拡大 affine Weyl 群の作用を定めるときには A の存在が意味を持つ[10]. $\square$

S_n の有理作用の具体形を知るためには互換 $s_k = (k, k+1)$ $(k = 1, \dots, n-1)$ の作用の具体形を知れば十分である.

命題 3.3 (Odesskii [17] Proposition 2) X, Y が generic な $m \times m$ 行列であるとき, X, Y の有理式で表わされる $m \times m$ 行列 Ω で

$$Y\Omega - \Omega X = 1$$

を満たすものが一意に存在して[11], 可逆になる. このとき,

$$\begin{aligned}
\tilde{Y} &:= \Omega^{-1} Y \Omega = \Omega^{-1}(\Omega X + 1) = X + \Omega^{-1}, \\
\tilde{X} &:= \Omega X \Omega^{-1} = (Y\Omega - 1)\Omega^{-1} = Y - \Omega^{-1}
\end{aligned}$$

は $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ に関する次の方程式の一意的な解である:

$$\begin{aligned}
&(z - X)(z - Y) = (z - \tilde{Y})(z - \tilde{X}), \\
&\det(z - X) = \det(z - \tilde{X}), \\
&\det(z - Y) = \det(z - \tilde{Y}). \quad \square
\end{aligned}$$

注意 3.4 (Borodin [4] Remark 3.12) 行列のサイズが $m = 2$ ならば命題 3.3 の $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ は次のように表わされる:

$$\begin{aligned}
\tilde{Y} &= (X + Y - \operatorname{trace} Y) Y (X + Y - \operatorname{trace} Y)^{-1}, \\
\tilde{X} &= (X + Y - \operatorname{trace} X) X (X + Y - \operatorname{trace} X)^{-1}.
\end{aligned}$$

実際,

$$\Omega' := X + Y - \operatorname{trace} X, \qquad \Omega'' := X + Y - \operatorname{trace} Y$$

と置くと, 2×2 行列 $X, Y, X + Y$ に関する Cayley-Hamilton の公式より,

$$Y\Omega' - \Omega' X = \det X - \det Y, \qquad \Omega'\Omega'' = (\operatorname{trace} X)(\operatorname{trace} Y) - \det(X + Y)$$

であることがわかる. よって, 命題 3.3 の Ω とその逆行列は次のように表わされる:

$$\Omega = \frac{1}{\det X - \det Y}\Omega', \qquad \Omega^{-1} = \frac{\det X - \det Y}{(\operatorname{trace} X)(\operatorname{trace} Y) - \det(X + Y)}\Omega''. \quad \square$$

[10] もちろん $A = 1$ の場合を考えても良い.
[11] 方程式 $Y\Omega - \Omega X = 1$ は Ω に関する非斉次線形方程式なのでその解 Ω は X, Y の有理式で表わされる.

3.2 拡大 affine Weyl 群の作用

A_n 型の拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ とは生成元

$$\omega, \quad s_k \quad (k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

と次の基本関係式によって定義される離散群のことである[12]:

$$\omega s_k \omega^{-1} = s_{k+1}, \quad s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1}, \quad s_k s_l = s_l s_k \ (k \neq l \pm 1), \quad s_k^2 = 1.$$

ここで $\omega^n = 1$ という条件を仮定して**いない**ことに注意せよ. あとで導入されるパラメーター $q \in \mathbb{C}^\times$ が 1 の場合にのみ $\omega^n = 1$ が成立する.

$s_1, \dots, s_{n-1}$ から生成される $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の部分群は置換群 S_n と自然に同型になる.

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ を次のように定める[13]:

$$\Gamma_k := s_{k-1} \cdots s_2 s_1 \omega s_{n-1} \cdots s_{k+1} s_k \qquad (k = 1, \dots, n).$$

たとえば

- $n = 2$ のとき $\Gamma_1 = \omega s_1$, $\Gamma_2 = s_1 \omega$;
- $n = 3$ のとき $\Gamma_1 = \omega s_2 s_1$, $\Gamma_2 = s_1 \omega s_2$, $\Gamma_3 = s_2 s_1 \omega$;
- $n = 4$ のとき $\Gamma_1 = \omega s_3 s_2 s_1$, $\Gamma_2 = s_1 \omega s_3 s_2$, $\Gamma_3 = s_2 s_1 \omega s_3$, $\Gamma_4 = s_3 s_2 s_1 \omega$.

このとき, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ から生成される $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の部分群は $\mathbb{Z}^n$ に同型になり,

$$\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)}) = S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$$

が成立している[14].

---

[12]基本関係式から $s_k^2 = 1$ を除いてできる群は Artin 群もしくは braid 群と呼ばれる. Weyl 群を扱っている場合であっても, 関係式 $s_k^2 = 1$ を $s_k^4 = 1$ に弱めて定義された群必要になることが多い (たとえば置換群 S_n の $SL_n(\mathbb{C})$ への持ち上げ).

[13]Artin 群 (braid 群) の場合には Γ_k を次のように定義する:

$$\Gamma_k := s_{k-1} \cdots s_2 s_1 \omega s_{n-1}^{-1} \cdots s_{k+1}^{-1} s_k^{-1} \qquad (k = 1, \dots, n).$$

Weyl 群においては $s_k^{-1} = s_k$ であるが, Artin 群ではそうではないことに注意せよ. Γ_k たちは互いに可換であり,

$$\Gamma_1 \cdots \Gamma_n = \omega^n$$

を満たしている. このノートでは $\omega^n = 1$ という条件を仮定していないので $\Gamma_1 \cdots \Gamma_n = 1$ となるとは限らないことに注意せよ.

[14]$\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)}) = S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$ は $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ の合同変換群として次のように実現される:

$$\begin{aligned} &s_k(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{k+1}, x_k, \dots, x_n) \qquad (k = 1, \dots, n-1), \\ &\omega(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_n - 1, x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

このとき $s_0 = \omega s_{n-1} \omega^{-1} = \omega^{-1} s_1 \omega$ や Γ_k の作用は次のようになる:

$$\begin{aligned} &s_0(x_1, x_2 \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_n - 1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1 + 1), \\ &\Gamma_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k - 1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

このように Γ_k は $\mathbb{Z}^n$ による平行移動の生成元になる.

$\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の生成元として, $\omega, s_1, \dots, s_{n-1}$ が取れることに注意せよ. $\omega, s_1, \dots, s_{n-1}$ から生成され, 基本関係式

$$s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1} \ \ (1 \le k \le n-2), \quad s_k s_l = s_l s_k \ \ (k \ne l \pm 1), \quad s_k^2 = 1, \tag{3.1}$$
$$\omega s_1 \omega^{-1} = s_2,\ \omega s_2 \omega^{-1} = s_3,\ \dots,\ \omega s_{n-2} \omega^{-1} = s_{n-1}, \quad \omega s_{n-1} \omega^{-1} = \omega^{-1} s_1 \omega \tag{3.2}$$

を持つ群は自然に $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ と同型である. 実際そのとき s_k を $s_k := \omega^{k-1} s_1 (\omega^{-1})^{k-1}$ と定めると, $s_{k+n} = s_k$ および $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の基本関係式がすべて成立している.

特に前項で構成された置換群 S_n の作用を拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1}) = S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$ の作用に拡張するためには, ω の作用を構成すれば十分である.

ω の $M_m(\mathbb{C})^n = \{(X_1, \dots, X_n)\}$ への作用を次のように定める:

$$\omega : (X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) \mapsto (A^{-1} X_n A - 1, X_1, \dots, X_{n-1})$$

この定義の意味は次の等式を見れば見当がつく:

$$\begin{aligned}(z+1-X_n)&A(z-X_1)\cdots(z-X_{n-1}) \\ &= A(z-(A^{-1}X_n A - 1))(z-X_1)\cdots(z-X_{n-1}).\end{aligned}$$

この ω の作用と前項で定めた $s_1, \dots, s_{n-1} \in S_n$ の作用は関係式 (3.2) を満たしていることが容易に確かめられる. これより, $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の $M_m(\mathbb{C})^n = \{(X_1, \dots, X_n)\}$ への有理作用が定まる.

注意 3.5 ω の $M_m(\mathbb{C})^n = \{(X_1, \dots, X_n)\}$ への作用は $M(z) = A(z-X_1)\cdots(z-X_n)$ の $U(z) = z - X_n$ によるゲージ変換を誘導する. 実際, $U(z) = z - X_n$ のとき

$$U(z+1)M(z)U(z)^{-1} = (z+1-X_n)A(z-X_1)\cdots(z-X_{n-1}). \quad \square$$

注意 3.6 任意の $\varepsilon \in \mathbb{C}$ に対して ω の $M_m(\mathbb{C})^n = \{(X_1, \dots, X_n)\}$ への作用を

$$\omega : (X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) \mapsto (A^{-1} X_n A - \varepsilon, X_1, \dots, X_{n-1})$$

と定めても, (3.2) が成立している. この作用のもとで

$$\omega(M(z)) = (z+\varepsilon-X_n)A(z-X_1)\cdots(z-X_{n-1}).$$

もしも $\varepsilon = 0$ ならば $\omega(M(z)) = (z-X_n)M(z)(z-X_n)^{-1}$ なので $\det(w - M(z))$ は $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の有理作用の保存量になる. $\varepsilon \ne 0$ ならば $M(z)$ のスペクトルは保存されない. しかし $M(z)$ のモノドロミー (より正確に言えば線形常差分方程式 $Y(z+\varepsilon) = M(z)Y(z)$ の接続行列) は保存される. このように差分 KZ 方程式の Hamiltonians の定義にも登場するスペクトル・パラメーターの ε によるシフトは線形常差分方程式のゲージ変換の視点から自然に解釈可能である. $\square$

より一般に ω の作用は次の命題を用いて構成可能である.

命題 3.7 ω の $M_m(\mathbb{C})^n = \{(X_1, \dots, X_n)\}$ への作用を可逆な写像 $f : M_m(\mathbb{C}) \to M_m(\mathbb{C})$ を用いて次のように定める:

$$\omega : (X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) \mapsto (f(X_n), X_1, \dots, X_{n-1}).$$

もしも f が次の形をしていれば (3.2) の関係式がすべて成立している:

$$f(X) = aA^{-1}XA + b, \qquad a \in \mathbb{C}^\times, \quad b \in \mathbb{C}, \quad A \in GL_m(\mathbb{C}).$$

証明. $k=1,\dots,n-2$ に対して $\omega s_k\omega^{-1}=s_{k+1}$ であることの証明. $k=1,\dots,n-2$ のとき $(X_1,\dots,X_n)$ に ω^{-1}, s_k, ω を順番に作用させると,

$$
\begin{aligned}
&(X_1,X_2\dots,X_{k+1},X_{k+2},\dots,X_n)\xrightarrow{\omega^{-1}}(X_2,\dots,X_{k+1},X_{k+2},\dots,X_n,f^{-1}(X_1))\\
&\xrightarrow{s_k}(X_2,\dots,\tilde{X}_{k+2},\tilde{X}_{k+1},\dots,X_n,f^{-1}(X_1))\xrightarrow{\omega}(X_1,X_2,\dots,\tilde{X}_{k+2},\tilde{X}_{k+1},\dots,X_n).
\end{aligned}
$$

よって $k=1,\dots,n-2$ のとき $\omega s_k\omega^{-1}=s_{k+1}$ である.

$\omega s_{n-1}\omega^{-1}=\omega^{-1}s_1\omega$ の証明. $f(X)=aA^{-1}XA+b$ は

- $(z-f(X))(z-Y)=(z-f(Y'))(z-X')$
  $\iff (z-X)(z-f^{-1}(Y))=(z-Y')(z-f^{-1}(X'))$.
- $\det(z-f(X))=\det(z-X') \iff \det(z-X)=\det(z-f^{-1}(X'))$.

を満たしている[15]. よって, 次の (a), (b) は互いに同値である:

(a) $(z-f(X_n))(z-X_1)=(z-f(X_1'))(z-X_n')$ かつ
$\det(z-f(X_n))=\det(z-X_n')$ かつ $\det(z-X_1)=\det(z-f(X_1'))$.

(b) $(z-X_n)(z-f^{-1}(X_1))=(z-X_1')(z-f^{-1}(X_n'))$ かつ
$\det(z-X_n)=\det(z-f^{-1}(X_n'))$ かつ $\det(z-f^{-1}(X_1))=\det(z-X_1')$.

この同値な 2 つの条件によって X_1', X_n' を定める. そのとき, $(X_1,\dots,X_n)$ に ω^{-1}, s_{n-1}, ω を順番に作用させると, (b) より

$$
\begin{aligned}
&(X_1,X_2,\dots,X_{n-1},X_n)\xrightarrow{\omega^{-1}}(X_2,\dots,X_{n-1},X_n,f^{-1}(X_1))\\
&\xrightarrow{s_{n-1}}(X_2,\dots,X_{n-1},X_1',f^{-1}(X_n'))\xrightarrow{\omega}(X_n',X_2,\dots,X_{n-1},X_1').
\end{aligned}
$$

同様に $(X_1,\dots,X_n)$ に ω, s_1, ω^{-1} を順番に作用させると, (a) より

$$
\begin{aligned}
&(X_1,X_2,\dots,X_{n-1},X_n)\xrightarrow{\omega}(f(X_n),X_1,X_2,\dots,X_{n-1})\\
&\xrightarrow{s_1}(f(X_1'),X_n',X_2,\dots,X_{n-1})\xrightarrow{\omega^{-1}}(X_n',X_2,\dots,X_{n-1},X_1').
\end{aligned}
$$

以上によって $\omega s_{n-1}\omega^{-1}=\omega^{-1}s_1\omega$ であることがわかった. □

注意 3.8 (q 差分 Schlesinger 方程式の作り方) Borodin [4] の差分 Schlesinger 方程式の場合は $f(X)=A^{-1}XA-1$ である.

q 差分 Schlesinger 方程式を構成したければ

$$f(X)=q^{-1}A^{-1}XA,\qquad q\in\mathbb{C}^\times,\quad A\in GL_m(\mathbb{C})$$

の場合を考えればよい. そのとき $f(X)$ の固有値は X の固有値の q^{-1} 倍になる. この f に対応する ω の $M_m(\mathbb{C})^n=\{(X_1,\dots,X_n)\}$ への作用は線形常 q 差分方程式

$$Y(qz)=M(z)Y(z),\qquad M(z)=A(z-X_1)\cdots(z-X_n)$$

の $U(z)=z^{-1}(z-X_n)=1-z^{-1}X_n$ によるゲージ変換を誘導する. 実際, その $U(z)$ による線形常 q 差分方程式のゲージ変換は次のようになる:

$$
\begin{aligned}
U(qz)M(z)U(z)^{-1}&=(z-q^{-1}X_n)A(z-X_1)\cdots(z-X_{n-1})\\
&=A(z-q^{-1}A^{-1}X_nA)(z-X_1)\cdots(z-X_{n-1})\\
&=A(z-f(X_n))(z-X_1)\cdots(z-X_{n-1}).\quad \square
\end{aligned}
$$

[15] $f(X)=aX, A^{-1}XA, X+b$ の場合を確かめれば十分である.

3.3 拡大 affine Weyl 群の格子部分の作用

拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)}) = S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$ の中の lattice $\mathbb{Z}^n$ の生成元 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ の作用が定める互いに可換な離散的時間発展は Borodin が構成した差分 Schlesinger 方程式に一致する. 実際, $\Gamma_k = s_{k-1} \cdots s_2 s_1 \omega s_{n-1} \cdots s_{k+1} s_k$ の作用

$$\Gamma_k : (X_1, \dots, X_n) \mapsto (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$$

は以下の条件で一意に特徴付けられる:

$$\begin{aligned}
&(z+1-X_k)(z+1-X_{k+1}) \cdots (z+1-X_n) A (z-X_1) \cdots (z-X_{k-1}) \\
&\qquad = (z+1-\tilde{X}_{k+1}) \cdots (z+1-\tilde{X}_n) A (z-\tilde{X}_1) \cdots (z-\tilde{X}_{k-1})(z-\tilde{X}_k), \\
&\det(z+\delta_{l,k}-X_l) = \det(z-\tilde{X}_l) \qquad (l=1,\dots,n).
\end{aligned}$$

すなわち Γ_k の作用は定理 2.11 の T_k の作用に一致している. これで Borodin の差分 Schlesinger 方程式の代数的再構成が完了した.

Γ_k の作用の上の特徴付けは次の等式を用いればただちに得られる:

$$\Gamma_k = s_{k-1} \cdots s_2 s_1 \omega s_{n-1} \cdots s_{k+1} s_k = (\omega^{-1})^{n-k} s_{n-1} \cdots s_{n-k+1} s_{n-k} \cdots s_1 \omega^{n-k+1}.$$

この等式より, $f(X) = A^{-1}XA - 1$ と置くと, Γ_k の $(X_1, \dots, X_n)$ への作用は以下のように表わされる:

$$\begin{aligned}
&(X_1, \dots, X_{k-1}, X_k, X_{k-1}, \dots, X_n) \\
\xrightarrow{\omega^{n-k+1}}\ &(f(X_k), f(X_{k+1}), \dots, f(X_n), X_1, \dots, X_{k-1}) \\
\xrightarrow{s_{n-k}\cdots s_1}\ &(f(\tilde{X}_{k+1}), \dots, f(\tilde{X}_n), f(X'_k), X_1, \dots, X_{k-1}) \\
\xrightarrow{s_{n-1}\cdots s_{n-k+1}}\ &(f(\tilde{X}_{k+1}), \dots, f(\tilde{X}_n), \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{k-1}, \tilde{X}_k) \\
\xrightarrow{(\omega^{-1})^{n-k}}\ &(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{k-1}, \tilde{X}_k, \tilde{X}_{k+1}, \dots, \tilde{X}_n).
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\det(z-f(X_k)) = \det(z-f(X'_k)) = \det(z-\tilde{X}_k), \\
&\det(z-X_l) = \det(z-\tilde{X}_l) \qquad (l \neq k).
\end{aligned}$$

4 差分 KZ 方程式との類似

Borodin の差分 Schlesinger 方程式と量子 R-matrix (Borodin のケースに対応するのは rational R-matrix) を構成要素とする差分 KZ 方程式の類似性は明らかである.

量子 R-matrix によるテンソル積の交換によって A_{n-1} 型の Artin 群 (braid 群) の作用が定義され, ω の作用が差分 Schlesinger 方程式の場合と同じように定義され (スペクトル・パラメーター z のシフトが必要になる点が重要), それによって A_{n-1} 型の拡大 affine Artin 群 (拡大 affine braid 群) の作用が定義される. 拡大 affine Artin 群の中の lattice の作用が差分 KZ 方程式になる.

ただし, 差分 KZ 方程式は量子力学の運動方程式なので二種類の定式化がある. 通常, Schrödinger 方程式の方を差分 KZ 方程式と呼ぶが, Heisenberg 方程式の方を差分 KZ 方程式と呼んでも良い.

差分 KZ 方程式に関しては q 差分の場合に関する論文 [7] と教科書 [5] を参照せよ.

いずれにせよ, 差分 KZ 方程式の構成が Borodin の差分 Schlesinger 方程式の構成の量子化になっていることは間違いないと思われる.

やるべき仕事はこの明確な類似性に注意しながら, q 差分 (三角差分) や楕円差分の場合を含めて, その世界がどうなっているかをよく調べることである.

5 互いに可換な 2 つの拡大 affine Weyl 群の作用

以上で述べて来た世界の一部分として理解されるべき重要な項目の一つに Kajiwara-Noumi-Yamada [10] による「互いに可換な 2 つの拡大 affine Weyl 群の作用」がある.

Kajiwara-Noumi-Yamada でも「互いに可換な 2 つの拡大 affine Weyl 群の作用」の片方はこのノートの第 3 節で解説した方法と本質的に同じやり方によって構成されており, もう片方は野海 [15] で解説されている方法と本質的に同じやり方で構成されている.

以下では前者の拡大 affine Weyl 群作用を**横作用**と呼び, 後者の作用を**縦作用**と呼ぶことにする. これら 2 つの作用はどのように量子化されるべきなのであろうか?

まず最初に Kajiwara-Noumi-Yamada [10] Section 3 における横作用の構成を復習しよう[16]. このノートの第 3 節の構成と Kajiwara-Noumi-Yamada の構成の違いは次の 2 点である:

1. 前者においては $z - X_k$ (X_k は generic な $m \times m$ 行列) が基本的構成要素であったが, 後者の Kajiwara-Noumi-Yamada においては $\Lambda(z) + X_k$ が基本的構成要素である. ここで,

$$\Lambda(z) = \sum_{i=1}^{m-1} E_{i,i+1} + zE_{m,1}, \qquad X_k = \mathrm{diag}(x_{k;1}, \dots, x_{k;m}).$$

2. 前者は差分の場合を扱っているが, 後者の Kajiwara-Noumi-Yamada は q 差分の場合を扱っている.

まず, この 2 つの違いがどれほどであるかについて考えよう.

実はこの 2 つの違いは本質的なものではない. 実際, Kajiwara-Noumi-Yamada [10] Section 3 の議論はこのノートの第 3 節とほとんど同じように進むことを示そう.

5.1 置換群の横作用

これ以後, n 個の m 次対角行列の組 $(X_1, \dots, X_n)$ 全体の空間を $\mathcal{X}$ と書くことにする:

$$\mathcal{X} := \{\, (X_1, \dots, X_n) \mid X_k = \mathrm{diag}(x_{k;1}, \dots, x_{k;m}) \,\}.$$

$\mathcal{X}$ への置換群 S_n の有理作用を次の定理によって定めることができる.

[16] Noumi-Yamada [16] Section 4.2 の参照せよ.

定理 5.1 任意の置換 $\sigma \in S_n$ と generic な $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{X}$ に対して,

$$\begin{aligned}(\Lambda(z)+X_1)\cdots(\Lambda(z)+X_n) &= (\Lambda(z)+\tilde{X}_1)\cdots(\Lambda(z)+\tilde{X}_n),\\ \det(\Lambda(z)+X_k) &= \det(\Lambda(z)+\tilde{X}_{\sigma(k)}) \qquad (k=1,\dots,n)\end{aligned}$$

を満たす[17] $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) \in \mathcal{X}$ が一意に存在し,

$$\sigma : (X_1, \dots, X_n) \mapsto (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$$

は置換群 S_n の $\mathcal{X} = \{(X_1, \dots, X_n)\}$ への有理作用を定める. □

有理作用の具体形は次の命題によって計算可能になる.

命題 5.2 $X = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_m)$, $Y = \operatorname{diag}(y_1, \dots, y_m)$ が generic な m 次対角行列であるとき, X, Y の有理式で表わされる m 次対角行列 $H = \operatorname{diag}(h_1, \dots, h_m)$ で

$$YH - H'X = 1$$

を満たすものが一意に存在して, 可逆になる. ここで H' は次のように定めた:

$$H' := \Lambda(z)H\Lambda(z)^{-1} = \operatorname{diag}(h_2, \dots, h_m, h_1).$$

このとき, 2 つの対角行列

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &:= H'^{-1}YH = H'^{-1}(H'X+1) = X + H'^{-1},\\ \tilde{X} &:= H'XH^{-1} = (YH-1)H^{-1} = Y - H^{-1}\end{aligned}$$

は $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ に関する次の方程式の一意的な解である:

$$\begin{aligned}&(\Lambda(z)+X)(\Lambda(z)+Y) = (\Lambda(z)+\tilde{Y})(\Lambda(z)+\tilde{X}),\\ &\det X = \det\tilde{X}, \qquad \det Y = \det\tilde{Y}.\end{aligned}$$

証明. H の存在を仮定して $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ が満たすべき条件を満たしていることをまず示そう. $\det X = \det\tilde{X}$ および $\det Y = \det\tilde{Y}$ が成立することは

$$\tilde{Y} = H'^{-1}YH = \Lambda(z)H^{-1}\Lambda(z)^{-1}YH, \qquad \tilde{X} = H'XH^{-1} = \Lambda(z)H\Lambda(z)XH^{-1}$$

よりただちに導かれる. $(\Lambda(z)+X)(\Lambda(z)+Y) = (\Lambda(z)+\tilde{Y})(\Lambda(z)+\tilde{X})$ を示すために左辺と右辺を別々に計算しよう:

$$\begin{aligned}(\Lambda(z)+X)(\Lambda(z)+Y) &= \Lambda(z)^2 + (X+\Lambda(z)Y\Lambda(z)^{-1})\Lambda(z) + XY,\\ (\Lambda(z)+\tilde{Y})(\Lambda(z)+\tilde{X}) &= (\Lambda(z)+X+\Lambda(z)H^{-1}\Lambda(z)^{-1})(\Lambda(z)+Y-H^{-1})\\ &= \Lambda(z)^2 + A\Lambda(z) + B.\end{aligned}$$

ただし A, B は次のように計算される:

$$\begin{aligned}A &= X + \Lambda(z)H^{-1}\Lambda(z)^{-1} + \Lambda(z)Y\Lambda(z)^{-1} - \Lambda(z)H^{-1}\Lambda(z)^{-1} = X + \Lambda(z)Y\Lambda(z)^{-1},\\ B &= XY - XH^{-1} + \Lambda(z)H^{-1}\Lambda(z)^{-1}Y - \Lambda(z)H^{-1}\Lambda(z)^{-1}H^{-1}.\end{aligned}$$

---

[17] $X_k = \operatorname{diag}(x_{k;1}, \dots, x_{k;m})$ に対して $\det(\Lambda(z)+X_k) = (-1)^{m-1}z + x_{k;1}\cdots x_{k;m} = (-1)^{m-1}z + \det X_k$. よって $\det(\Lambda(z)+X_k) = \det(\Lambda(z)+\tilde{X}_{\sigma(k)})$ と $\det X_k = \det\tilde{X}_{\sigma(k)}$ は同値である.

よって $B = XY$ と $\Lambda(z)H^{-1}\Lambda(z)^{-1}Y - XH^{-1} = \Lambda(z)H^{-1}\Lambda(z)^{-1}H^{-1}$ は同値であり, その条件は $YH - \Lambda(z)H\Lambda(z)^{-1}X = 1$ すなわち $YH - H'X = 1$ と同値である. これでもしも H が存在すれば $\tilde{X}, \tilde{Y}$ が満たすべき条件を満たしていることが示された.

次に generic な X, Y に対して H に関する方程式 $YH - H'X = 1$ が一意的に解けることを示そう. 目標の方程式は h_i に関する次の一次方程式と同値である:

$$\begin{bmatrix} y_1 & -x_1 & & \\ & y_2 & \ddots & \\ & & \ddots & -x_{m-1} \\ -x_m & & & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

左辺の係数行列を Z と書くことにすると,

$$\det Z = y_1 \cdots y_m - x_1 \cdots x_m = \det Y - \det X$$

であるから, h_i に関する上の一次方程式は $\det X \neq \det Y$ のとき一意的に解ける.

最後に解 h_i の具体的表示を求めよう. Z の余因子を計算すれば Z の逆行列が次のように表わされることがわかる[18]:

$$Z^{-1} = \frac{1}{\det Z} \begin{bmatrix} y_2 \cdots y_m & x_1 y_3 \cdots y_m & x_1 x_2 y_4 \cdots y_m & \cdots & x_1 \cdots x_{m-1} \\ x_2 \cdots x_m & y_3 \cdots y_m y_1 & x_2 y_4 \cdots y_m y_1 & \cdots & x_2 \cdots x_{m-1} y_1 \\ x_3 \cdots x_m y_2 & x_3 \cdots x_m x_1 & y_4 \cdots y_m y_1 y_2 & \cdots & x_3 \cdots x_{m-1} y_1 y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m y_2 \cdots y_{m-1} & x_m x_1 y_3 \cdots y_{m-1} & x_m x_1 x_2 y_4 \cdots y_{m-1} & \cdots & y_1 \cdots y_{m-1} \end{bmatrix}.$$

したがって $q_i := (\det Z) h_i$ と置くと,

$$\begin{aligned} q_1 &= y_2 \cdots y_m + x_1 y_3 \cdots y_m + x_1 x_2 y_4 \cdots y_m + \cdots + x_1 \cdots x_{m-1}, \\ q_2 &= y_3 \cdots y_m y_1 + x_2 y_4 \cdots y_m y_1 + \cdots + x_2 \cdots x_{m-1} y_1 + x_2 \cdots x_m, \\ q_3 &= y_4 \cdots y_m y_1 y_2 + \cdots + x_3 \cdots x_{m-1} y_1 y_2 + x_3 \cdots x_m y_2 + x_3 \cdots x_m x_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_m &= y_1 \cdots y_{m-1} + x_m y_2 \cdots y_{m-1} + x_m x_1 y_3 \cdots y_{m-1} + \cdots + x_m x_1 \cdots x_{m-2}. \end{aligned}$$

すなわち

$$x_{i+m} = x_i, \qquad y_{i+m} = y_i$$

という条件によって添字の動く範囲を $\mathbb{Z}$ に拡張すると,

$$q_i = (\det Z) h_i = \sum_{j=1}^{m} \overbrace{x_i \cdots x_{i+j-2}}^{j-1} \overbrace{y_{i+j} \cdots y_{i+m-1}}^{m-j}.$$

特に generic な X, Y に対して H は可逆である. □

注意 5.3 上の証明より

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \operatorname{diag}(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m) = H'^{-1} Y H = X + H'^{-1}, \\ \tilde{X} &= \operatorname{diag}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) = H' X H^{-1} = Y - H^{-1} \end{aligned}$$

[18] $n = 2, 3, 4$ の場合に計算すると感じがつかめる.

の成分は次のように表わされる:

$$\tilde{y}_i = y_i \frac{q_i}{q_{i+1}} = x_i + \frac{1}{h_{i+1}}, \qquad \tilde{x}_i = x_i \frac{q_{i+1}}{q_i} = y_i - \frac{1}{h_i},$$

ここで q_i, h_i は次のように定義される:

$$q_i = (y_1 \cdots y_m - x_1 \cdots x_m) h_i = \sum_{j=1}^{m} \overbrace{x_i \cdots x_{i+j-2}}^{j-1} \overbrace{y_{i+j} \cdots y_{i+m-1}}^{m-j}.$$

m を超える添字に関して $x_{i+m} = x_i$, $y_{i+m} = y_i$ を用いることに注意せよ. □

例 5.4 $m = 2$ のとき次の公式が成立している:

$$\tilde{y}_1 = y_1 \frac{y_2 + x_1}{y_1 + x_2}, \quad \tilde{y}_2 = y_2 \frac{y_1 + x_2}{y_2 + x_1}, \quad \tilde{x}_1 = x_1 \frac{y_1 + x_2}{y_2 + x_1}, \quad \tilde{x}_2 = x_2 \frac{y_2 + x_1}{y_1 + x_2}. \quad \square$$

例 5.5 $m = 3$ のとき次の公式が成立している:

$$\tilde{y}_1 = y_1 \frac{y_2 y_3 + x_1 y_3 + x_1 x_2}{y_3 y_1 + x_2 y_1 + x_2 x_3}, \text{ etc.,} \quad \tilde{x}_1 = x_1 \frac{y_3 y_1 + x_2 y_1 + x_2 x_3}{y_2 y_3 + x_1 y_3 + x_1 x_2}, \text{ etc.} \quad \square$$

例 5.6 $m = 4$ のとき次の公式が成立している:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= y_1 \frac{y_2 y_3 y_4 + x_1 y_3 y_4 + x_1 x_2 y_4 + x_1 x_2 x_3}{y_3 y_4 y_1 + x_2 y_4 y_1 + x_2 x_3 y_1 + x_2 x_3 x_4}, \text{ etc.,} \\ \tilde{x}_1 &= x_1 \frac{y_3 y_4 y_1 + x_2 y_4 y_1 + x_2 x_3 y_1 + x_2 x_3 x_4}{y_2 y_3 y_4 + x_1 y_3 y_4 + x_1 x_2 y_4 + x_1 x_2 x_3}, \text{ etc.} \quad \square \end{aligned}$$

5.2 拡大 affine Weyl 群の横作用

n 個の対角行列の組のなす空間 $\mathcal{X} = \{(X_1, \ldots, X_n)\}$ への拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)}) = \langle \omega, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle = S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$ の有理作用を定めるためには, すでに S_n の作用が構成されているので ω の作用を与えれば十分である.

注意 3.8 を参考にして, ω の $\mathcal{X}$ への作用を次のように定める:

$$\omega(X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n) := (q^{-1} X_n, X_1, \ldots, X_{n-1}).$$

このとき (3.2) の関係式がすべて成立している. よって, 拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の $\mathcal{X}$ への有理作用が定義された.

注意 5.7 (モノドロミー保存変換との関係) もしも上の定義が正しい ω の作用を与えているとすれば適切な線形常 q 差分方程式のゲージ変換を与えるはずである.

定理 2.2 の線形常 q 差分方程式における類似の結果がどの程度一般に成立し, どの程度明確に証明されているかは, はっきりしていないように思われる. しかし, 定理 2.7 の線形常 q 差分方程式における類似は成立していると考えて良いだろう. したがって, ω の作用は単にゲージ変換を与えているだけではなく, 実際には線形常 q 差分方程式のモノドロミー保存変換を与えているはずである.

今扱っている対象は “principal gradation” と相性が良いので, m 次元縦ベクトル値函数 $F(z)$ に作用する適切な q 差分作用素として次を採用しなければいけない:

$$q^{d_P}F(z) = q^{H_P}F(q^m z).$$

ただし行列 H_P と作用素 d_P, q^{d_P} を次のように定義した[19]:

$$\begin{aligned}
H_P &= \frac{1}{2}\operatorname{diag}(m-1, m-3, \dots, -m+3, -m+1) = \frac{m+1}{2} - \operatorname{diag}(1, 2, \dots, m), \\
d_P &= mz\frac{\partial}{\partial z} + H_P, \\
q^{d_P} &= q^{H_P}q^{mz\frac{\partial}{\partial z}} \\
&= \operatorname{diag}(q^{\frac{m-1}{2}}, q^{\frac{m-3}{2}}, \dots, q^{\frac{-m+3}{2}}, q^{\frac{-m+1}{2}}) \times (z \text{ に } q^m z \text{ を代入する作用素}) \\
&= q^{\frac{m+1}{2}}\operatorname{diag}(q^{-1}, q^{-2}, \dots, q^{-m}) \times (z \text{ に } q^m z \text{ を代入する作用素}).
\end{aligned}$$

d_P による affine sl_m の固有分解は principal gradation を与える.

線形常 q 差分方程式 $q^{d_P}Y(z) = M(z)Y(z)$ を考える. ここで $M(z) \in M_m(\mathbb{C}(z))$ である. このとき $U(z) \in GL_m(\mathbb{C}(z))$ に対して

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(z) &= U(z)Y(z), \\
\tilde{M}(z) &= q^{d_P}U(z)q^{-d_P}M(z)U(z)^{-1} = q^{H_P}U(q^m z)q^{-H_P}M(z)U(z)^{-1}
\end{aligned}$$

と置くと, $q^{d_P}Y(z) = M(z)Y(z)$ と $q^{d_P}\tilde{Y}(z) = \tilde{M}(z)\tilde{Y}(z)$ は同値になる. $M(z)$ を $\tilde{M}(z)$ にうつす変換

$$\mathcal{G}_{U(z)}M(z) := q^{d_P}U(z)q^{-d_P}M(z)U(z)^{-1} = q^{H_P}U(q^m z)q^{-H_P}M(z)U(z)^{-1} \tag{5.1}$$

を $U(z)$ による**ゲージ変換**と呼ぶことにする. このゲージ変換の記号は縦作用の構成でも利用する.

ω の $\mathcal{X} = \{(X_1, \dots, X_n)\}$ への作用と線形常 q 差分方程式 $q^{d_P}Y(z) = M(z)Y(z)$ のゲージ変換の関係を説明するために $M(z)$ を次のように置く:

$$M(z) = (\Lambda(z) + X_1)\cdots(\Lambda(z) + X_n).$$

ω の $(X_1, \dots, X_n)$ への作用は $M(z)$ への

$$U(z) = z^{-1/m}(\Lambda(z) + X_n)$$

による上の意味でのゲージ変換を誘導する. 実際,

$$q^{d_P}(\Lambda(z) + X_n)q^{-d_P} = \operatorname{Ad}(q^{d_P})(\Lambda(z) + X_n) = q\Lambda(z) + X_n$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{z^{-1/m}(\Lambda(z)+X_n)}M(z) &= q^{-1}z^{-1/m}(q\Lambda(z) + X_n)M(z)(z^{-1/m}(\Lambda(z) + X_n))^{-1} \\
&= q^{-1}(q\Lambda(z) + X_n)(\Lambda(z) + X_1)\cdots(\Lambda(z) + X_{n-1}) \\
&= (\Lambda(z) + q^{-1}X_n)(\Lambda(z) + X_1)\cdots(\Lambda(z) + X_{n-1}). \quad \square
\end{aligned}$$

[19] H_P, d_P の P は principal gradation の頭文字である.

注意 5.8 実は適切に変数変換とゲージ変換をすると通常の線形常 q 差分方程式のゲージ変換と ω の作用を関係付けることができる．まず

$$z = w^m$$

と置く．このとき $w\frac{\partial}{\partial w} = mz\frac{\partial}{\partial z}$ であるから,

$$d_P = w\frac{\partial}{\partial w} + H_P = w^{-H_P} \circ w\frac{\partial}{\partial w} \circ w^{H_P}$$

である．よって

$$q^{d_P} = w^{-H_P} \circ q^{w\frac{\partial}{\partial w}} \circ w^{H_P}.$$

したがって

$$\mathcal{Y}(w) = w^{H_P} Y(w^m), \qquad \mathcal{M}(w) = w^{H_P} M(w^m) w^{-H_P}$$

と置くと $q^{d_P} Y(z) = M(z)Y(z)$ と

$$\mathcal{Y}(qw) = \mathcal{M}(w)\mathcal{Y}(w)$$

は同値になる．$w^{H_P}\Lambda(w^m)w^{-H_P} = w\Lambda(1)$ であるから, $M(z) = (\Lambda(z)+X_1)\cdots(\Lambda(z)+X_n)$ のとき

$$\mathcal{M}(w) = (w\Lambda(1) + X_1)\cdots(w\Lambda(1) + X_n).$$

ω の作用が $\mathcal{M}(w)$ の

$$\mathcal{U}(w) = w^{-1}(w\Lambda(1) + X_n)$$

によるゲージ変換

$$\mathcal{U}(qw)\mathcal{M}(w)\mathcal{U}(w)^{-1} = (w\Lambda(1) + q^{-1}X_n)(w\Lambda(1) + X_1)\cdots(w\Lambda(1) + X_{n-1})$$

を誘導することもわかる．z 座標では q 差分作用素として $q^{d_P} = q^{H_P} q^{mz\frac{\partial}{\partial z}}$ を考えなければいけなかったが, w 座標では通常の q 差分作用素 $q^{w\frac{\partial}{\partial w}}$ を考えるだけで十分であり, ゲージ変換の式も簡単になる．□

5.3　横作用に関するまとめ

縦作用に話に繋げるために横作用に関する結果をまとめておこう．

拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)}) = \langle \omega, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ の有理作用が定義される空間は

$$\mathcal{X} = \{\, (X_1, \ldots, X_n) \mid X_k = \operatorname{diag}(x_{k;1}, \ldots, x_{k;m}) \,\} \cong \mathbb{C}^{mn}$$

である．$x_{k;i}$ の添字の範囲を

$$x_{k;i+m} = x_{k;i}, \qquad x_{k+n;i} = qx_{k;i}$$

という条件によって $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に拡張しておく[20]．後者の条件は X_k の添字を

$$X_{k+n} = qX_k$$

[20] この条件は縦作用の構成でもそのまま仮定する．Kajiwara-Noumi-Yamada [11] では

$$x_{k;i+m} = px_{k;i}, \qquad x_{k+n;i} = qx_{k;i}$$

というより一般的な状況を考えている．しかし新たに導入したパラメーター p の意味についてはまだよくわかっていないようだ．しかし Noumi-Yamada [16] Section 4 には $q \neq 1$ かつ $p \neq 1$ の場合に関する綺麗な記述がある．

という条件によって $\mathbb{Z}$ に拡張するのと同じことである. さらに $x_{k;i}$, $x_{k+1;i}$ たちの多項式 $q_{k;i} = q_i(X_k, X_{k+1})$ を次のように定める:

$$q_{k;i} = q_i(X_k, X_{k+1}) := \sum_{j=1}^{m} \overbrace{x_{k;i} \cdots x_{k;i+j-2}}^{j-1} \overbrace{x_{k+1;i+j} \cdots x_{k+1;i+m-1}}^{m-j}.$$

以下, 対角行列 $\tilde{X}_k$ の第 i 対角成分を $\tilde{x}_{k;i}$ と書くことにする.

定理 5.9 (横作用のまとめ) $\mathcal{X}$ への $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)}) = \langle \omega, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ の有理作用を以下のように定めることができる:

- $k = 1, \ldots, n-1$ と generic な $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{X}$ に対して

  $$s_k(X_1, \ldots, X_n) = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$$

  が次の条件によって一意に定まる:

  $$\begin{aligned}
  &(\Lambda(z) + X_k)(\Lambda(z) + X_{k+1}) = (\Lambda(z) + \tilde{X}_k)(\Lambda(z) + \tilde{X}_{k+1}), \\
  &\det(\Lambda(z) + \tilde{X}_k) = (\Lambda(z) + X_{k+1}), \qquad \det(\Lambda(z) + \tilde{X}_{k+1}) = (\Lambda(z) + X_k), \\
  &\tilde{X}_l = X_l \quad (l \neq k, k+1).
  \end{aligned}$$

  具体的には $\tilde{X}_k$ の対角成分 $\tilde{x}_{k;i}$ は以下のように表わされる:

  $$\tilde{x}_{k;i} = x_{k+1;i} \frac{q_{k;i}}{q_{k;i+1}}, \qquad \tilde{x}_{k+1;i} = x_{k;i} \frac{q_{k;i+1}}{q_{k;i}}, \qquad \tilde{x}_{l;i} = x_{l;i} \quad (l \neq k, k+1).$$

  特に s_k は $\mathcal{X}$ に有理変換として作用している.

- ω の $\mathcal{X}$ への作用を次のように定める:

  $$\omega(X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n) = (X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) = (q^{-1} X_n, X_1, \ldots, X_{n-1})$$

  $\omega(X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n) = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$ と書くと

  $$\tilde{x}_{k;i} = x_{k-1;i}.$$

$s_1, \ldots, s_{n-1}$ の作用は

$$M(z) = (\Lambda(z) + X_1) \cdots (\Lambda(z) + X_n)$$

を不変に保ち, ω の作用は $M(z)$ の $U(z) = z^{-1/m}(\Lambda(z) + X_n)$ によるゲージ変換を誘導する:

$$\begin{aligned}
\omega(M(z)) = \mathcal{G}_{U(z)} M(z) &= q^{d_P} U(z) q^{-d_P} M(z) U(z)^{-1} \\
&= (\Lambda(z) + X_0) \cdots (\Lambda(z) + X_{n-1}).
\end{aligned}$$

ここで $X_0 = q^{-1} X_n$ であることに注意せよ. □

注意 5.10 (有理函数の空間への横作用) 上の定理は空間のあいだの (有理) 写像の言葉で結果を述べている．空間上の (有理) 函数体のあいだの写像の言葉で結果で述べ直すためには以下の一般的手続きにしたがえばよい．

G は集合 X に**左**から作用している群であるとし，X 上の複素数値函数のなす空間を F と書くことにする (X が代数多様体の場合は F として X の有理函数体を取る)．このとき F への G の**右**からの作用が次の式によって自然に定義される:

$$(\phi g)(x) := \phi(gx) \qquad (\phi \in F,\ g \in G,\ x \in X).$$

G の F への**左**からの作用を定めるためには g を g^{-1} に置き換えれば良い:

$$(g\phi)(x) := \phi(g^{-1}x) \qquad (\phi \in F,\ g \in G,\ x \in X).$$

すなわち ϕ への g の**左**からの作用の結果は g^{-1} の X への作用による ϕ の引き戻しに一致する．

この手続きによって $F = \mathbb{C}(\mathcal{X})$ への拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1}) = \langle \omega, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle = S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$ の横作用を書き下すと以下のようになる:

- $k = 1, \dots, n-1$ に対する互換 $s_k = (k, k+1)$ の作用は次のように表わされる:

$$s_k(x_{k;i}) = x_{k+1;i}\frac{q_{k;i}}{q_{k;i+1}}, \qquad s_k(x_{k+1;i}) = x_{k;i}\frac{q_{k;i+1}}{q_{k;i}}, \qquad s_k(x_{l;i}) = x_{l;i} \quad (l \neq k, k+1).$$

- ω の作用は次のように表わされる:

$$\omega(x_{l;i}) = x_{l+1;i}.$$

以上の公式は Kajiwara-Noumi-Yamada [10] の s_k と ρ の作用の公式に一致している[21]．このノートにおける s_k, ω, $q_{k;i}$ はそれぞれ [10] の s_k, ρ, $Q_{i-1,k}$ に対応している． □

5.4 拡大 affine Weyl 群の縦作用

前項までに A_{n-1} 型の拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) = \langle \omega, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ の n 個の m 次対角行列の組のなす空間 $\mathcal{X} = \{X = (X_1, \dots, X_n)\}$ への横作用が構成された．

この項以降は A_{m-1} 型の拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1})$ の縦作用を構成することにしよう．$\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1})$ の生成元を ϖ, r_i ($i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) と書くことにする[22]．その基本関係式は次の通り:

$$\varpi r_i \varpi^{-1} = r_{i+1}, \quad r_i r_{i+1} r_i = r_{i+1} r_i r_{i+1}, \quad r_i r_j = r_j r_i \ (i \neq j \pm 1), \quad r_i^2 = 1.$$

作用の先で $\varpi^m = 1$ を満たす $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1})$ の

$$\mathcal{X} := \{\, X = (X_1, \dots, X_n) \mid X_k = \operatorname{diag}(x_{k;1}, \dots, x_{k;m}) \,\} \cong \mathbb{C}^{mn}$$

への有理作用を次の方針にしたがって構成する:

[21] ただし，[10] では $q = 1$ の場合のみを扱っている．$q \neq 1$ の場合については [11], [16] および梶原による解説 [9] を参照せよ．

[22] ϖ は omega tilde ではなく pi である．

1. 野海 [15] の結果を用いて $M(z) = (\Lambda(z)+X_1)\cdots(\Lambda(z)+X_n)$ への r_i, ϖ の有理作用 (global な縦作用) を構成する. q 差分方程式のゲージ変換で作用を構成しなければいけないことに注意しなければいけない. ただの conjugation で良いのは $q=1$ の場合だけである.

2. その有理作用を $\mathcal{X} = \{X = (X_1,\dots,X_n)\}$ への有理作用 (local な縦作用) に持ち上げる[23].

3. さらに 2 つの拡大 affine Weyl 群の作用が互いに可換になることを示す.

5.5 拡大 affine Weyl 群の global な縦作用

この項では global な縦作用を構成しよう.

横作用における $q_{k;i}$ の縦作用における対応物 $p_{k;i} = p_{k;i}(X)$ を次のように定義する:

$$p_{k;i} = p_{k;i}(X) := \sum_{l=1}^{n} \overbrace{x_{k;i}\cdots x_{k+l-2;i}}^{l-1}\overbrace{x_{k+l;i+1}\cdots x_{k+n-1;i+1}}^{n-l}.$$

さらに $\varepsilon_{k;i} = \varepsilon_{k;i}(X)$, $\alpha_{k;i} = \alpha_{k;i}(X)$ を次のように定める:

$$\varepsilon_{k;i} = \varepsilon_{k;i}(X) := x_{k;i}x_{k+1;i}\cdots x_{k+n-1;i}, \qquad \alpha_{k;i} = \alpha_{k;i}(X) := \varepsilon_{k-1;i} - \varepsilon_{k;i+1}.$$

$x_{l+n;i} = qx_{l;i}$ より

$$p_{k+n;i} = q^{n-1}p_{k;i}, \qquad \varepsilon_{k+1;i} = q\varepsilon_{k;i}, \qquad \alpha_{k+1;i} = q\alpha_{k;i}. \tag{5.2}$$

さらに $G_{k;i} = G_{k;i}(X)$ $(i = 1,\dots,m-1)$ を次のように定める:

$$G_{k;i} = G_{k;i}(X) := 1 + \frac{\alpha_{k;i}}{p_{k;i}}E_{i+1,i}. \tag{5.3}$$

この定義において i は $1,\dots,m-1$ を動くが, k は $\mathbb{Z}$ の中を自由に動いてよい.

$\tilde{M}(z) := q^{-H_P}M(z)$ は principal gradation の意味で上三角である. 実際, $\Lambda(z)$ の grade は 1 であり, 定数を成分に持つ対角行列のそれは 0 である. 野海 [15] 第 7 章の結果を $\tilde{M}(z)$ に適用するために, $\tilde{M}(z)$ の grade-0 part の (i,i) 成分を $\tilde{\varepsilon}_i$ と表わし, $i = 1,\dots,m-1$ に対する grade-1 part の $(i,i+1)$ 成分を $\tilde{f}_i$ と表わす:

$$\tilde{\varepsilon}_i := M_{ii}(0), \qquad \tilde{f}_i := M_{i,i+1}(0).$$

ここで $\tilde{M}_{ij}(z)$ は $\tilde{M}(z)$ の (i,j) 成分である. さらに

$$\tilde{\alpha}_i = \tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_{i+1}$$

と置く. $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{f}_i$ の具体形を求めよう.

$q^{-H_P} = q^{-(m+1)/2}\,\mathrm{diag}(q,q^2,\dots,q^m)$ であり,

$$\tilde{M}(z) = X_1\cdots X_n + \left(\sum_{l=1}^{n}\overbrace{X_1\cdots X_{l-1}}^{l-1}\overbrace{X'_{l+1}\cdots X'_n}^{n-l}\right)\Lambda(z) + \cdots + \Lambda(z)^n$$

[23] この持ち上げは逆散乱法の一種になっている.

である．ここで $X'_k = \Lambda(z)X_k\Lambda(z)^{-1} = \mathrm{diag}(x_{k;2},\dots,x_{k;m},x_{k;1})$ と置いた．よって,

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_i &= q^{-\frac{m+1}{2}+i}x_{1;i}\cdots x_{n;i} = q^{-\frac{m+1}{2}+i}\varepsilon_{1;i},\\
\tilde{\alpha}_i &= q^{-\frac{m+1}{2}+i}(\varepsilon_{1;i}-q\varepsilon_{1;i+1}) = q^{-\frac{m+1}{2}+i}(\varepsilon_{1;i}-\varepsilon_{2;i+1}) = q^{-\frac{m+1}{2}+i}\alpha_{2;i},\\
\tilde{f}_i &= q^{-\frac{m+1}{2}+i}\sum_{l=1}^{n}\overbrace{x_{1;i}\cdots x_{l-1;i}}^{l-1}\overbrace{x_{l+1;i+1}\cdots x_{n;i+1}}^{n-l} = q^{-\frac{m+1}{2}+i}p_{1;i}.
\end{aligned}$$

よって, (5.2) を用いると,

$$\frac{\tilde{\alpha}_i}{\tilde{f}_i} = \frac{\alpha_{2;i}}{p_{1;i}} = \frac{\alpha_{n+1;i}}{p_{n+1;i}}.$$

これと $G_{k,i}$ の定義式 (5.3) を比較して, 野海 [15] 第 7 章の結果を適用しよう．すると, 互換 $r_i = (i,i+1)$ の有理作用を

$$G_{n+1;i} = 1 + \frac{\alpha_{n+1;i}}{p_{n+1;i}}E_{i+1,i} = 1 + \frac{\tilde{\alpha}_i}{\tilde{f}_i}E_{i+1;i}$$

による conjugation $\tilde{M}(z) \mapsto G_{n+1;i}\tilde{M}(z)G_{n+1;i}^{-1}$ で定めることによって, $\tilde{M}(z)$ への置換群 S_m の作用を構成可能であることがわかる．

この作用を $M(z)$ への作用に書き直そう．$G_{n+1;i}$ は z を含まないので $q^{H_P}G_{n+1;i}q^{-H_P} = q^{d_P}G_{n+1;i}q^{-d_P}$ である．よって

$$\begin{aligned}
G_{n+1;i}\tilde{M}(z)G_{n+1;i}^{-1} &= G_{n+1;i}q^{-H_P}M(z)G_{n+1;i}^{-1} = q^{-H_P}q^{H_P}G_{n+1;i}q^{-H_P}M(z)G_{n+1;i}^{-1}\\
&= q^{-H_P}q^{d_P}G_{n+1;i}q^{-d_P}M(z)G_{n+1;i}^{-1} = q^{-H_P}\mathcal{G}_{G_{n+1;i}}M(z).
\end{aligned}$$

すなわち $G_{n+1;i}$ の $\tilde{M}(z)$ への conjugation は $G_{n+1;i}$ による $M(z)$ のゲージ変換を誘導する．($U(z)$ による $M(z)$ のゲージ変換 $\mathcal{G}_{U(z)}M(z)$ は (5.1) で定義された.)

よって $S_m = \langle r_1,\dots,r_{m-1}\rangle$ の $M(z)$ への有理作用を

$$r_i(M(z)) := \mathcal{G}_{G_{n+1;i}}M(z) \qquad (i=1,\dots,m-1)$$

と定めることができる．次に $q^{d_P}G_{n+1;i}q^{-d_P}$ を計算しよう:

$$q^{d_P}G_{n+1;i}q^{-d_P} = 1 + q^{-1}\frac{\alpha_{n+1;i}}{p_{n+1;i}}E_{i+1,i} = 1 + \frac{\alpha_{1;i}}{p_{1;i}}E_{i+1,i} = G_{1;i}.$$

よって次が成立する:

$$r_i(M(z)) = \mathcal{G}_{G_{n+1;i}}M(z) = G_{1;i}M(z)G_{n+1;i}^{-1} \qquad (i=1,\dots,m-1).$$

この最後の表示が $\mathcal{X}$ への作用に持ち上がることになる．

さらに ϖ の $M(z)$ への作用を $z^{1/m}\Lambda(z)^{-1}$ によるゲージ変換で定義する:

$$\varpi(M(z)) := \mathcal{G}_{z^{1/m}\Lambda(z)^{-1}}M(z) = \Lambda(z)^{-1}M(z)\Lambda(z).$$

後者の等号が成立することは $z^{-1/m}\Lambda(z)$ の grade が 0 であることを使えばわかる[24]．

以上によって拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)})$ の $M(z)$ への有理作用が定まる[25]．

注意 5.11 (モノドロミー保存変換との関係) r_i と ϖ の $M(z)$ への作用はどちらもゲージ変換になっている．したがって, 注意 5.7 で注意したように拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)})$ の $M(z)$ への有理作用は線形常 q 差分方程式 $q^{d_P}Y(z) = M(z)Y(z)$ のモノドロミー保存変換を与えているはずである． □

[24] もしも $A(z)$ の grade が d ならば $[d_P, A(z)] = d\,A(z)$ であるから $q^{d_P}A(z)q^{-d_P} = q^dA(z)$ となる．特に $d=0$ ならば $q^{d_P}A(z)q^{-d_P} = A(z)$．この公式を $z^{-1/m}\Lambda(z)$ に適用する．

[25] この作用では $\varpi^m = 1$ が成立している．

5.6 拡大 affine Weyl 群の local な縦作用

前項で構成した拡大 affine Weyl 群の $M(z)$ への作用 (global な縦作用) を $\mathcal{X} = \{X = (X_1, \ldots, X_n)\}$ への作用 (local な縦作用) に持ち上げよう.

$r_1, \ldots, r_{n-1}$ の作用は次の補題を使って持ち上げる.

補題 5.12 以下の公式が成立している:

1. $x_{k;i}p_{k+1;i} - p_{k;i}x_{k+n;i+1} = \alpha_{k+1;i}$.

2. generic な $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{X}$ に対して,
$$G_{k;i}(\Lambda(z) + X_k)G_{k+1;i}^{-1} = \Lambda(z) + \tilde{X}_k. \tag{5.4}$$
ここで $\tilde{X}_k = \mathrm{diag}(\tilde{x}_{k;1}, \ldots, \tilde{x}_{k;m})$ は以下の式で定義される:
$$\tilde{x}_{k;i} = qx_{k;i+1}\frac{p_{k;i}}{p_{k+1;i}}, \tag{5.5}$$
$$\tilde{x}_{k;i+1} = q^{-1}x_{k;i}\frac{p_{k+1;i}}{p_{k;i}}, \tag{5.6}$$
$$\tilde{x}_{k;j} = x_{k;j} \qquad (j \neq i, i+1). \tag{5.7}$$

証明. 1 を証明しよう. まず, $x_{k;i}p_{k+1;i}$, $p_{k;i}x_{k+n;i+1}$ を別々に計算すると,
$$\begin{aligned}
x_{k;i}p_{k+1;i} &= x_{k;i}\sum_{l=1}^{n}\overbrace{x_{k+1;i}\cdots x_{k+l-1;i}}^{l-1}\overbrace{x_{k+l+1;i+1}\cdots x_{k+n;i+1}}^{n-l} \\
&= x_{k;i}\sum_{l=2}^{n+1}\overbrace{x_{k+1;i}\cdots x_{k+l-2;i}}^{l-2}\overbrace{x_{k+l;i+1}\cdots x_{k+n;i+1}}^{n-l+1} \\
&= \sum_{l=2}^{n+1}\overbrace{x_{k;i}\cdots x_{k+l-2;i}}^{l-1}\overbrace{x_{k+l;i+1}\cdots x_{k+n;i+1}}^{n-l+1},
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
p_{k;i}x_{k+n;i+1} &= \sum_{l=1}^{n}\overbrace{x_{k;i}\cdots x_{k+l-2;i}}^{l-1}\overbrace{x_{k+l;i+1}\cdots x_{k+n-1;i+1}}^{n-l}x_{k+n;i+1} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\overbrace{x_{k;i}\cdots x_{k+l-2;i}}^{l-1}\overbrace{x_{k+l;i+1}\cdots x_{k+n;i+1}}^{n-l+1}.
\end{aligned}$$
よって
$$\begin{aligned}
x_{k;i}p_{k+1;i} - p_{k;i}x_{k+n;i+1} &= x_{k;i}\cdots x_{k+n-1;i} - x_{k+1;i+1}\cdots x_{k+n;i+1} \\
&= \varepsilon_{k;i} - \varepsilon_{k+1;i} = \alpha_{k+1;i}.
\end{aligned}$$

次に 2 を証明しよう. $G_{k;i}(\Lambda(z) + X_k)$, $(\Lambda(z) + \tilde{X}_k)G_{k+1;i}$ を別々に計算すると,
$$\begin{aligned}
G_{k;i}(\Lambda(z) + X_k) &= \left(1 + \frac{\alpha_{k;i}}{p_{k;i}}E_{i+1,i}\right)(\Lambda(z) + X_k) \\
&= \Lambda(z) + X_k + \frac{\alpha_{k;i}}{p_{k;i}}E_{i+1,i+1} + \frac{\alpha_{k;i}}{p_{k;i}}x_{k;i}E_{i+1,i},
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
(\Lambda(z) + \tilde{X}_k)G_{k+1;i} &= (\Lambda(z) + \tilde{X}_k)\left(1 + \frac{\alpha_{k+1;i}}{p_{k+1;i}}E_{i+1,i}\right) \\
&= \Lambda(z) + \tilde{X}_k + \frac{\alpha_{k+1;i}}{p_{k+1;i}}E_{ii} + \frac{\alpha_{k+1;i}}{p_{k+1;i}}\tilde{x}_{k;i+1}E_{i+1,i}.
\end{aligned}$$

よって (5.4) が成立することと以下が成立することは同値である:

$$\frac{\alpha_{k;i}}{p_{k;i}}x_{k;i} = \frac{\alpha_{k+1;i}}{p_{k+1;i}}\tilde{x}_{k;i+1}, \tag{5.8}$$

$$x_{k;i+1} + \frac{\alpha_{k;i}}{p_{k;i}} = \tilde{x}_{k;i+1}, \tag{5.9}$$

$$x_{k;i} = \tilde{x}_{k;i} + \frac{\alpha_{k+1;i}}{p_{k+1;i}}, \tag{5.10}$$

$$x_{k;j} = \tilde{x}_{k;j} \qquad (j \neq i, i+1). \tag{5.11}$$

したがって, もしも (5.9), (5.10), (5.11) を用いて $\tilde{x}_{k;i}$ を定義したとき (5.8) も成立しているならば $\tilde{X}_k$ に関する方程式 (5.4) の解が一意に存在することがわかる. 実際 (5.8) は (5.9) と 1 の公式から導かれる. そのことを確かめるためには (5.9) を (5.8) に代入して得られる等式

$$\frac{\alpha_{k;i}}{p_{k;i}}x_{k;i} = \frac{\alpha_{k+1;i}}{p_{k+1;i}}x_{k;i+1} + \frac{\alpha_{k;i}}{p_{k;i}}\frac{\alpha_{k+1;i}}{p_{k+1;i}}$$

が 1 の公式と同値であることを確かめれば良い. この等式は, その両辺に $p_{k;i}p_{k+1;i}$ をかけ, さらに両辺を $\alpha_{k;i}$ で割り, $\alpha_{k+1;i} = q\alpha_{k;i}$ を用いると, 次と同値であることがわかる:

$$x_{k;i}p_{k+1;i} = qp_{k;i}x_{k;i+1} + \alpha_{k+1;i}.$$

$qx_{k;i} = x_{k+n;i}$ より, この等式は 1 の公式と同値である.

等式 (5.8) (および (5.9)) は (5.6) と同値である. 等式 (5.11) は (5.7) そのものである. あとは (5.10) から (5.5) が導かれることを示せばよい. 実際, 1 の公式は

$$\frac{\alpha_{k+1;i}}{p_{k+1;i}} = x_{k;i} - x_{k+n;i+1}\frac{p_{k;i}}{p_{k+1;i}} = x_{k;i} - qx_{k;i+1}\frac{p_{k;i}}{p_{k+1;i}}$$

と同値であり, これを (5.10) に代入すると (5.5) が出る. □

r_i の $\mathcal{X} = \{X = (X_1, \dots, X_n)\}$ への有理作用を補題 5.12 の記号を用いて,

$$r_i(X) = r_i(X_1, \dots, X_n) := (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) \tag{5.12}$$

によって定義する. この作用が $M(z)$ の $G_{n+1;i}$ によるゲージ変換を誘導することもすぐにわかる.

ϖ の作用は次のように定義する:

$$\varpi(X_1, \dots, X_n) = (X'_1, \dots, X'_n).$$

ここで X'_k は次のように定めた:

$$X'_k = \Lambda(z)^{-1}X_k\Lambda(z) = \mathrm{diag}(x_{k;m}, x_{k;1}, \dots, x_{k;m-1}) = \mathrm{diag}(x_{k;0}, x_{k;1}, \dots, x_{k;m-1}).$$

この作用が $M(z)$ の $z^{1/m}\Lambda(z)^{-1}$ によるゲージ変換を誘導することもすぐにわかる.

注意 5.13 $\det G_{k;i} = 1$ と (5.4) より, r_i の作用に関して

$$\det(\Lambda(z) + X_k) = \det(\Lambda(z) + \tilde{X}_k)$$

が成立している. ϖ の作用に関しても, $X'_k = \Lambda(z)^{-1}X_k\Lambda(z)$ より

$$\det(\Lambda(z) + X_k) = \det(\Lambda(z) + X'_k)$$

が成立している. したがって, r_i と ϖ の作用はどちらも $\det(\Lambda(z)+X_k)$ を不変に保つ. □

さて, 上で定めた r_i と ϖ の作用が拡大 affine Weyl 群の基本関係式を満たしていることをまだ示していない. それを証明しよう.

定理 5.14 (local な縦作用) 上で定義された r_i と ϖ の $\mathcal{X} = \{X = (X_1, \dots, X_n)\}$ への有理作用は, 拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) = \langle \varpi, r_1, \dots, r_{m-1} \rangle$ の基本関係式を満たしている. したがって $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1})$ の $\mathcal{X}$ への有理作用が得られる.

証明. $M(z)$ への $\varpi, r_1, \dots, r_{m-1}$ の作用が満たしている拡大 affine Weyl 群の基本関係式[26]が $X = (X_1, \dots, X_n)$ への作用に持ち上がっていることを示せば十分である. (a, b) は次のどれかであるとする:

$$
\begin{aligned}
&(r_i r_{i+1} r_i, r_{i+1} r_i r_{i+1}) && (i = 1, \dots, m-2), \\
&(r_i r_j, r_j r_i) && (i, j = 1, \dots, m-1,\ j \neq i \pm 1), \\
&(r_i^2, 1) && (i = 1, \dots, m-1), \\
&(\varpi r_i \varpi^{-1}, r_{i+1}) && (i = 1, \dots, m-2), \\
&(\varpi r_{m-1} \varpi^{-1}, \varpi^{-1} r_1 \varpi).
\end{aligned}
$$

$a(X) = b(X)$ を示せば十分である. $M(z)$ への a, b の作用は $a(M(z)) = b(M(z))$ を満たしている. よって

$$a(X) = (X'_1, \dots, X'_n), \qquad b(X) = (X''_1, \dots, X''_n)$$

と書くと次が成立している:

$$(\Lambda(z) + X'_1) \cdots (\Lambda(z) + X'_n) = (\Lambda(z) + X''_1) \cdots (\Lambda(z) + X''_n).$$

さらに注意 5.13 より

$$\det(\Lambda(z) + X'_k) = \det(\Lambda(z) + X_k) = \det(\Lambda(z) + X''_k)$$

が成立していることもわかる. したがって定理 5.1 の一意性の主張より $a(X) = b(X)$ が成立していることがわかる. □

注意 5.15 (逆散乱法との関係) 各 $\Lambda(z) + X_k$ を n 個の点からなる 1 次元格子の各サイトに乗っている local な L-operator であるとみなすと, $M(z) = (\Lambda(z) + X_1) \cdots (\Lambda(z) + X_n)$ は格子全体の global な L-operator とみなされる. n 個の点からなる 1 次元格子が巡回格子であると考えたならば $M(z)$ は巡回格子を一周するとき $\Lambda(z) + X_k$ たちで散乱される結果を積分した散乱行列 (数学的にはモノドロミー行列) であるとみなされる.

$M(z)$ への拡大 affine Weyl 群の作用は散乱データの対称性を記述していると考えられる. 特に拡大 affine Weyl 群の格子部分の作用は散乱データの離散的時間発展を記述していると考えられる. したがって $M(z)$ への作用を local な L-operators $\Lambda(z) + X_k$ への作用に持ち上げることは逆散乱法を実行しているとみなせる. □

注意 5.16 (有理函数の空間への縦作用) 注意 5.10 の手続きによって $F = \mathbb{C}(\mathcal{X})$ への拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) = \langle \varpi, r_1, \dots, r_{n-1} \rangle = S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$ の縦作用を書き下すと以下のようになる:

[26] $M(z)$ への作用が基本関係式を満たしていることに関しては野海 [15] 第 7 章, 第 8 章を参照せよ.

- $i=1,\dots,m-1$ に対する互換 $r_i=(i,i+1)$ の作用は次のように表わされる:

$$r_i(x_{k;i}) = qx_{k;i+1}\frac{p_{k;i}}{p_{k+1;i}}, \quad r_i(x_{k;i+1}) = q^{-1}x_{k;i}\frac{p_{k+1;i}}{p_{k;i}}, \quad r_i(x_{k;j}) = x_{k;j} \ \ (j\neq i,i+1).$$

- ϖ の作用は次のように表わされる:

$$\varpi(x_{k;j}) = x_{k;j+1}.$$

以上の公式は Kajiwara-Noumi-Yamada [10] の r_i と π の作用の公式に一致している[27]. このノートにおける r_i, ϖ, $p_{k;i}$ はそれぞれ [10] の r_i, π, $P_{i,k-1}$ に対応している. □

5.7 横作用と縦作用の可換性

前項までで構成された 2 つの拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$, $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1})$ の $\mathcal{X}$ への有理作用が互いに可換であることを示そう. $G_{k;i}$ が $X=(X_1,\dots,X_n)\in\mathcal{X}$ に依存していることを明らかにしたい場合には $G_{k;i}=G_{k;i}(X)$ と書くことにする.

定理 5.17 2 つの拡大拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$, $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1})$ の $\mathcal{X}$ への有理作用は互いに可換である.

証明. ω と ϖ の可換性: ω と ϖ は単なる添字のシフトなのでそれらが互いに可換であることはすぐにわかる.

s_k と r_i の可換性: $r_i(X)=(\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_n)$ と書く. すなわち

$$G_{k;i}(\Lambda(z)+X_k)G^{-1}_{k+1;i} = \Lambda(z)+\tilde{X}_k.$$

$\det G_{k;i}=1$ であることより,

$$\det(\Lambda(z)+\tilde{X}_k) = \det(\Lambda(z)+X_k).$$

よって $s_k r_i(X)=(\tilde{X}_1,\dots,\check{X}_k,\check{X}_{k+1},\dots,\tilde{X}_n)$ と書くと,

$$\begin{aligned}
&(\Lambda(z)+\check{X}_k)(\Lambda(z)+\check{X}_{k+1}) = G_{k;i}(\Lambda(z)+X_k)(\Lambda(z)+X_{k+1})G_{k+2;i},\\
&\det(\Lambda(z)+\check{X}_k) = \det(\Lambda(z)+X_{k+1}),\\
&\det(\Lambda(z)+\check{X}_{k+1}) = \det(\Lambda(z)+X_k).
\end{aligned}$$

s_k の作用は $M(z)$ を不変に保つので, s_k の作用前と後での $G_{k;i}$ に変化はないことに注意せよ. よって $r_i s_k(X)=(\tilde{X}_1,\dots,\hat{X}_k,\hat{X}_{k+1},\dots,\tilde{X}_n)$ と書くと,

$$\begin{aligned}
&(\Lambda(z)+\hat{X}_k)(\Lambda(z)+\hat{X}_{k+1}) = G_{k;i}(\Lambda(z)+X_k)(\Lambda(z)+X_{k+1})G_{k+2;i},\\
&\det(\Lambda(z)+\hat{X}_k) = \det(\Lambda(z)+X_{k+1}),\\
&\det(\Lambda(z)+\hat{X}_{k+1}) = \det(\Lambda(z)+X_k).
\end{aligned}$$

[27]ただし, [10] では $q=1$ の場合のみを扱っている. $q\neq 1$ の場合については [11], [16] および梶原による解説 [9] を参照せよ.

定理 5.1 の一意性の主張より $\check{X}_k = \hat{X}_k$, $\check{X}_{k+1} = \hat{X}_{k+1}$ であることがわかる. これで $s_k r_i = r_i s_k$ が示された.

ω と r_i の可換性: $\omega(X) = \omega(X_1, \dots, X_n) = (X_0, \dots, X_{n-1})$ なので

$$G_{k;i}(\omega(X)) = G_{k-1;i}(X).$$

よって $r_i\omega(X) = (\tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_{n-1})$ と書くと,

$$G_{k-1;i}(X)(\Lambda(z) + X_{k-1})G_{k;i}^{-1}(X) = \Lambda(z) + \tilde{X}_{k-1}.$$

よってこの $\tilde{X}_k$ は $r_i(X)$ の定義式 (5.12) に登場する補題 5.12 の $\tilde{X}_k$ に等しい. すなわち $r_i(X) = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ である. したがって

$$\omega r_i(X) = (\tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_{n-1}).$$

これで $r_i\omega = \omega r_i$ が示された.

s_k と ϖ の可換性: $X'_k = \Lambda(z)^{-1}X_k\Lambda(z)$ と置くと

$$\varpi(X) = (X'_1, \dots, X'_n), \qquad \det(\Lambda(z) + X_k) = \det(\Lambda(z) + X'_k).$$

よって $s_k\varpi(X) = (X'_1, \dots, \hat{X}_k, \hat{X}_{k+1}, \dots, X'_n)$ と書くと,

$$\begin{aligned}
&(\Lambda(z) + \hat{X}_k)(\Lambda(z) + \hat{X}_{k+1}) = (\Lambda(z) + X'_k)(\Lambda(z) + X'_{k+1}),\\
&\det(\Lambda(z) + \hat{X}_k) = \det(\Lambda(z) + X_{k+1})\\
&\det(\Lambda(z) + \hat{X}_{k+1}) = \det(\Lambda(z) + X'_k).
\end{aligned}$$

一方, $s_k(X) = (X_1, \dots, \tilde{X}_k, \tilde{X}_{k+1}, \dots, X_n)$ と書くと,

$$\begin{aligned}
&\varpi s_k(X) = (X'_1, \dots, \tilde{X}'_k, \tilde{X}'_{k+1}, \dots, X'_n),\\
&(\Lambda(z) + \tilde{X}'_k)(\Lambda(z) + \tilde{X}'_{k+1}) = (\Lambda(z) + X'_k)(\Lambda(z) + X'_{k+1}),\\
&\det(\Lambda(z) + \tilde{X}'_k) = \det(\Lambda(z) + X_{k+1}),\\
&\det(\Lambda(z) + \tilde{X}'_{k+1}) = \det(\Lambda(z) + X'_k).
\end{aligned}$$

定理 5.1 の一意性の主張より $\hat{X}_k = \tilde{X}'_k$, $\hat{X}_{k+1} = \tilde{X}'_{k+1}$ であることがわかる. これで $s_k\varpi = \varpi s_k$ が示された. □

6 量子化について

第 4 節で説明したように A_{n-1} 型拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)})$ の「横作用」は差分 KZ 方程式の形で量子化されるはずである. 差分 KZ 方程式を与える互いに可換な Hamiltonians は論文 [7] や教科書 [5] で説明されている方法で構成される.

それでは拡大 affine Weyl 群の「縦作用」はどのように量子化されるべきなのだろうか? こちらについては Hasegawa による現在進行中の仕事 [6] の適切な拡張が答を与えていると思われる.

このノートの立場では Hasegawa が扱っているのは行列のサイズ m が任意でサイトの個数が $n = 2$ の場合であるとみなされる. だから n を一般に拡張しなければいけない.

古典版の「縦作用」に関するもう一つの見方は幾何的な (拡大) affine Weyl 群の作用である. たとえば affine Lie 群に付随する無限次元 flag 多様体には自然に affine Weyl 群 (を少しだけ拡大したもの) が自然に作用している. その作用の量子化が構成できれば量子版の「縦作用」の真の姿が明らかになるだろう.

参考文献

[1] Birkhoff, G. D.: General theory of linear difference equations, Trans. Amer. Math. Soc. 12 (1911), no. 2, 243–284.

[2] Birkhoff, G. D.: The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, Proc. of Amer. Acad. of Arts and Sciences 49 (Oct. 1913), no. 9, 521–568.

[3] Bleistein, N. and Handelsman, R. A.: Asymptotic exapnsions of integrals, Dover, 1975, 1986.

[4] Borodin, Alexei: Isomonodromy transformations of linear systems of difference equations, `math.CA/0209144`.

[5] Etingof, P. I., Frenkel, I. B., and Kirillov, A. A., Jr.: Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations, Mathematical Surveys and Monographs, 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, xiv+198 pp.

[6] Hasegawa, K.: Deforming Kajiwara-Noumi-Yamada's rational representation of Weyl groups, preprint, a talk given at the Newton Institute, April 2001.

[7] Frenkel, I. B. and Reshetikhin, N. Yu.: Quantum affine algebras and holonomic difference equations, Comm. Math. Phys. 146 (1992), no. 1, 1–60.

[8] Jimbo, M. and Miwa, T.: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients, II, Phys. D 2 (1981), no. 3, 407–448.

[9] 梶原健司: 離散パンルヴェ方程式の理論: 現状と展望, 研究集会「非線形波動および非線形力学系に関する最近の話題」, 研究代表者: 時弘哲治, 九州大学筑紫地区共通管理棟 3 階大会議室, 2002 年 11 月 6 日〜8 日, 報告集, 144–154.

[10] Kajiwara, K., Noumi, M., and Yamada, Y.: Discrete dynamical systems with $W(A^{(1)}_{m-1} \times A^{(1)}_{n-1})$ symmetry, `nlin.SI/0106029`.

[11] Kajiwara, K., Noumi, M., and Yamada, Y.: q-Painlevé systems arising from q-KP hierarchy, `nlin.SI/0112045`.

[12] Manojlović, N. and Samtleben, H.: Schlesinger transformations and quantum R-matrices, Comm. Math. Phys. 230 (2002), no. 3, 517–537.

[13] 森口繁一, 宇田川鐘久[28], 一松信: 岩波数学公式 III, 岩波書店, 1960, 1987, 2000.

[14] 西本敏彦: 超幾何・合流型超幾何微分方程式, 共立出版, 1998.

[15] 野海正俊: パンルヴェ方程式 —対称性からの入門—, すうがくの風景 4, 朝倉書店, 2000.

[28]「鐘」の字は正確ではない

[16] Noumi, M. and Yamada, Y.: Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions, `math-ph/0203030`.

[17] Odesskii, A.: Local action of the symmetric group and the twisted Yang-Baxter relation, `math.QA/0110268`.