共形場理論の定式化について

黒木 玄
東北大学大学院理学研究科数学専攻

2003 年 12 月 26 日 (月) 第 7.1 版 (1995 年 11 月 2 日初版)

目 次

1　共形場理論の枠組でとらえられる色々な例

この節では共形場理論の枠組でとらえられる例にはどのようなものがあるかについて説明する. 主に [BPZ] の model と Wess-Zumino-Witten model に関係した場合を扱う.

共形場理論の数学的解釈には色々な流儀があるが, このノートにおいては, 共形場理論を compact Riemann 面とその上の特定の幾何構造 (例えば, principal G-bunlde やその上の quasi parabolic structure) の family とそれに付随して現われる無限次元代数の表現の組に対して, family の base space 上の線型微分方程式 (twisted D-module) を対応させる仕組としてとらえる.

例 1.1 (BPZ model). 共形場理論は [BPZ] において初めて定式化された. BPZ の model における conformal block の理論は, 数学的には, compact Riemann 面とその上の N 個の点の組 $(X; Q_1, \ldots, Q_N)$ の family の上の理論として定式化される. これに付随して登場する無限次元代数は Virasoro 代数である. Virasoro 代数 Vir は無限次元 Lie 環の一つであり, ベクトル空間として

$$\mathrm{Vir} = \mathbb{C}((z))\frac{d}{dz} \oplus \mathbb{C}C$$

と定義され, その Lie 環の構造は, 条件 $C \in$ center of Vir および

$$\left[f(z)\frac{d}{dz}, g(z)\frac{d}{dz}\right] = (f(z)g'(z) - g(z)f'(z))\frac{d}{dz} + \frac{C}{12}\operatorname{Res}(f'''(z)g(z)\,dz)$$

によって定義される. ここで, $\mathbb{C}((z))$ は $\mathbb{C}$ 係数の形式 Laurent 級数体であり, $\operatorname{Res}(a(z)\,dz)$ は $a(z)\,dz$ の $z = 0$ における留数を表わす. Vir の表現空間に C が定数倍で作用するとき, その定数を表現の central charge と呼ぶ. N 個の点各々に対応させて N 個の Virasoro 代数を考えると, それらは N 点付きの Riemann 面の無限小変形を記述する. この例については [BS] の Section 4 および [BFM] の Section 8 を参照されたい.

例 1.2 (WZW model). G を例えば SL_n などの複素単純 Lie 群であるとする. 群 G を対称性として持つ Wess-Zumino-Witten model は N 点付きのコンパクト Riemann 面とその上の principal G-bundle の組 $(X; Q_1, \ldots, Q_N; \mathcal{P})$ の family 上の理論として定式化される. これに付随して登場する無限次元代数は affine Lie 環である. G の Lie 環 $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ に対する affine Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ は, ベクトル空間としては

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}K$$

と定義され, その Lie 環の構造は, $K \in$ center of $\hat{\mathfrak{g}}$ および

$$[X \otimes f(z), Y \otimes g(z)] = [X, Y] \otimes f(z)g(z) + K(X|Y)\operatorname{Res}(f'(z)g(z)\,dz)$$

によって定義される. ここで, $(.|.)$ は $\mathfrak{g}$ 上の invariant symmetric bilinear form でその $2h^\vee$ 倍が $\mathfrak{g}$ の Killing 形式に等しくなるものである. ($h^\vee$ は g の dual Coxeter number である. 例えば, $G = SL_n$ のとき $h^\vee = n$ となる.) この normalization のもとで, $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現空間に K が定数倍で作用するとき, その定数を表現の level と呼ぶ. Riemann 面上に指定された N 個の点に対応させて N 個の affine Lie 環を考えると, それらは principal G-bundle の無限小変形を記述する. Principal G-bundle だけでなく N 点付きの Riemann 面自身の変形も同時に考える場合は, affine Lie 環だけではなく Virasoro 代数も必要になる.

この例において principal G-bundle の代わりに, vector bundle を扱った場合 (すなわち $G = GL_n$ の場合) の定式化の基礎は [BS] にある.

例 1.3. [TUY] の理論は, 例 1.2 において, principal G-bundle として trivial bundle のみを考えた場合に対応している. この場合については [TUY] の他に [T] や [U] なども参照されたい.

例 1.4 (KZ 方程式). 例 1.3 において, Riemann 面は射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ であり, principal G-bundle として trivial bundle のみを考える. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の N 個の点 $(Q_1, \dots, Q_N)$ の family を考える. 正の整数 k を固定し, N 個の点の各々に affine Lie 環の level k の integrable highest weight 表現を対応させ, それらの表現に Virasoro 代数を管原構成によって作用させる. これらに対応する family の base space 上の線型微分方程式は, 適当な座標系のもとで Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) 方程式 $+\alpha$ になる. (α の部分は表現が integrable であることに対応して現われる代数的な線型方程式.) 共形場理論の枠組から KZ 方程式 ($+\alpha$) を導く方法については [KZ], [GW], [TK] などを参照されたい.

例 1.5 (affine Lie 環の表現の character). 例 1.2 において, Riemann 面は楕円曲線であるとし, $N = 1$ の場合を考えることによって, affine Lie 環の表現の character の満たす線型微分方程式を出すことができる. ただし, principal G-bundle と affine Lie 環の表現は以下のように取らなければいけない. 楕円曲線を

$$X_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) \qquad (\operatorname{Im}\tau > 0)$$

と表現しておき, 点 Q_1 は $0 \in \mathbb{C}$ に対応する X_τ 上の点であるとする. Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環を $\mathfrak{h}$ と書くことにする. $h \in \mathfrak{h}$ に対して, X_τ 上の principal G-bundle $\mathcal{P}_{\tau,h}$ を次のように定める:

$$\mathcal{P}_{\tau,h} = (\mathbb{C} \times G)/\sim .$$

ここで, $\sim$ は次の条件を満たす最小の同値関係である:

$$(z, g) \sim (z + 1, g) \sim (z + \tau, e^{2\pi i h} g e^{-2\pi i h}).$$

このとき, $\mathcal{P}_{\tau,h}$ から X_τ への projection が自然に定義され, $\mathcal{P}_{\tau,h}$ は X_τ 上の (flat) principal G-bundle をなす. 楕円曲線 X_τ と principal G-bundle $\mathcal{P}_{\tau,h}$ の family を考える. (その base space は (上半平面) $\times\, \mathfrak{h}$ である.) $\mathfrak{h}$ を含む $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環 $\mathfrak{b}$ を一つ固定する. 任意の $k \in \mathbb{C}$ と $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分環 $\mathfrak{b} \otimes 1 \oplus \mathfrak{g} \otimes z\mathbb{C}[[z]] \oplus \mathbb{C}K$ の 1 次元表現で次の性質を満たすベクトル v から生成されるものが同型を覗いて唯一存在する:

$$Kv = kv, \qquad (h \otimes 1)v = \lambda(h)v \quad (h \in \mathfrak{h}).$$

この 1 次元表現から誘導される $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現は, $k \neq -h^\vee$ のとき, 唯一の irreducible quotient を持つ. それを $L(k, \lambda)$ と表わす. 以下において, k は正の整数であるとし, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{g}$ の dominant integral weight で $\mathfrak{g}$ の highest root θ に対して $(\theta|\lambda) \leq k$ を満たすものとする. このとき, $L(k, \lambda)$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の integrable highest weight 表現になる. $\hat{\mathfrak{g}}$ の integrable highest weight 表現はこのような形で一意的に構成されることが知られている. X_τ 上の唯一指定された点 Q_1 に対する表現として $L(k, 0)$ を考えると, 上記の family の base space 上の線型微分方程式として, level k の integrable highest weight 表現の満たす方程式が得られる. (この結果については [EO] や [B] を参照せよ.)

この例のように pincipal G-bundle の変形を考えずに, trivial bundle のみを考えた場合でも, 方程式の解空間を $L(k, 0)$ 上の線型汎函数に値を持つ正則函数の範中で考えれば, affine Lie 環の evel k の integrable 表現の character の空間と同型な空間が得られる ([TUY]). その汎函数を $L(k, 0)$ の highest weight vector のなす 1 次元の空間に制限すると, affine Lie 環の character を $h = 0$ に特殊化することによって得られる函数の空間が得られる. もちろん, $h = 0$ と特殊化すると, もとの character の情報を落ちてしまう. しかし, 上の例のように h に応じて principal G-bundle の変形を考えてやると, ちょうど affine Lie 環の character の空間が得られる. このように, affine Lie 環の character そのものの空間を共形場理論の枠組で扱うためには bundle の変形も含めて扱う必要がある.

例 1.6 (楕円量子可積分系). 例 1.5 の状況のもとで, 表現の level を $k = -h^\vee$ にすることを考える. (このとき, level は critical であると言う.) $\mathfrak{g}$ の highest weight λ を持つ有限次元既約表現から誘導される $\hat{\mathfrak{g}}$ の level $-h^\vee$ の表現を $N(\lambda)$ と書くことにする. $N(\lambda)$ の irreducible quotient は, level が critical でない場合と違って, 唯一ではない. 表現の level が critical の場合は, Virasoro 代数の作用の管原構成が適用できないので, 楕円曲線の無限小変形を Virasoro 代数を使って記述することはできなくなる. その代わりに $N(\lambda)$ からそれ自身への多くの intertwining operator が得られる. これが, $N(\lambda)$ の irreducible quotinet の一意性が成立しない原因になっている. $N(\lambda)$ の irreducible quotient の一つを L と書き, 楕円曲線上に唯一指定された点 Q_1 に対して, $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現 L が与えられているとする. この状況のもとで得られる $\{\tau\} \times \mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}$ 上の線型微分方程式は, root 系上の量子可積分系と密接に関係している. ($\mathfrak{h}$ 自身を root 系とみなす.) $\hat{\mathfrak{g}}$ の universal enveloping algebra を $K + h^\vee$ で生成されるイデアルで割ったもののある種の完備化の center は非常に大きいことが知られていて (例えば [Ha], [Fr1]), それが $\mathfrak{h}$ 上の互いに可換な微分作用素に化けるのである. $N(\lambda)$ の irreducible quotinet L を考えることは, それら作用素の固有値のデータを与えることに相当している.

この例において, 楕円曲線が退化した場合は Jack polynomial と関係している. また, critical level で曲線が $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で N 点付きの理論を考えると, それは Gaudin model と関係する. Beilinson と Drinfeld による Riemann 面に対する Langlands program の類似においては, 共形場理論の枠組と affine Lie 環の critcal level の表現論が本質的な形で使われている. ([Fr2] およびその参考文献欄を見よ.)

例 1.7 (楕円古典 r 行列). Belavin-Drinfeld [BelD] の楕円古典 r 行列も例 1.2 の枠組でとらえられる. $G = PSL_n(\mathbb{C})$ であるとし, その Lie 環 $\mathfrak{g}$ を

$$\mathrm{sl}_n(\mathbb{C}) = \{\, X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0 \,\}$$

と同一視する. 行列 a, b を次のように定める:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \zeta & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \zeta^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで, ζ は 1 の原始 n 乗根である. a, b の定める $G = PSL_n(\mathbb{C})$ の元をそれぞれ $\bar{a}, \bar{b}$ と表わすことにする. $ba = ab\zeta$ であるから, G の中で $\bar{a}$ と $\bar{b}$ は互いに可換である. X_τ は例 1.5 における楕円曲線であるとし, X_τ 上の principal G-bundle $\mathcal{P}_\tau$ を次のように定める:

$$\mathcal{P}_\tau = (\mathbb{C} \times G)/\sim.$$

ここで, $\sim$ は次の条件を満たす最小の同値関係である:

$$(z, \bar{g}) \sim (z+1, \bar{a}\bar{g}) \sim (z+\tau, \bar{b}\bar{g}).$$

このとき, $\mathcal{P}_\tau$ から X_τ への projection が自然に定義されて, $\mathcal{P}_\tau$ は X_τ 上の principal G-bundle をなす. $\mathcal{P}_\tau$ に付随する adjont bunlde を $\mathfrak{g}_\tau$ と書くことにする:

$$\mathfrak{g}_\tau = \mathcal{P}_\tau \times^G \mathfrak{g} = (\mathbb{C} \times \mathfrak{g})/\approx.$$

ここで, $\approx$ は次の条件を満たす最小の同値関係である:

$$(z, X) \approx (z+1, aXa^{-1}) \approx (z+\tau, bXb^{-1}).$$

$\mathfrak{g}_\tau$ を line bundle の直和に分解して考えることによって, 任意の p に対して $H^p(X_\tau, \mathfrak{g}_\tau) = 0$ が成立することが容易にわかる. $\mathfrak{g}_\tau$ の dual vector bundle を $\mathfrak{g}_\tau^*$ と書き, これに X_τ 上の canonical line bundle を tensor したものを $\mathfrak{g}_\tau^o$ と表わす. このとき, 上記の cohomology vanishing の結果から,

$$H^0(X_\tau \times X_\tau, \mathfrak{g}_\tau \boxtimes \mathfrak{g}_\tau^o(\Delta)) \simeq H^0(X, \mathrm{End}(\mathfrak{g}_\tau))$$

が成立することが確かめられる. ここで, Δ は diagonal であり, この同型は diagonal に沿った residue を考えることによって与えられる. 実は, 右辺の $1 \in H^0(X, \mathrm{End}(\mathfrak{g}_\tau))$ に対応する左辺の元は Belavin-Drinfeld の楕円古典 r 行列と一致する. 以上の定式化は [C] によるものである.

例 1.8 (楕円 KZ 方程式). すぐ上の例 1.7 の状況のもとで, さらに, 楕円曲線の上に N 個の点が与えられているとし, N 点付きの楕円曲線の family を考える. X_τ 上の principal G-bundle としては, 常に $\mathcal{P}_\tau$ を考えることにする. これによって, N 点付きの楕円曲線とその上の principal G-bundle の family ができる. 楕円曲線上の N 個の点それぞれに対して, 固定された level k の highest weight 既約表現 $L(k, \lambda)$ が与えられているとする. (簡単のため λ は $\mathfrak{g}$ の dominant integral weight であるとするが, $k \neq -h^\vee$ は任意とする.) このとき, family の base space 上に得られる線型微分方程式は, 楕円古典 r 行列によって書き下される KZ 方程式の楕円版になる. これは, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ における KZ 方程式 (例 1.4) が有理古典 r 行列を使って書き下されることの類似になっている. 楕円古典 r 行列において重要だったのは, cohomology vanishing の結果であったが, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ においては任意の点 $Q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と p に対して, $H^p(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(Q)) = 0$ が明らかに成立している. (点 Q として大抵の場合無限遠点 ∞ を考える.) この明らかな結果を使うことによって, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の WZW model では, 表現が integrable でない場合でも conformal block の空間が有限次元になることが証明される. この例の状況においても, 実は同様のことが成立している. 楕円曲線上の trivial な bundle を考えた場合では, conformal block の有限次元性は integrable 表現以外の場合では保証されない.

以上の例によって, 点付きの compact Riemann 面の変形**だけでなく** principal G-bundle の変形**も同時に**考えることが重要であることがわかる.

2 Twisted diffrential operator (tdo) の層の作り方

共形場理論において family の base の上に得られる微分方程式は, 一般には単なる D-module ではなく, twisted D-module になる. これは, Beilinson-Bernstein 対応の状況と同様である. この節では点付きの compact Riemann 面とその上の quasi parabolic G-bundle の組の family から, その base space 上の twisted differential operator の層を作る方法について説明する.

2.1 compact Riemann 面上の quasi parabolic G-bundle の定義

この subsection では X は compact Riemann 面であるとする. (純代数的に扱いたい場合は complex projective non-singular curve であるとする.) G は複素単純 Lie 群であるとし, $\mathcal{P}$ は X 上の principal G-bundle であるとする.

$\mathcal{P}$ に付随する gauge bundle を $G_{\mathcal{P}}$ と表わす. すなわち, G の G 自身への作用 Ad を $\mathrm{Ad}(g)(x) = gxg^{-1}$ $(g, x \in G)$ と定めるとき, $\mathcal{P}$, Ad, G に付随する X 上の fiber bundle を $G_{\mathcal{P}}$ と表わす:

$$G_{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times^{\mathrm{Ad}} G.$$

$G_{\mathcal{P}}$ の任意の fiber は G と同型な複素単純 Lie 群になる. $G_{\mathcal{P}}$ の local section 全体のなす sheaf は $\mathcal{P}$ の gauge 群の sheaf 化である.

G の Borel 部分群全体の集合を $\mathcal{B}$ と書き, B は任意に固定された G の Borel 部分群であるとする. このとき, $gB \in G/B$ に対して $gBg^{-1} \in \mathcal{B}$ に対応させる写像は全単射である. これを利用して, 旗多様体 G/B と $\mathcal{B}$ を同一視する. このとき, $\mathcal{P} \times^G \mathcal{B} = \mathcal{P} \times^G (G/B) = \mathcal{P}/B$ である. よって, 点 $x \in X$ における $\mathcal{P}$ の fiber 内の B-orbit と同じ点 x における $G_{\mathcal{P}}$ の fiber の Borel 部分群は自然に一対一対応している.

$\{\, (q_i, F_i) \mid i = 1, \dots, N \,\}$ が $\mathcal{P}$ の **quasi parabolic structure** であるとは, $q_1, \dots, q_N$ が X 上の互いに異なる N 個の点であり, 各 F_i が点 q_i における $\mathcal{P}$ の fiber 内の B-orbit であることである. X 上の principal G-bundle とその quasi parabolic structure の組のことを X 上の **quasi parabolic G-bundle** と呼ぶ.

2.2 compact Riemann 面とその上の quasi parabolic G-bundle の組の family

この subsection 以降では, compact Riemann 面とその上の parabolic G-bundle の family を次のような記号で書くことにする:

$$(X \xrightarrow{\pi_{X/S}} S;\ q_1, \dots, q_N;\ \mathcal{P} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{P}/X}} X;\ \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N).$$

記号の説明をしよう. 後で, 少なくとも $\pi_{X/S}$ に関して fiberwise には Zariski topology で扱う必要があるので, 純代数的な設定の方を説明しよう. (色々な例を扱う場合においては, 複素多様体の範中で扱った方が便利なことが多いが, ここでは純代数的な設定の方を説明しておく.) 以下において, G は complex semisimple algebraic group であるとする.

(1) X, S は complex non-singular variety であり, $\pi_{X/S}$ は X から S への flat proper smooth morphism であるとし, $\pi_{X/S}$ の各々の fiber は connected projective non-singular curve であると仮定する.
(2) $q_1, \ldots, q_N$ は $\pi_{X/S}$ の sections $S \to X$ であり, $q_i(S)$ 達は互いに交わらないと仮定する. $Q_i = q_i(S)$ と置くと, Q_i は X の divisor である.
(3) $\pi_{\mathcal{P}/X} \colon \mathcal{P} \to X$ は X 上の principal G-bundle である. (etale topology で locally trivial なものを考える.) $\mathcal{P}$ の gauge bundle を $G_{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times^{\mathrm{Ad}} G$ と書くことにする. $G_{\mathcal{P}}$ は X 上の locally trivial な group scheme になる.
(4) 各 $\mathcal{F}_i$ は $\mathcal{P}$ の Q_i 上への制限 $\mathcal{P}_{Q_i} = \pi_{\mathcal{P}/X}^{-1}(Q_i)$ の B-reduction であるとする. すなわち, $\mathcal{F}_i$ は Q_i 上の principal B-bundle でかつ $\mathcal{P}_{Q_i}$ の subbundle になっていて, B の $\mathcal{F}_i$ への右からの作用は $\mathcal{P}$ への G の右からの作用から誘導されるものになっていると仮定する. このような $\mathcal{F}_i$ を $\mathcal{P}$ の Q_i 上における quasi parabolic structure と呼ぶ.

記号の簡単のため, $Q = Q_1 \sqcup \cdots \sqcup Q_N$ と置く. Q は X の divisor である. X の structure sheaf $\mathcal{O}_X$ の Q_i (resp. Q) に沿った completion を $\widehat{\mathcal{O}}_{X|Q_i}$ (resp. $\widehat{\mathcal{O}}_{X|Q}$) と表わす:

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X|Q_i} = \varprojlim_m \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mQ_i), \qquad \left(\text{resp. } \widehat{\mathcal{O}}_{X|Q} = \varprojlim_m \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mQ) = \bigoplus_{i=1}^N \widehat{\mathcal{O}}_{X|Q_i}\right).$$

さらに, Q_i (resp. Q) それぞれの無限小近傍 U_i (resp. U) を

$$U_i = \operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}}_{X|Q_i}, \qquad (\text{resp. } U = \operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}}_{X|Q})$$

と定め, X への自然な morphism を $\iota_{U_i} \colon U_i \to X$, (resp. $\iota_U \colon U \to X$) と表わす. さらに, 以下のような記号も後で用いる:

$$X^* = X - Q, \qquad U_i^* = U_i - Q_i, \qquad U^* = U - Q = U_1^* \sqcup \cdots \sqcup U_N^*.$$

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{F}_N$ と置く. $\mathcal{F}$ は $\mathcal{P}$ の Q 上への制限 $\mathcal{P}_Q = \pi_{\mathcal{P}/X}^{-1}(Q)$ の B-reduction である. すなわち, $\mathcal{F}$ は Q 上の principal B-bundle であり, $\mathcal{P}$ の Q への制限の subbundle になっていて, $\mathcal{F}$ への B の右作用は $\mathcal{P}$ への G の右作用から誘導されるものになっている. このような $\mathcal{F}$ を $\mathcal{P}$ の Q 上における quasi parabolic structure と呼ぶ. $\mathcal{P}_Q$ への G の右作用が定める $\mathcal{F} \times G$ から $\mathcal{P}_Q$ への自然な写像は, $\mathcal{F} \times^B G$ から $\mathcal{P}_Q$ への自然な同型写像を誘導する. これによって, $\mathcal{F} \times^B G$ と $\mathcal{P}_Q$ を同一視する. このとき, $\mathcal{F}$ の gauge bundle $B_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \times^{\mathrm{Ad}} B$ は $G_{\mathcal{P}}$ の Q 上への制限 $G_{\mathcal{P},Q}$ の locally trivial group subscheme と自然に同一視される. この対応によって, Q 上の quasi parabolic structure $\mathcal{F}$ と $G_{\mathcal{P},Q}$ の locally trivial group subscheme でその任意の fiber が $G_{\mathcal{P},Q}$ の fiber の Borel 部分群になっているようなものは一対一に対応している. $\mathfrak{b} = \operatorname{Lie} B$ と置き, $\mathcal{F}$ の adjoint bundle を $\mathfrak{b}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \times^{\mathrm{Ad}} \mathfrak{b}$ と書くことにする. $\mathfrak{b}_{\mathcal{F}}$ は Q 上の Lie algebra bundle である. $\mathfrak{b}_{\mathcal{F}}$ の local section 全体のなす Q 上の coherent sheaf も同じ記号で書くことにする.

これから当分の間は S, X, $\mathcal{P}$ のみを扱う. q_i, $\mathcal{F}_i$ は Subsection 2.15 まで登場しない.

2.3 Lie algebroid と dg Lie algebroid の定義

この subsection の詳しい内容については [HS] を見よ.

多様体 X 上の differential graded Lie algebroid (dg Lie algebroid) を定義しよう. $\mathcal{A}^\bullet$ が X 上の dg Lie algebroid であるとは, 以下が成立していることである:

(1) $\mathcal{A}^\bullet$ は left $\mathcal{O}_X$-module およびその間の $\mathcal{O}_X$-homomorphism から構成された cochain complex である. その coboundary map $\mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{p+1}$ を δ と書くことにする.

(2) $\mathcal{A}^\bullet$ には $\mathbb{C}_X$ 上の dg Lie algebra structure が与えられている. すなわち, $\mathbb{C}_X$-linear map $[\ ,\ ]\colon A^\bullet \otimes_{\mathbb{C}_X} A^\bullet \to A^\bullet$ が与えられていて, $a \in A^p$, $b \in A^q$, $c \in A^r$ に対して,

  (a) $[a,b] \in A^{p+q}$,

  (b) $\delta([a,b]) = [\delta(a), b] + (-1)^p [a, \delta(b)]$,

  (c) $[a,b] = -(-1)^{pq}[b,a]$,

  (d) $[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{pq}[b,[a,c]]$.

(3) left $\mathcal{O}_X$-homomorphism $\varepsilon\colon \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{T}_X$ が与えられていて, $a, b \in A^\bullet$, $f \in \mathcal{O}_X$ に対して,

$$\varepsilon([a,b]) = [\varepsilon(a), \varepsilon(b)], \qquad [a, fb] = \varepsilon(a)(f)\, b + f[a,b].$$

ここで, 0 次の成分が $\mathcal{T}_X$ で他が 0 であるような dg Lie algebra と $\mathcal{T}_X$ を同一視した.

$A^\bullet$ が X 上の dg Lie algebra であり, $p \neq 0$ のとき $A^p = 0$ であるとき, $A^0 = A^\bullet$ を X 上の Lie agebroid と呼ぶ. $\mathcal{T}_X$ は $\varepsilon = \mathrm{id}_{\mathcal{T}_X}$ によって, 自然に Lie algebroid である.

$A^\bullet$ は dg Lie algebroid であり, $M^\bullet$ は left $\mathcal{O}_X$-module から構成される cochain complex であるとする. $M^\bullet$ は left $A^\bullet$-module であるとは以下が成立していることである:

(1) $\mathbb{C}_X$-linear map $\cdot\colon A^\bullet \otimes_{\mathbb{C}_X} M^\bullet \to M^\bullet$ が与えられていて, $a \in A^p$, $b \in A^q$, $v \in M^r$ に対して,

  (a) $av \in M^{p+r}$,

  (b) $\delta(av) = \delta(a)v + (-1)^p a\delta(v)$,

  (c) $[a,b]v = a(bv) - (-1)^{pq} b(av)$.

(2) $a \in A^\bullet$, $v \in M^\bullet$, $f \in \mathcal{O}_X$ に対して,

$$(fa)v = f(av), \qquad a(fv) = \varepsilon(a)(f)\, v + f(av).$$

$A = A^0 = A^\bullet$ が Lie algebroid のとき, left A-module とは left $A^\bullet$-module でかつ 0 次以外の成分が全て 0 の complex のことである.

2.4 Atiyah algebroid

上の subsection の記号をそのまま用いる. [BS] の構成をこの場合に適用できる形に少し変形し, X の上に Virasoro 代数と affine Lie 環を構成したい. この subsection では, その準備として, Atiyah algebroid を定義しよう.

一般に, 多様体 X の tangent sheaf を $\mathcal{T}_X$ と書くことにする. G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ と書き, $\mathcal{P}$ に付随する adjoint bundle を $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times^{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ と書くことにする. $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ は X 上の Lie algebra bundle をなす. $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ の local section 全体のなす X 上の coherent sheaf も同じ記号で $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ と書くことにする. 層としての $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ は $\mathcal{O}_X$ 上の Lie algebra である.

X 上の principal G-bundle $\mathcal{P}$ に対して, $\mathcal{P}$ の **Atiyah algebroid** $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ は, X 上の sheaf として,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \left[\pi_{\mathcal{P}/X_*}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})\right]^G$$

と定義される. すなわち, fiber 方向には global に定義されている $\mathcal{P}$ 上の G-invariant vector field 全体のなす X 上の sheaf を $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ と書く. $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ は自然に left $\mathcal{O}_X$-module の構造を持ち, しかも $\mathbb{C}_X$ 上の Lie algebra である. $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ から $\mathcal{T}_X$ への自然な $\mathcal{O}$-homomorphism を$\varepsilon_{\mathcal{P}}$ と表わす. すると, $\varepsilon_{\mathcal{P}}\colon \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{T}_X$ は Lie algebra homomorphism になる. $(\mathcal{A}_{\mathcal{P}}, \varepsilon_{\mathcal{P}})$ を $\mathcal{P}$ に付随する **Atiyah algebroid** と呼ぶ.

$\varepsilon_{\mathcal{P}}$ は surjective である. (すなわち, Atiyah algebroid は transitive である.) さらに, $\varepsilon_{\mathcal{P}}$ の kernel は自然に $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ と同一視されるので, 次の short exact sequence を得る:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{P}}} \mathcal{T}_X \longrightarrow 0.$$

この short exact sequence は [A] にちなんで Atiyah の exact sequence と呼ばれている.

一般に X の上の vector bundle E に対して, E に作用する高々 m 階の線型微分作用素の sheaf を $\mathcal{D}_E^m$ と書き, E に作用する線型微分作用素の sheaf を $\mathcal{D}_E$ と表わす. $\mathcal{D}_E^m$ から $\mathcal{D}_E^m/\mathcal{D}_E^{m-1} = \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} S^m(\mathcal{T}_X)$ への自然な projection を symbol_m と表わす. $\mathcal{A}_E$ を次のように定義する:

$$\mathcal{A}_E = \{\, a \in \mathcal{D}_E^1 \mid \mathrm{symbol}_1(a) \in \mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_X \,\}.$$

symbol_1 の定める $\mathcal{A}_E$ から $\mathcal{T}_X$ への自然な写像を ε_E と表わす. $(\mathcal{A}_E, \varepsilon_E)$ を vector bundle E に付随する Atiya algebroid と呼ぶ.

$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ は Lie algebra の adjoint action の形で $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ に自然に作用する. その作用によって, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ から $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}}$ への Lie algebra homomorphism が得られる. G は semisimple であると仮定したことより, それは injective であり, その image は

$$\{\, a \in \mathcal{A}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}} \mid a([b,c]) = [a(b), c] + [b, a(c)] \quad \text{for } b, c \in \mathfrak{g}_{\mathcal{P}} \,\}$$

に一致することがわかる. 以下においては, これと $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ を同一視する. 以上によって次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_X & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{ad}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{ad}}\downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{g}_P) & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_X & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

ここで, 横の列はどちらも exact であり, 縦の射は全て単射である.

2.5 relative Atiyah algebroid と Atiyah π-algebroid

以下においては, 簡単のために, 単に π と書けば $\pi_{X/S}$ を意味するものとする. π による X の S 上における relative tangent sheaf を $\mathcal{T}_{X/S}$ と表わす. $\mathcal{T}_{X/S}$ の $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{A}_E$ における

inverse image をそれぞれ $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$, $\mathcal{A}_{E/S}$ と表わす．これらを **relative Atiyah algebroid** と呼ぶことにする．

$\mathcal{O}$-module としての pull-back $\pi^*\mathcal{T}_S = \mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_S} \pi^{-1}\mathcal{T}_S$ は自然な Lie algebra structure を持たないが, sheaf としての pull-back $\pi^{-1}\mathcal{T}_S$ は $\pi^{-1}\mathcal{O}_S$ 上の Lie algebra structure を持つ. π は smooth であると仮定したので, 次の short exact sequence を得る:

$$0 \to \mathcal{T}_{X/S} \to \mathcal{T}_X \xrightarrow{d\pi} \pi^*\mathcal{T}_S \to 0.$$

(実は [T] の方法をそのまま用いれば, π が smooth でない場合にも以下の議論のほとんどが成立する．このことは, curve を退化させて factorization property などを調べるときに重要である.) また, S は non-singular と仮定したので $\mathcal{T}_S$ は locally free, よって $\mathcal{O}_S$-flat になる．これより, $\pi^{-1}\mathcal{T}_S \subset \pi^*\mathcal{T}_S$ とみなせることがわかる．$\mathcal{T}_{X,\pi} = d\pi^{-1}(\pi^{-1}\mathcal{T}_S)$ と置くと, これは自然に $\mathcal{T}_X$ の Lie subalgebra になり, Lie algebra homomorphism による short exact sequence

$$0 \to \mathcal{T}_{X/S} \to \mathcal{T}_{X,\pi} \to \pi^{-1}\mathcal{T}_S \to 0.$$

を得る．$\mathcal{T}_{X,\pi}$ の $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{A}_E$ における inverse image をそれぞれ $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi}$, $\mathcal{A}_{E,\pi}$ と表わす．これらを **Atiyah π-algebroid** と呼ぶことにする．

以上の定義をまとめると以下の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathfrak{g}_{\mathcal{P}} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathfrak{g}_{\mathcal{P}} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}_{\mathcal{P}/S} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi} \arrow[r] \arrow[d] & \pi^{-1}\mathcal{T}_S \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{T}_{X/S} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}_{X,\pi} \arrow[r] \arrow[d] & \pi^{-1}\mathcal{T}_S \arrow[r] & 0. \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

この図式における縦と横の列は全て exact である．

2.6 線型常微分作用素の核函数表示

一般に X 上の vector bundle E に対して, E に作用する線型微分作用素の sheaf $\mathcal{D}_E$ の $\mathcal{A}_{E/S}$ から生成される associative subalgebra with 1 を $\mathcal{D}_{E/S}$ と表わす. $\mathcal{D}^m_{E/S} = \mathcal{D}^m_E \cap \mathcal{D}_{E/S}$ と置く. $\mathcal{D}_{E/S}$ は fiber 方向の微分のみを含む E に作用する線型常微分作用素の層である．この subsection の目標は $\mathcal{D}_{E/S}$ の作用素を核函数表示を準備することである．

X の S 上の relative dualizing sheaf を $\omega = \omega_{X/S}$ と書くことにする．X は non-singular で π は smooth curve の family であると仮定したので, $\omega = \Omega^1_{X/S}$ が成立する．E の dual vector bundle を E^* と書き, それに ω を tensor したものを E^o と表わす．

記号を簡単にするために, S 上の fiber product $X \times_S X$ を $X \times X$ と書き, その diagnal を Δ と書く. Δ 上に台を持つ $X \times X$ 上の sheaf と X 上の sheaf は自然に同一視される. $X \times X$ から X への左側の projection を p_1 と書き, 右側への projection を p_2 と書くことにする.

Δ 上に台を持つ $X \times X$ 上の sheaf $\mathcal{K}_E^m$, $\mathcal{K}_E$ を次のように定義する:

$$\mathcal{K}_E^m = \varprojlim_n \frac{E \boxtimes E^o((m+1)\Delta)}{E \boxtimes E^o((n+1)\Delta)}, \qquad \mathcal{K}_E = \bigcup_m \mathcal{K}_E^m.$$

$\phi \in \mathcal{K}_E^m$ に対して, $\delta(\phi) \in \mathcal{D}_{E/S}^m$ を次のように定めることができる:

$$\delta(\phi) f = \mathrm{Res}_\Delta(\phi \cdot p_2^* f) \qquad \text{for} \quad f \in E.$$

($\phi \cdot p_2^* f \in \varprojlim_n E \boxtimes \omega((m+1)\Delta)/E \boxtimes \omega((n+1)\Delta)$ と解釈せよ.) π の fiber に沿った局所座標 z を使って書くと

$$(\delta(\phi) f)(z) = \operatorname*{Res}_{z_2 = z}(\phi(z, z_2) f(z_2)\, dz_2) \qquad \text{for} \quad f \in E.$$

となる. $\delta(\phi)$ を ϕ を核函数とする線型常微分作用素と呼ぶことにする. $m \geq 0$ のとき, $\delta\colon \mathcal{K}_E^m \to \mathcal{D}_{E/S}^m$ は surjective であり, その kernel は $\mathcal{K}_E^{-1}$ に一致する. 以上をまとめると次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_E^{-1} & \longrightarrow & \mathcal{K}_E & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}_{E/S} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_E^{-1} & \longrightarrow & \mathcal{K}_E^m & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}_{E/S}^m & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

この図式の横の列はどちらも exact である.

2.7 $\mathcal{D}_{E/S}$ と $\mathcal{A}_{E,\pi}$ の $\mathcal{K}_E$ と $\omega_{X/E}$ への作用

$\mathcal{D}_{E/S}$ は $\mathcal{K}_E$ に左と右の両方から自然に作用している. $\delta\colon \mathcal{K}_E \to \mathcal{D}_{E/S}$ は $\mathcal{D}_{E/S}$-bimodule homomorphism である. 交換子によって $\mathcal{D}_{E/S}$ を Lie algebra とみたものを $\mathcal{D}_{E/S}^{\mathrm{Lie}}$ と書く. $\mathcal{D}_{E/S}^{\mathrm{Lie}}$ の $\mathcal{K}_E$ への作用 Lie を次のように定めることができる:

$$\mathrm{Lie}(a)(\phi) = a \cdot \phi - \phi \cdot a.$$

$\delta\colon \mathcal{K}_E \to \mathcal{D}_{E/S}$ は $\mathcal{D}_{E/S}^{\mathrm{Lie}}$-homomorphism である.

さらに, $\mathcal{A}_{E,\pi}$ の $\mathcal{K}_E$ への作用も自然に定めることができる. その作用も Lie と書くことにする. (2 つの Lie は $\mathcal{A}_{E/S} = \mathcal{A}_{E,\pi} \cap \mathcal{D}_{E/S}$ 上一致しているので, このように書いても混乱は生じない.) S 上に local coordinate $s = (s_1, \dots, s_M)$ ($M = \dim S$) を取り, π の fiber に沿った coordinate z を一つ選び, X 上の local coordinate $(s; z)$ を定める. 局所的に定義された同型 $I\colon \mathcal{O}_X^r \xrightarrow{\sim} E$ ($r = \operatorname{rank} E$) を選んでおき, これの定める局所的に定義された

同型 $M_r(\mathcal{O}_X)\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(E)$ をも I と書くことにする. 以上の local trivialization のもとで, $\mathcal{A}_{E,\pi}$ の $\mathcal{K}_E$ への作用は以下のように表示される:

$$\begin{aligned}
&a=\sum_{m=1}^{M}\mu_m(s)\frac{\partial}{\partial s_m}+\tau(s;z)\frac{\partial}{\partial z}+I(A(s;z))\in\mathcal{A}_{E,\pi}\qquad (A(s;z)\in M_r(\mathcal{O}_X)),\\
&\phi=\phi(s;z_1,z_2)\,dz_2\in\mathcal{K}_E
\end{aligned}$$

に対して,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lie}(a)(\phi)=\Big[&\sum_{m=1}^{M}\mu_m(s)\frac{\partial}{\partial s_m}\phi(s;z_1,z_2)\\
&+\tau(s;z_1)\frac{\partial}{\partial z_1}\phi(s;z_1,z_2)+\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\phi(s;z_1,z_2)\tau(s;z_2)\right)\\
&+A(s;z_1)\phi(s;z_1,z_2)-\phi(s;z_1,z_2)A(s;z_2)\Big]\,dz_2.
\end{aligned}$$

$\delta\colon\mathcal{K}_E\to\mathcal{D}_{E/S}$ は $\mathcal{A}_{E,\pi}$-homomorphism である.

$\omega=\omega_{X/S}=\Omega^1_{X/S}$ への $\mathcal{T}_{X,\pi}$ の左からの作用 Lie を次のように定義できる:

$$a=\sum_{m=1}^{M}\mu_m(s)\frac{\partial}{\partial s_m}+\tau(s;z)\frac{\partial}{\partial z}\in\mathcal{T}_{X,\pi}\qquad \xi=\xi(s;z)\,dz\in\omega$$

に対して,

$$\mathrm{Lie}(a)(\xi)=\left[\sum_{m=1}^{M}\mu_m(s)\frac{\partial}{\partial s_m}\xi(s;z)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau(s;z)\xi(s;z)\right)\right]dz.$$

$\mathcal{A}_{E,\pi}$ の $\mathcal{T}_{X,\pi}$ を経由した ω への作用も Lie と書くことにする.

2.8 relative Atiyah algebroid の trace ω-extension

まず, X 上の vector bundle E に付随する relative Atiyah algebroid $\mathcal{A}_{E/S}$ の **trace ω-extension** ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E/S}$ を定義しよう. $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(E)$ から $\mathcal{O}_X$ への trace map を tr と書き, 自然な写像の列

$$\mathcal{K}_E^{-1}\longrightarrow\mathcal{K}_E^{-1}/\mathcal{K}_E^{-2}=\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(E)\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega\xrightarrow{\mathrm{tr}\otimes\mathrm{id}}\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega=\omega$$

の合成も tr と書くことにしよう. $\delta^{-1}(\mathcal{A}_{E/S})\subseteq\mathcal{K}_E^1$ の $\mathrm{tr}\colon\mathcal{K}_E^{-1}\to\omega$ の kernel による quotient を ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E/S}$ と書き, $\mathcal{A}_{E/S}$ の trace ω-extension と呼ぶ ([BS]). このとき, 次の可換図式が成立している:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_E^{-1} & \longrightarrow & \mathcal{K}_E^{1} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}_{E/S}^1 & \longrightarrow & 0\\
 & & \Vert & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_E^{-1} & \longrightarrow & \delta^{-1}(\mathcal{A}_{E/S}) & \longrightarrow & \mathcal{A}_{E/S} & \longrightarrow & 0\\
 & & \mathrm{tr}\downarrow & & \downarrow & & \Vert & & \\
0 & \longrightarrow & \omega & \xrightarrow{\iota} & {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E/S} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}_{E/S} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

横の列は全て exact である．${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E/S}$ から $\mathcal{A}_{E/S}$ への自然な surjection をも δ と書くことにした．$\mathcal{K}_E^1$, $D_{E/S}^1$ はそれぞれ $\mathcal{K}_E$, $\mathcal{D}_{E/S}$ の $\mathcal{A}_{E,\pi}$-submodule であり, $\delta\colon \mathcal{K}_E^1 \to \mathcal{D}_{E/S}^1$ は $\mathcal{A}_{E,\pi}$-homomorphism である．よって, その kernel $\mathcal{K}_E^{-1}$ は $\mathcal{A}_{E,\pi}$-submodule である．$\mathrm{tr}\colon \mathcal{K}_E^{-1} \to \omega$ は $\mathcal{A}_{E,\pi}$-homomorphism であることもすぐにわかる．よって, 上の図式の最後の列は $\mathcal{A}_{E,\pi}$-homomorphism によって構成された sequence になる．

ちなみに, $\mathcal{A}_{E/S}$ に制限せずに作った ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{D}_{E/S} = \mathcal{K}_E / \operatorname{Ker}(\mathrm{tr})$ は $W_{1+\infty}$-algebra に関係している．${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E/S}$ は curve と vector bundle の組の無限小変形および determinant bundle $\det R\pi_* E$ と関係しているが, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{D}_{E/S}$ に対しても同様に何らかの幾何的な解釈があれば大変面白い．

以下においては, 簡単のため, 代数群 G は simple であると仮定する．その Lie 環 $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ の dual Coxeter number を $h^\vee$ と書くことにする．(例えば, $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_n$ のとき $h^\vee = n$.) $\mathfrak{g}$ の Killing form の $(2h^\vee)^{-1}$ 倍を $(.|.)$ と表わす．この $(.|.)$ が induce する写像 $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}} \times \mathfrak{g}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{O}_X$ も同じ記号で表わすことにする．このとき, 定義より,

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}}(\mathrm{ad}(a)\,\mathrm{ad}(b)) = 2h^\vee (a|b) \qquad \text{for} \quad a, b \in \mathfrak{g}_{\mathcal{P}}.$$

上の状況において, $E = \mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ の場合を考える．${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}/S}$ から $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}/S}$ への自然な surjection δ による, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S} \subseteq \mathcal{A}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}/S}$ の inverse image を ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$ と書き, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$ の trace ω-extension と呼ぶ．$A_{\mathcal{P}/S}$ は $A_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}/S}$ の $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi}$-submodule なので, 次の自然な exact sequence は $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi}$-homomorphism によって構成されている:

$$0 \longrightarrow \omega \xrightarrow{\ \iota\ } {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S} \xrightarrow{\ \delta\ } \mathcal{A}_{\mathcal{P}/S} \longrightarrow 0.$$

${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$ を利用して affine Lie algebra を自然に構成することができる．その場合の自然な level は $k = -2h^\vee$ である．詳しいことは後で説明する．

この subsection の最初の段落において, $E = \mathcal{O}_X$ の場合を考える．$\delta^{-1}(\mathcal{T}_{X/S}) \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{O}_X}^1$ の $\operatorname{Ker}(\mathrm{tr}) \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{O}_X}^{-1}$ による quotient を ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{X/S}$ と書き, relative tangent sheaf の trace ω-extension と呼ぶことにする．次の自然な exact sequence は $\mathcal{T}_{X,\pi}$-homomorphism によって構成されている:

$$0 \longrightarrow \omega \xrightarrow{\ \iota\ } {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{X/S} \xrightarrow{\ \delta\ } \mathcal{T}_{X/S} \longrightarrow 0.$$

${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{X/S}$ を利用して, Virasoro algebra を自然に構成することができる．その場合の自然な central charge は $c = 2$ である．詳しいことは後で説明する．

2.9 dg Lie algebra ${}^V\mathcal{A}_E^{\bullet}$ の定義

X 上の sheaf の complex $\mathcal{A}_E^{\bullet}$ を定義しよう．$\mathcal{A}_E^{-1} = \mathcal{A}_{E/S}$, $\mathcal{A}_E^0 = \mathcal{A}_{E,\pi}$ と置き, $p \neq -1, 0$ のとき $\mathcal{A}_E^p = 0$ と置く．唯一 non-trivial な coboundary map $\mathcal{A}_E^{-1} \to \mathcal{A}_E^0$ は $\mathcal{A}_{E/S}$ の $\mathcal{A}_{E,\pi}$ の中への自然な inclusion であるとする．さらに, $\mathcal{A}_E^{\bullet}$ には differential graded Lie algebra (以下, dg Lie algebra と略) の構造が自然に入る．すなわち, $a, b \in \mathcal{A}_E^0$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_E^{-1}$ に対して, bracket が次のように定義される:

$$[a, b] = (\mathcal{A}_{E,\pi} \text{ の中での } [a, b]), \qquad [a, \beta] = (\mathcal{A}_{E,\pi} \text{ の中での } [a, \beta]), \qquad [\alpha, \beta] = 0.$$

これと同様に, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{-1} = \mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{0} = \mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi}$ と置き, $p \neq -1, 0$ のとき $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{p} = 0$ と置くことによって, dg Lie algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\bullet}$ が定まる. また, $\mathcal{T}_X^{-1} = \mathcal{T}_{X/S}$, $\mathcal{T}_X^{0} = \mathcal{T}_{X,\pi}$ と置き, $p \neq -1, 0$ のとき $\mathcal{T}_X^{p} = 0$ と置くことによって, dg Lie algebra $\mathcal{T}_X^{\bullet}$ が定まる. $\mathcal{A}_E^{\bullet}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\bullet}$ と $\mathcal{T}_X^{\bullet}$ は complex として $\pi^{-1}\mathcal{T}_S$ と quasi-isomorphic である.

以下のおいては少なくとも π に関して fiberwise に Zariski topology で扱わねばならない. π に関して relative な differential を $d : \mathcal{O}_X \to \omega = \Omega^1_{X/S}$ と書くことにする. Zariski topology においては $d\mathcal{O}_X \neq \omega$ である. $\omega \subseteq {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E/S}$ であるとみなし,

$$ {}^V\!\mathcal{A}_E^{-1} = {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E/S}/d\mathcal{O}_X, \qquad {}^V\!\mathcal{A}_E^{0} = \mathcal{A}_{E,\pi} $$

と置き, $p \neq -1, 0$ のとき, ${}^V\!\mathcal{A}_E^{p} = 0$ と置く. ${}^V\!\mathcal{A}_E^{-1}$ から${}^V\!\mathcal{A}_E^{0}$ への coboundary map を線型常微分作用素の核函数表示によって得られる写像を δ とすることによって, sheaf の complex ${}^V\!\mathcal{A}_E^{\bullet}$ が定まる. $a, b \in {}^V\!\mathcal{A}_E^{0}$, $\alpha, \beta \in {}^V\!\mathcal{A}_E^{-1}$ に対して,

$$ [a, b] = (\mathcal{A}_{E,\pi} \text{ の中での } [a, b]), \qquad [a, \beta] = \mathrm{Lie}(a)(\beta), \qquad [\alpha, \beta] = 0 $$

と定めることによって, ${}^V\!\mathcal{A}_E^{\bullet}$ に dg Lie algebra の構造が定まる.

以上の定義のもとで, 次の自然な可換図式が得られる.

$$ \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega/d\mathcal{O}_X & \longrightarrow & {}^V\!\mathcal{A}_E^{-1} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}_E^{-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & {\scriptstyle\delta}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ & & & & {}^V\!\mathcal{A}_E^{0} & = & \mathcal{A}_E^{0}. & & \end{array} $$

この上の行は exact である. すなわち, 次の exact sequence を得た:

$$ 0 \longrightarrow (\omega/d\mathcal{O}_X)[1] \longrightarrow {}^V\!\mathcal{A}_E^{\bullet} \longrightarrow \mathcal{A}_E^{\bullet} \longrightarrow 0. $$

${}^V\!\mathcal{A}_E^{\bullet} \to \mathcal{A}_E^{\bullet}$ は dg Lie algebra homomorphism であり, ${}^V\!\mathcal{A}_E^{\bullet}$ は $\mathcal{A}_E^{\bullet}$ の $(\omega/d\mathcal{O}_X)[1]$ による extension である.

一般に, complex $0 \to A^{-1} \xrightarrow{\delta} A^0 \to 0$ に dg Lie algebra structure $[.,.]$ が入っているとき, A^{-1} に Lie algebra structure $[.,.]_V$ を次の式によって入れることができる:

$$ [\alpha, \beta]_V = [\delta(\alpha), \beta] = [\alpha, \delta(\beta)]. $$

この bracket を V-bracket と呼ぶことにする. (V は Virasoro algebra の V.)

2.10 dg Lie algebra ${}^V\!\mathcal{A}_E^{\bullet}$ の局所表示

${}^V\!\mathcal{A}_E^{\bullet}$ の dg Lie algebra structure および V-bracket を local trivialization を使って具体的に書き下すとどのようになるかを計算しよう. Subsection 2.7 と同じように local coordinate $(s; z)$ と vector bundle E の local trivialization I を取る. ${}^V\!\mathcal{A}_E^{\bullet}$ を local に以下のように表現しておく:

(1) 局所的に定義された surjection $t^{-1}_{(s,z,I)} : \mathcal{O}_X \oplus M_r(\mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow {}^V\!\mathcal{A}_E^{-1} = {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E/S}/d\mathcal{O}_X$ を次のように定義する:

$$ t^{-1}_{(s,z,I)}(\sigma, B, \xi) = I\left[\frac{\sigma(z_1)}{(z_2 - z_1)^2} + \frac{B(z_1)}{z_2 - z_1} + \frac{1}{r}\xi(z_1)\right] dz_2 \mod d\mathcal{O}_X $$

(2) 局所的に定義された isomorphism $t^0_{(s,z,I)}\colon \pi^{-1}\mathcal{O}_S^M \oplus \mathcal{O}_X \oplus M_r(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} {}^V\!\mathcal{A}_E^0 = \mathcal{A}_{E,\pi}$ を次のように定義する:

$$t^0_{(s,z,I)}(\mu,\tau,A) = \mu\cdot\frac{\partial}{\partial s} + \tau(z)\frac{\partial}{\partial z} + I(A(z)).$$

ここで, $\mu\cdot\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{m=1}^M \mu_m(s)\frac{\partial}{\partial s_m}$ なる略記法を用いた. また, 座標 s は書くのが面倒なので略した. さらにスペースを省略するために,

$$(\sigma,B,\xi) = (\sigma,B,\xi)_{(s,z,I)} = t^{-1}_{(s,z,I)}(\sigma,B,\xi), \qquad (\mu,\tau,A) = (\mu,\tau,A)_{(s,z,I)} = t^0_{(s,z,I)}(\mu,\tau,A)$$

などと書いたりする. このとき,

$$(\sigma,B,\xi), (\sigma_i,B_i,\xi_i) \in {}^V\!\mathcal{A}_E^{-1}, \qquad (\mu,\tau,A), (\mu_i,\tau_i,A_i) \in \mathcal{A}_E^0$$

に対して,

$$\begin{aligned}
[(\mu,\tau,A),(\sigma,B,\xi)] &= \Big(\mu\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} + \tau\sigma' - \sigma\tau', \quad \mu\cdot\frac{\partial B}{\partial s} + \tau B' - \sigma A' + [A,B], \\
&\qquad \mu\cdot\frac{\partial\xi}{\partial s} + (\tau\xi)' + \frac{r}{6}\tau'''\sigma + \operatorname{tr}\big(\frac{1}{2}(\tau'' A - \sigma B'') - A'B\big)\Big), \\
[(\mu_1,\tau_1,A_1),(\mu_2,\tau_2,A_2)] &= \Big(\mu_1\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial s} - \mu_2\cdot\frac{\partial\mu 1}{\partial s}, \quad \mu_1\cdot\frac{\partial\tau_2}{\partial s} - \mu_2\cdot\frac{\partial\tau_1}{\partial s} + \tau_1\tau_2' - \tau_2\tau_1', \\
&\qquad \mu_1\cdot\frac{\partial A_2}{\partial s} - \mu_2\cdot\frac{\partial A_1}{\partial s} + \tau_1 A_2' - \tau_2 A_1' + [A_1,A_2]\Big).
\end{aligned}$$

ここで, $'$ は $\frac{\partial}{\partial z}$ を意味し, $r = \operatorname{rank} E$ である. ($\operatorname{tr} 1 = r$ となることに注意せよ.) また, $\delta((\sigma,B,\xi)) = (0,\sigma,B)$ であるから, V-bracket は次のようになる:

$$\begin{aligned}
[(\sigma_1,B_1,\xi_1),(\sigma_2,B_2,\xi_2)]_V = \Big(&\sigma_1\sigma_2' - \sigma_2\sigma_1', \quad \sigma_1 B_2' - \sigma_2 B_1' + [B_1,B_2], \\
&\frac{r}{6}\sigma_1'''\sigma_2 + \operatorname{tr}\big(\frac{1}{2}(\sigma_1'' B_2 - \sigma_2 B_1'') - B_1' B_2\big)\Big).
\end{aligned}$$

これは, $B_i = 0$ ならば Virasoro algebra の relation の形をしている. $\operatorname{tr}(B_i) = 0$ ならば affine Lie algebra と Virasoro algebra の半直積の relation の形になる. ${}^V\!\mathcal{A}_E^{\bullet}$ の local trivialization の gauge 変換と fiber に沿った local coordinate z の変換に関しては以下が成立している. $g \in GL_r(\mathcal{O}_X)$ および別の local coordinate w に対して,

$$\begin{aligned}
(\mu,\tau,A)_{(s,z,Ig)} &= \Big(\mu,\ \tau,\ -\big(\mu\cdot\frac{\partial g}{\partial s} + \tau g'\big)g^{-1} + gAg^{-1}\Big)_{(s,z,I)}, \\
(\sigma,B,\xi)_{(s,z,Ig)} &= \Big(\sigma,\ -\sigma g' g^{-1} + gBg^{-1},\ \operatorname{tr}\big(\sigma((g'g^{-1})^2 - \frac{1}{2}g''g^{-1}) - Bg'g^{-1}\big) + \xi\Big)_{(s,z,I)}, \\
(\sigma,B,\xi)_{(s,w,I)} &= \Big(\sigma w'^{-1},\ B,\ \frac{r}{6}\sigma w'^{-1}\{w,z\} + \frac{1}{2}w'' w'^{-1}\operatorname{tr} B + \xi w'\Big)_{(s,z,I)}.
\end{aligned}$$

ここで, $\{w,z\}$ は w の z に関する Schwarzian derivative であり, $\{w,z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$ と定義される.

2.11 ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{P}}$ と ${}^V\mathcal{T}^\bullet_X$ の定義

まず, ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{P}}$ を定義しよう. 前 subsection の状況において, $E = \mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ の場合を考える. ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S} \subseteq {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}/S}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi} \subseteq \mathcal{A}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}},\pi}$, が成立しているのであった. そこで,

$$ {}^V\mathcal{A}^{-1}_{\mathcal{P}} = {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}/d\mathcal{O}_X \subseteq {}^V\mathcal{A}^{-1}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}}, \quad {}^V\mathcal{A}^0_{\mathcal{P}} = \mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi} \subseteq {}^V\mathcal{A}^{-1}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}} $$

と置き, $p \neq -1, 0$ のとき ${}^V\mathcal{A}^p_{\mathcal{P}} = 0$ と置く. このとき, ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{P}}$ は ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}}$ の dg Lie subalgebra になる. ${}^V\mathcal{A}^{-1}_{\mathcal{P}}$ は V-bracket によって, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$ の $\omega/d\mathcal{O}_X$ による central extension になる. この場合は, $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ の元とその $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ 自身への adjoint action を同一視したのだから, 上の local formula のところで触れた "$\mathrm{tr}(B_i) = 0$" の条件が満たされている. よって, V-bracket の local formula はちょうど affine Lie algebra と Virasoro algebra の半直積の relation の形と同じになる.

上と同様に ${}^V\mathcal{T}^\bullet_X$ を定義しよう. 今度は $E = \mathcal{O}_X$ の場合を考える. ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{X/S} \subseteq {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{O}_X/S}$, $\mathcal{T}_{X,\pi} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{O}_X,\pi}$, が成立しているのであった. そこで,

$$ {}^V\mathcal{T}^{-1}_X = {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{X/S}/d\mathcal{O}_X \subseteq {}^V\mathcal{A}^{-1}_{\mathcal{O}_X}, \qquad {}^V\mathcal{T}^0_X = \mathcal{T}_{X,\pi} \subseteq {}^V\mathcal{A}^0_{\mathcal{O}_X} $$

と置き, $p \neq -1, 0$ のとき ${}^V\mathcal{T}^p_X = 0$ と置く. このとき, ${}^V\mathcal{T}^\bullet_X$ は ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{O}_X}$ の dg Lie subalgebra になる. ${}^V\mathcal{T}^{-1}_X$ は V-bracket によって, $\mathcal{T}_{X/S}$ の $\omega/d\mathcal{O}_X$ による central extension になる. この場合は, 上の local formula のところで触れた "$B_i = 0$" の条件が常に満たされている. よって, V-bracket の local formula はちょうど Virasoro algebra の relation の形と同じになる.

2.12 ${}^V\mathcal{T}^\bullet_c$ の定義とその局所表示

$\mathcal{H} = \omega/d\mathcal{O}_X$ と置く. $\mathcal{H}[1]$ は ${}^V\mathcal{T}^\bullet_X$ と ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{P}}$ の dg Lie ideal である. $c \in \mathbb{C}$ に対する $\mathcal{T}^\bullet_c$ を定義しよう. 写像 f_c を

$$ f_c \colon \mathcal{H}[1] \times \mathcal{H}[1] \to \mathcal{H}[1], \qquad (\xi, \eta) \mapsto \frac{c}{2}\xi + \eta $$

と定める. f_c の kernel は dg Lie algebra としての直積 ${}^V\mathcal{T}^\bullet_X \times \mathcal{H}[1]$ の ideal とみなせる. dg Lie algebra ${}^V\mathcal{T}^\bullet_c$ を次の式によって定める:

$$ {}^V\mathcal{T}^\bullet_c = ({}^V\mathcal{T}^\bullet_X \times \mathcal{H}[1]) / \operatorname{Ker} f_c. $$

自然な写像の列 $\mathcal{H}[1] \to 0 \times \mathcal{H}[1] \to {}^V\mathcal{T}^\bullet_X \times \mathcal{H}[1]$ の合成が誘導する injection $\mathcal{H}[1] \to {}^V\mathcal{T}^\bullet_c$ を ι_c と書き, $\mathcal{H}[1]$ と ι_c の像を同一視する. ${}^V\mathcal{T}^\bullet_c$ は $\mathcal{T}^\bullet_X$ の $\mathcal{H}[1]$ による extension である. $c = 2$ のとき ${}^V\mathcal{T}^\bullet_c$ は $\mathcal{H}[1]$ の inclusion も込めて ${}^V\mathcal{T}^\bullet$ と同型である. $c = 0$ のとき ${}^V\mathcal{T}^\bullet_c$ は $\mathcal{T}^\bullet_X \times \mathcal{H}[1]$ と同型である. $c \neq 0$ とし $\mathcal{T}^\bullet_c$ を local に次のように表わしておく:

(1) 局所的に定義された surjection ${t_c^{-1}}_{(s,z)} \colon \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow {}^V\mathcal{T}^{-1}_c$ を次のように定義する:

$$ {t_c^{-1}}_{(s,z)}(\sigma, \xi) = \left(\left[\frac{\sigma(z_1)}{(z_2 - z_1)^2} + 0 \right] dz_2, \quad \xi(z)\, dz \mod d\mathcal{O}_X \right) \mod \operatorname{Ker} f_c. $$

$c \neq 0$ のとき, これは次のようにも書ける:

$$t_c^{-1}{}_{(s,z)}(\sigma,\xi) = \left(\left[\frac{\sigma(z_1)}{(z_2-z_1)^2} + \frac{2}{c}\xi(z_2)\right] dz_2 \mod d\mathcal{O}_X, \quad 0\right) \mod \operatorname{Ker} f_c.$$

(2) 局所的に定義された isomorphism $t^0_{c(s,z)} \colon \pi^{-1}\mathcal{O}_S^M \oplus \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} {}^V\mathcal{T}_c^0$ を次のように定義する:

$$t^0_{c(s,z)}(\mu,\tau) = \mu\cdot\frac{\partial}{\partial s} + \tau(z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

このとき,

$$(\sigma,\xi) = (\sigma,\xi)_{(s,z)} = t_c^{-1}{}_{(s,z)}(\sigma,\xi),$$
$$(\mu,\tau) = (\mu,\tau)_{(s,z)} = t^0_{c(s,z)}(\mu,\tau)$$

などと書くと,

$$[(\mu,\tau),(\sigma,\xi)] = \left(\mu\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} + \tau\sigma' - \sigma\tau', \quad \mu\cdot\frac{\partial\xi}{\partial s} + (\tau\xi)' + \frac{c}{2}\tau'''\sigma\right),$$
$$[(\sigma_1,\xi_1),(\sigma_2,\xi_2)]_V = \left(\sigma_1\sigma_2' - \sigma_2\sigma_1', \quad \frac{c}{12}\sigma_1'''\sigma_2\right).$$

最後の式は central charge c の Virasoro algebra の relation に一致する.

2.13 ${}^V\mathcal{A}_k^{\bullet}$ の定義とその局所表示

$k \in \mathbb{C}$ に対して, ${}^V\mathcal{A}_k^{\bullet}$ を定義しよう. 写像 f_k を

$$f_k \colon \mathcal{H}[1] \times \mathcal{H}[1] \to \mathcal{H}[1], \qquad (\xi,\eta) \mapsto -\frac{k}{2h^\vee}\xi + \eta$$

と定める. f_k の kernel は dg Lie algebra としての直積 ${}^V\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\bullet} \times \mathcal{H}[1]$ の ideal とみなせる. dg Lie algebra ${}^V\mathcal{A}_k^{\bullet}$ を次の式によって定める:

$${}^V\mathcal{A}_k^{\bullet} = ({}^V\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\bullet} \times \mathcal{H}[1]) / \operatorname{Ker} f_k.$$

$\mathcal{H}[1] \to 0 \times \mathcal{H}[1] \to {}^V\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\bullet} \times \mathcal{H}[1]$ の合成が誘導する $\mathcal{H}[1] \to {}^V\mathcal{A}_k^{\bullet}$ を ι_k と書き, $\mathcal{H}[1]$ と ι_k の像を同一視する. ${}^V\mathcal{A}_k^{\bullet}$ は $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\bullet}$ の $\mathcal{H}[1]$ による central extension である. $k = -2h^\vee$ のとき ${}^V\mathcal{T}_c^{\bullet}$ は $\mathcal{H}[1]$ の inclusion も込めて ${}^V\mathcal{A}_{\mathcal{P}}^{\bullet}$ と同型である. $k = 0$ のとき ${}^V\mathcal{A}_k^{\bullet}$ は $\mathcal{A}^{\bullet} \times \mathcal{H}[1]$ と同型である. 簡単のため $k \neq 0$ であるとする. I は局所的に定義された $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_X) = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_X$ から $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ への $\mathcal{O}_X$ 上の Lie algebra homomorphism であるとする. ${}^V\mathcal{A}_k^{\bullet}$ を local に次のように表わしておく:

(1) 局所的に定義された surjection $t_k^{-1}{}_{(s,z,I)} \colon \mathcal{O}_X \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow {}^V\mathcal{A}_k^{-1}$ を次のように定義する:

$$t_k^{-1}{}_{(s,z,I)}(\sigma,B,\xi) = \left(I\left[\frac{\sigma(z_1)}{(z_2-z_1)^2} + \frac{B(z_1)}{z_2-z_1} + \frac{1}{\dim\mathfrak{g}}0\right] dz_2, \quad \xi(z)\,dz \mod d\mathcal{O}_X\right).$$

$k \neq 0$ のとき, これは次のようにも書ける:

$$t_k^{-1}{}_{(s,z,I)}(\sigma,B,\xi) = \left(I\left[\frac{\sigma(z_1)}{(z_2-z_1)^2} + \frac{B(z_1)}{z_2-z_1} - \frac{2h^\vee}{k\dim\mathfrak{g}}\xi(z_2)\right] dz_2 \mod d\mathcal{O}_X, \quad 0\right).$$

(2) 局所的に定義された isomorphism $t^0_{k(s,z,I)}\colon \pi^{-1}\mathcal{O}^M_S \oplus \mathcal{O}_X \oplus \mathfrak{g}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} {}^V\mathcal{A}^0_E = {}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E,\pi}$ を次のように定義する:

$$t^0_{k(s,z,I)}(\mu,\tau,A) = \mu\cdot\frac{\partial}{\partial s} + \tau(z)\frac{\partial}{\partial z} + I(A(z)).$$

このとき,

$$\begin{aligned}(\sigma,B,\xi) &= (\sigma,B,\xi)_{(s,z,I)} = t^{-1}_{k\ (s,z,I)}(\sigma,B,\xi),\\ (\mu,\tau,A) &= (\mu,\tau,A)_{(s,z,I)} = t^0_{k(s,z,I)}(\mu,\tau,A)\end{aligned}$$

などと書くと次が成立する:

$$\begin{aligned}[(\mu,\tau,A),(\sigma,B,\xi)] = \Big(&\mu\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} + \tau\sigma' - \sigma\tau',\quad \mu\cdot\frac{\partial B}{\partial s} + \tau B' - \sigma A' + [A,B],\\ &\mu\cdot\frac{\partial\xi}{\partial s} + (\tau\xi)' - \frac{k\dim\mathfrak{g}}{h^\vee}\tau'''\sigma + k(A'|B)\Big).\end{aligned}$$

${}^V\mathcal{A}^\bullet_E$ の式において $r = \dim\mathfrak{g}$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(A')\,\mathrm{ad}(B)) = 2h^\vee(A'|B)$ であることに注意すれば, この式は容易に導かれる. よって, V-bracket の局所表示は次のようになる:

$$\begin{aligned}[(\sigma_1,B_1,\xi_1),(\sigma_2,B_2,\xi_2)]_V = \Big(&\sigma_1\sigma_2' - \sigma_2\sigma_1',\quad \sigma_1B_2' - \sigma_2B_1' + [B_1,B_2],\\ &-\frac{k\dim\mathfrak{g}}{h^\vee}\sigma_1'''\sigma_2 + k(B_1'|B_2)\Big).\end{aligned}$$

この式は level k の affine Lie algebra と central charge $-k\dim\mathfrak{g}/h^\vee$ の Virasoro algebra の半直積の relation に一致する.

2.14 dg Lie algebra ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k}$ の定義と局所的な表示

${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k}$ を定義しよう. $d = c + k\dim\mathfrak{g}/h^\vee$ と置く. ${}^V\mathcal{T}^\bullet_d$, ${}^V\mathcal{A}^\bullet_k$ から $\mathcal{T}^\bullet_X$ への自然な写像が存在する. それに関する fiber product を ${}^V\widetilde{\mathcal{A}}^\bullet_{c,k} = {}^V\mathcal{T}^\bullet_d \times_{\mathcal{T}^\bullet_X} {}^V\mathcal{A}^\bullet_k$ と表わす. 写像 f を

$$f\colon \mathcal{H}[1]\times\mathcal{H}[1] \to \mathcal{H}[1], \qquad (\xi,\eta)\to\xi+\eta$$

と定める. $\operatorname{Ker} f$ を ${}^V\widetilde{\mathcal{A}}^\bullet_{c,k}$ の ideal とみなすことができる. ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k}$ は次のように定義される:

$${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k} = {}^V\widetilde{\mathcal{A}}^\bullet_{c,k}/\operatorname{Ker} f.$$

自然な写像の列 $\mathcal{H}[1] \to \mathcal{H}[1]\times 0 \to {}^V\widetilde{\mathcal{A}}^\bullet_{c,k}$ が誘導する injection $\mathcal{H}[1] \to {}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k}$ を $\iota_{c,k}$ と表わし, その像と $\mathcal{H}[1]$ を同一視する. I は local な $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_X) = \mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}_X$ から $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ への $\mathcal{O}_X$ 上の Lie algebra homomorphism であるとする. ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k}$ を local に次のように表わしておく:

(1) local な surjection $t^{-1}_{(s,z,I)}\colon \mathcal{O}_X \oplus (\mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{O}_X \to {}^V\mathcal{A}^{-1}_{c,k}$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}t^{-1}_{(s,z,I)}(\sigma,B,\xi) &= \Big(t^{-1}_{d\ (s,z)}(\sigma,\xi),\quad t^{-1}_{k\ (s,z,I)}(\sigma,B,0)\Big) \mod \operatorname{Ker} f\\ &= \Big(t^{-1}_{d\ (s,z)}(\sigma,0),\quad t^{-1}_{k\ (s,z,I)}(\sigma,B,\xi)\Big) \mod \operatorname{Ker} f.\end{aligned}$$

(2) local な isomorphism $t^0_{(s,z,I)}\colon \pi^{-1}\mathcal{O}_S^M \oplus \mathcal{O}_X \oplus M_r(\mathcal{O}_X) \to {}^V\!\mathcal{A}^0_{c,k} = \mathcal{T}_{X,\pi} \times_{\mathcal{T}_{X,\pi}} \mathcal{A}_{E,\pi}$ を次のように定義する:

$$t^0_{(s,z,I)}(\mu,\tau,A) = \Big(t^0_{d(s,z)}(\mu,\tau),\ t^0_{k(s,z,I)}(\mu,\tau,A)\Big).$$

このとき,

$$(\sigma,B,\xi) = (\sigma,B,\xi)_{(s,z,I)} = t^{-1}_{(s,z,I)}(\sigma,B,\xi), \qquad (\mu,\tau,A) = (\mu,\tau,A)_{(s,z,I)} = t^0_{(s,z,I)}(\mu,\tau,A)$$

などと書くと,

$$\begin{aligned}[(\mu,\tau,A),(\sigma,B,\xi)] = \Big(&\mu\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} + \tau\sigma' - \sigma\tau', \quad \mu\cdot\frac{\partial B}{\partial s} + \tau B' - \sigma A' + [A,B], \\ &\mu\cdot\frac{\partial\xi}{\partial s} + (\tau\xi)' + \frac{c}{12}\tau'''\sigma + k(A'|B)\Big).\end{aligned}$$

よって, V-bracket は次のようになる:

$$\begin{aligned}[(\sigma_1,B_1,\xi_1),(\sigma_2,B_2,\xi_2)]_V = \Big(&\sigma_1\sigma_2' - \sigma_2\sigma_1', \quad \sigma_1 B_2' - \sigma_2 B_1' + [B_1,B_2], \\ &\frac{c}{12}\sigma_1'''\sigma_2 + k(B_1'|B_2)\Big).\end{aligned}$$

これは, level k の affine Lie algebra と central charge c の Virasoro algebra の半直積の relation に一致する.

2.15 ${}^V\mathcal{T}^{\bullet}_{c,Q}$ と ${}^V\!\mathcal{A}^{\bullet}_{c,k,\mathcal{F}}$ の定義

以上の話においては, π の section q_i や $Q_i = q_i(S)$ 上の quasi parabolic structure $\mathcal{F}_i$ を全く使っていなかった. まず, それらに関連して, いくつか記号を準備しよう.

X 上の divisor $Q = Q_1 \sqcup \cdots \sqcup Q_N$ を保つ vector field の層 $\mathcal{T}_{X,Q}$ を次のように定義する:

$$\mathcal{T}_{X,Q} = \{\, a \in \mathcal{T}_X \mid a(\mathcal{O}_X(-Q)) \subseteq \mathcal{O}_X(-Q)\,\}.$$

$\mathcal{T}_{X,Q}$ の元 a を Q 上に制限すると Q の tangent sheaf $\mathcal{T}_Q$ の元が得られる. これによって, 次の short exact seqence が得られる:

$$0 \to \mathcal{T}_X(-Q) \to \mathcal{T}_{X,Q} \to \mathcal{T}_Q \to 0.$$

$\mathcal{T}_{X/S,Q} = \mathcal{T}_{X/S} \cap \mathcal{T}_{X,Q}$, $\mathcal{T}_{X,\pi,Q} = \mathcal{T}_{X,\pi} \cap \mathcal{T}_{X,Q}$ と置く. $\mathcal{T}_{X/S,Q} = \mathcal{T}_{X/S}(-Q)$ である. $\mathcal{T}^{\bullet}_X$ の dg Lie subalgebra $\mathcal{T}^{\bullet}_{X,Q}$ が $\mathcal{T}^{-1}_{X,Q} = \mathcal{T}_{X/S,Q}$, $\mathcal{T}^0_{X,Q} = \mathcal{T}_{X,\pi,Q}$ によって定義される. ${}^V\mathcal{T}^{\bullet}_{X,Q}$ は ${}^V\mathcal{T}^{\bullet}_X$ と同様に $\pi^{-1}\mathcal{T}_S$ と quasi isomorphic である. $\mathcal{T}_{X/S,Q}$, $\mathcal{T}_{X,\pi,Q}$, $\mathcal{T}^{\bullet}_{X,Q}$ の ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{X/S}$, ${}^V\mathcal{T}^{\bullet}_c$, $\mathcal{A}_{E/S}$, $\mathcal{A}_{E,\pi}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E/S}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_E$, ${}^V\!\mathcal{A}^{\bullet}_E$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P}}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$, ${}^V\!\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P}}$, etc における inverse image をそれぞれ ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{X/S,Q}$, ${}^V\mathcal{T}^{\bullet}_{c,Q}$, $\mathcal{A}_{E/S,Q}$, $\mathcal{A}_{E,\pi,Q}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{E/S,Q}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_{E,Q}$, ${}^V\!\mathcal{A}^{\bullet}_{E,Q}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,Q}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,Q}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,Q}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},Q}$, ${}^V\!\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},Q}$, etc と表わす.

さらに, $\mathcal{P}$ の Q における quasi parabolic structure $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{F}_N$ も考えよう. $\mathcal{A}_{\mathcal{P},Q}$ の元 a の Q 上への制限は $\mathcal{P}$ の Q 上への制限 $\mathcal{P}_Q$ の Atiyah algebroid $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_Q}$ の元を

定める．それを $a|_Q$ と表わす．$\mathcal{F}$ の Atiyah algebroid $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ は自然に $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_Q}$ の subalgebroid とみなせる．X 上の quasi parabolic G-bundle $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ を保つ infinitesimal symmetry の sheaf $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$ が次のように定義される:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P},\mathcal{F}} = \{\, a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P},Q} \mid a|_Q \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \,\}.$$

$\mathcal{F}$ の adjoint bundle を $\mathfrak{b}_{\mathcal{F}}$ と表わすことにしたのであった．$\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ の subalgebra $\mathfrak{g}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$ を

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{P},\mathcal{F}} = \{\, A \in \mathfrak{g}_{\mathcal{P}} \mid A|_Q \in \mathfrak{b}_{\mathcal{P}} \,\}$$

と定めると, 次の short exact seqence が得られる:

$$0 \to \mathfrak{g}_{\mathcal{P},\mathcal{F}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{P},\mathcal{F}} \to \mathcal{T}_{X,Q} \to 0.$$

さらに, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,\mathcal{F}} = \mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,Q} \cap \mathcal{A}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,\mathcal{F}} = \mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,Q} \cap \mathcal{A}_{X,\mathcal{F}}$ と置く．$\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P}}$ の dg Lie subalgebra $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$ が $\mathcal{A}^{-1}_{\mathcal{P},\mathcal{F}} = \mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,\mathcal{F}}$, $\mathcal{A}^{0}_{\mathcal{P},\mathcal{F}} = \mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,\mathcal{F}}$ によって定義される．$\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$ は $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P}}$ と同様に $\pi^{-1}\mathcal{T}_S$ と quasi isomorphic である．さらに, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,\mathcal{F}}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$ の ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P}}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P}}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{c,k}$ における inverse image をそれぞれ ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,\mathcal{F}}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{c,k,\mathcal{F}}$ と表わす．

2.16 Picard algebroid と tdo の層

この subsection の詳しい内容については [BS], [BB2] などを参照せよ．この subsection で定義される Picard algebroid は [BS] における $\mathcal{O}_S$-Atiyah algebra と同じものである．

Picard algebroid を定義しよう．$(\mathcal{A}, \varepsilon, \iota)$ が S 上の Picard algebroid であるとは以下の条件が成立していることである:

(1) $\mathcal{A}$ は left $\mathcal{O}_S$-module かつ $\mathbb{C}_S$ 上の Lie algebra である．
(2) ε は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{T}_S$ への $\mathcal{O}_S$-homomorphism でかつ Lie algebra homomorphism である．
(3) ι は $\mathcal{O}_S$ から $\mathcal{A}$ への $\mathcal{O}_S$-homomorphism でかつ, その像は $\mathcal{A}$ の可換な Lie subalgebra になっている．
(4) ε, ι より short exact sequence $0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{A} \to \mathcal{T}_S \to 0$ が得られる．
(5) ι の像と $\mathcal{O}_S$ を同一視すると, $f, g \in \mathcal{O}_S$, $a, b \in \mathcal{A}$ に対して,

$$[a, fg] = [a, f]g + f[a, g], \qquad [a, fb] = \varepsilon(a)(f)b + f[a, b].$$

S 上の Picard algebroid の典型的な例は S 上の line bundle L に対する Atiyah algebroid $\mathcal{A}_L$ である．$\mathcal{A}$ が Picard algebroid のとき, $\mathcal{A}$ に right $\mathcal{O}_S$-module structure を

$$af = fa + \varepsilon(a)f \qquad \text{for} \quad a \in \mathcal{A}, f \in \mathcal{O}_S$$

と定めることができる．

Picard algebroid の morphism を定義しよう．$(\mathcal{A}, \varepsilon_{\mathcal{A}}, \iota_{\mathcal{A}})$, $(\mathcal{B}, \varepsilon_{\mathcal{B}}, \iota_{\mathcal{B}})$ が共に Picard algebroid であるとき, ϕ が $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への Picard algebroid の morphism であるとは, 以下の条件が成立していることである:

(1) ϕ は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への $\mathcal{O}_S$-homomorphism でかつ Lie algebra homomorphism である．

(2) $\phi \circ \varepsilon_{\mathcal{B}} = \varepsilon_{\mathcal{A}}$ かつ $\phi \circ \iota_{\mathcal{A}} = \iota_{\mathcal{B}}$.

Picard algebroid の表現を定義しよう. Picard algebroid $\mathcal{A}$ に対して, M が $\mathcal{A}$ の左表現であるとは以下が成立していることである:

(1) M は quasi coherent $\mathcal{O}_S$-module である.
(2) $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}_S$ 上の Lie algebra とみたとき, M は left $\mathcal{A}$-module である.
(3) $1 = \iota(1) \in \mathcal{A}$ は M に 1 として作用する.
(4) $f \in \mathcal{O}_S$, $a \in \mathcal{A}$, $v \in M$ に対して,

$$(fa)v = f(av), \qquad a(fv) = \varepsilon(a)(f)v + f(av).$$

このとき, M は Picard algebroid $\mathcal{A}$ に対する left $\mathcal{A}$-module であると言う. $\mathcal{A}$-module の間の morphism も自然に定義される. S 上の line bundle L は自然に left $\mathcal{A}_L$-module である.

Picard algebroid の圏には "$\mathbb{C}$-vector space structure" 自然に入ることを説明しよう. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は S 上の Picard algebroid であるとし, $\mu \in \mathbb{C}$ であるとする. Picard algebroid の和 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ とスカラー倍 $\mu \cdot \mathcal{A}$ は次のように定義される:

$$\mathcal{A}+\mathcal{B} = \frac{\mathcal{A} \times_{\mathcal{T}_S} \mathcal{B}}{(1,-1)\mathcal{O}_S}, \qquad \mu \cdot \mathcal{A} = \frac{\mathcal{A} \times_{\mathcal{T}_S} \mathcal{A}_{\mathcal{O}_S}}{(1,-\mu)\mathcal{O}_S}.$$

それぞれの Lie algebroid structure は自然に定義される. ただし, $\mathcal{O}_S$ の $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mu\cdot\mathcal{A}$ への埋め込みはそれぞれ $\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S \times \{0\} \to \mathcal{A} \times_{\mathcal{T}_S} \mathcal{B}$, $\mathcal{O}_S \to \{0\} \times \mathcal{O}_S \to \mathcal{A} \times_{\mathcal{T}_S} \mathcal{A}_{\mathcal{O}_S}$ から誘導されるものとする. 加法の零元は $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_S} = \mathcal{D}^1_{\mathcal{O}_X}$ である. この "$\mathbb{C}$-vector space structure" は以下を満たしている. S 上の任意の line bundle L_1, L_2 と任意の $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ に対して, $m_1 \cdot \mathcal{A}_{L_1} + m_2 \cdot \mathcal{A}_{L_2}$ は $L = L_1^{\otimes m_1} \otimes L_2^{\otimes m_2}$ に付随する Picard algebroid $\mathcal{A}_L$ に同型である. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ が Picard algebroid であり, M, N がそれぞれの表現であるとき, $M \otimes_{\mathcal{O}_S} N$ は自然に $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ の表現とみなせる. S 上の Picard algebroid の同型類全体のなす vector space は $\mathbb{H}^2(S, \sigma_{\geq 1}\Omega^\bullet_S)$ に自然に同型である. ここで, $C^\bullet = \sigma_{\geq 1}\Omega^\bullet_S$ は, $C^0 = 0$, $p \geq 1$ のとき $C^p = \Omega^p_S$ によって定まる $\Omega^\bullet_S$ の subcomplex である. S 上の line bundle L に対して, $\mathcal{A}_L$ の同型類に対応する $\mathbb{H}^2(S, \sigma_{\geq 1}\Omega^\bullet_S)$ の元は L の first Chern class に一致する.

S 上の Picard algebroid の圏と S 上の twisted differential operator (tdo) の層の圏は自然に同値になる. Picard algebroid $\mathcal{A}$ に対応する tdo の層を $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ と書くとき, left $\mathcal{A}$-module の圏と left $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$-module の圏は同値になる. よって, twisted D-module を扱うことと, Picard algebroid の表現を扱うことは同じことになる.

2.17 base space S 上の Picard algebroid の構成

この節では, X 上の ${}^V\mathcal{T}^\bullet_c$, ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k}$ を π による derived direct image を考えることによって, S 上の Picard algebroid が自然に構成されることを説明する. どちらも同様なので, 主に ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k}$ の方を扱う. S 上の層 $\mathcal{A}_{c,k}$ を次のように定める:

$$\mathcal{A}_{c,k} = \mathbb{R}^0\pi_*({}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k,\mathcal{F}})$$

以下において, $\mathcal{A}_{c,k}$ に自然に S 上の Picard algebroid の構造が入ることを示そう.

X の代わりに $U = \operatorname{Spec}\widehat{\mathcal{O}}_{X|Q}$ を考えても, $\mathcal{T}_{X/S}$, $\mathcal{T}_{X,\pi}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{X/S}$, $\mathcal{T}^{\bullet}_{X}$, ${}^{V}\mathcal{T}^{\bullet}$, $\mathcal{T}_{X/S,Q}$, $\mathcal{T}_{X,\pi,Q}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{X/S,Q}$, $\mathcal{T}^{\bullet}_{X,Q}$, ${}^{V}\mathcal{T}^{\bullet}_{X,Q}$, ${}^{V}\mathcal{T}^{\bullet}_{c,Q}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P}}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P}}$ $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,\mathcal{F}}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,\mathcal{F}}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,\mathcal{F}}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{c,k,\mathcal{F}}$ と全く同様にして, U 上の $\mathcal{T}_{U/S}$, $\mathcal{T}_{U,\pi}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{U/S}$, $\mathcal{T}^{\bullet}_{U}$, ${}^{V}\mathcal{T}^{\bullet}_{U}$, $\mathcal{T}_{U/S,Q}$, $\mathcal{T}_{U,\pi,Q}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{T}_{U/S,Q}$, $\mathcal{T}^{\bullet}_{U,Q}$, ${}^{V}\mathcal{T}^{\bullet}_{U,Q}$, ${}^{V}\mathcal{T}^{\bullet}_{c,U,Q}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,U}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,U}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,U}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},U}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},U}$ $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,U,\mathcal{F}}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,U,\mathcal{F}}$, ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,U,\mathcal{F}}$, $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},U,\mathcal{F}}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathcal{P},U,\mathcal{F}}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{c,k,U,\mathcal{F}}$ が定義される. U の代わりに $X^* = X - Q$ や $U^* = U - Q$ などを考えても類似のものが定義される. それらを, 例えば ${}^{V}\mathcal{T}^{\bullet}_{c,X^*}$, ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{c,k,U^*}$ のように表わすことにする. U_i, U_i^* についても同様とする.

A 上の dg Lie algebroid $A^{\bullet}_{c,k}$ を以下のように定める. $p \neq -1, 0$ に対して $A^p_{c,k} = 0$ と置く. $\mathcal{H}_{U_i^*} = \omega_{U_i^*/S}/d\mathcal{O}_{U_i^*}$, $\mathcal{H}_{U^*} = \omega_{U^*/S}/d\mathcal{O}_{U^*}$ と置くと, $\mathcal{H}_{U^*} = \mathcal{H}_{U_1^*} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{U_N^*}$. π の fiber に沿った residue によって, 同型

$$\pi_*(\mathcal{H}_{U_i^*}) \simeq \mathcal{O}_S, \qquad \pi_*(\mathcal{H}_{U^*}) \simeq \mathcal{O}_S^N$$

が得られる. 以下, この式の両辺を同一視する. $\Sigma\colon \mathcal{O}_S^N \to \mathcal{O}_S$ を

$$\Sigma(f_1, \dots, f_N) = f_1 + \cdots + f_N$$

によって定める. $\iota_{c,k}\colon \mathcal{H}_{U^*} \hookrightarrow {}^{V}\mathcal{A}^{-1}_{c,k,U^*}$ の像と $\mathcal{H}_{U^*}$ を像を同一視する. ${}^{V}\mathcal{A}^{-1}_{c,k,U^*}$ から ${}^{V}\mathcal{A}^{0}_{c,k,U^*}$ への coboundary map を δ と書く. U_i^* から S への自然な projection を $\pi_{U_i^*/S}$ と書くことにする. ${}^{V}\mathcal{A}^{0}_{c,k,U_i^*} = \mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,U_i^*}$ から $\pi^{-1}_{U_i^*/S}(\mathcal{T}_S)$ への自然な写像を ε_i と書くことにする. これは,

$$\varepsilon_i\colon \pi_*({}^{V}\mathcal{A}^{0}_{c,k,U_i^*}) \to \pi_*(\pi^{-1}_{U_i^*/S}(\mathcal{T}_S)) = \mathcal{T}_S$$

を誘導する. $A^{-1}_{c,k}$, $A^{0}_{c,k}$ を次のように定める.

$$\begin{aligned} A^{-1}_{c,k} &= \pi_*({}^{V}\mathcal{A}^{-1}_{c,k,U^*})/\operatorname{Ker}\Sigma, \\ A^{0}_{c,k} &= \pi_*({}^{V}\mathcal{A}^{0}_{c,k,U_1^*}) \times_{\mathcal{T}_S} \cdots \times_{\mathcal{T}_S} \pi_*({}^{V}\mathcal{A}^{0}_{c,k,U_N^*}). \end{aligned}$$

$A^0_{c,k}$ は $\pi_*({}^{V}\mathcal{A}^{0}_{c,k,U^*})$ の subsheaf である. $A^{\bullet}_{c,k}$ の dg Lie algebra structure が ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{c,k}$ のそれから誘導される. $A^{-1}_{c,k}$ は V-bracket によって $\mathcal{O}_S$ 上の level k の affine Lie algebra と central charge c の Virasoro algebra の半直積の N 個のコピーの直積の center を全て同一視したものに同型である. δ が誘導する $A^{-1}_{c,k}$ から $A^0_{c,k}$ への写像も δ と書くことにする. $A^0_{c,k}$ から $\mathcal{T}_S$ への写像も ε_i によって自然に誘導される. それを ε と書くことにする. ($A^0_{c,k}$ を $\mathcal{T}_S$ 上の fiber product で定義したので ε は i の取り方によらない.) ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{c,k,U^*}$ の left $\mathcal{O}_{U^*}$-module structure は $A^{\bullet}_{c,k}$ の left $\mathcal{O}_S$-module structure を誘導する. ${}^{V}\mathcal{A}^{\bullet}_{c,k,U^*}$ の dg Lie algebra structure は $A^{\bullet}_{c,k}$ の dg Lie algebra structure を誘導する. ε の定める $\varepsilon\colon A^{\bullet}_{c,k} \to \mathcal{T}_S$ は $\mathcal{O}_S$-homomorphism かつ dg Lie algebra homomorphism である. 任意の $a, b \in A^{\bullet}_{c,k}$, $f \in \mathcal{O}_S$ に対して,

$$[a, fb] = \varepsilon(a)(f)\, b + f\,[a,b].$$

自然な inclusion の列 $\mathcal{O}_S \hookrightarrow \mathcal{O}_S \times \{0\}^{N-1} \hookrightarrow \mathcal{O}_S^N$ の合成は injection $\mathcal{O}_S \hookrightarrow A^{-1}_{c,k}$ を誘導する. これを ι と書き, その像と $\mathcal{O}_S$ を同一視する.

以上の構成で, ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k,U^*}$ の代わりに, ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k,U,\mathcal{F}}$, ${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k,X^*}$ を使うことによって, それぞれ $A^\bullet_+$, $A^\bullet_-$ が定義される. これらは, 自然に, $A^\bullet_{c,k}$ の dg Lie subalgebroid であるとみなせる. このとき, 自然な同型

$$\begin{aligned}
A_+^{-1} &\simeq \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,U_1,\mathcal{F}_1}) \times \cdots \times \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,U_N,\mathcal{F}_N}),\\
A_+^{0} &\simeq \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,U_1,\mathcal{F}_1}) \times_{\mathcal{T}_S} \cdots \times_{\mathcal{T}_S} \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,U_N,\mathcal{F}_N}),\\
A_-^{-1} &\simeq \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,X^*}),\\
A_-^{0} &\simeq \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,X^*}).
\end{aligned}$$

成立しているので, $A^\bullet_\pm$ の構造は c, k の取り方によらない.

以上をまとめることによって, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \xrightarrow{\iota} & A^{-1}_{c,k} & \xrightarrow{\delta} & A^0_{c,k} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{T}_S & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & A^{-1}_{\pm} & \longrightarrow & A^0_{\pm} & \longrightarrow & \mathcal{T}_S & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

この図式の横の列は exact であり, 縦の射は全て単射である.

S 上の層 $Z_{c,k}$, $B_{c,k}$, $H_{c,k}$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
Z_{c,k} &= \{\, (a_-, a_+, \alpha) \in A^0_- \times A^0_+ \times A^{-1}_{c,k} \mid a_- - a_+ = \delta(\alpha) \,\},\\
B_{c,k} &= \{\, (\delta(\alpha_-), \delta(\alpha_+), \alpha_- - \alpha_+) \mid \alpha_\pm \in A^{-1}_\pm \,\},\\
H_{c,k} &= Z_{c,k}/B_{c,k}.
\end{aligned}$$

$Z_{c,k}$ から $\mathcal{T}_S$ への写像が $(a_-, a_+, \alpha) \mapsto \varepsilon(a_-) = \varepsilon(a_+)$ によって定義される. この写像は, $H_{c,k}$ から $\mathcal{T}_S$ への写像を誘導する. それも ε と書くことにする. $\iota\colon \mathcal{O}_S \to A^{-1}_{c,k}$ の定める $\mathcal{O}_S$ から $Z_{c,k}$ への自然な写像は $\mathcal{O}_S$ から $H_{c,k}$ への写像を誘導する. それも, ι と書くことにする. $Z_{c,k}$, $B_{c,k}$ には自然に left $\mathcal{O}_S$-module structure が入るので, $H_{c,k}$ にも left $\mathcal{O}_S$-module structure が誘導される.

以下の式によって, $Z_{c,k}$ に $\mathbb{C}_S$ 上の Lie algebra structure を入れることができる:

$$[(a_-, a_+, \alpha), (b_-, b_+, \beta)] = ([a_-, b_-], [a_+, b_+], [a_-, \beta] + [\alpha, b_+]).$$

$B_{c,k}$ は $Z_{c,k}$ の ideal であることを示そう. $(a_-, a_+, \alpha) \in Z_{c,k}$ ($a_\pm \in A^0_\pm$, $\alpha \in A^{-1}_{c,k}$, $a_- - a_+ = \delta(\alpha)$) と $(\delta(\beta_-), \delta(\beta_+), \beta_- - \beta_+) \in B_{c,k}$ ($\beta_\pm \in A^{-1}_\pm$) に対して,

$$\begin{aligned}
&[a_-, \delta(\beta_-)] = \delta([a_-, \beta_-]),\\
&[a_+, \delta(\beta_+)] = \delta([a_+, \beta_+]),\\
&[\alpha, \delta(\beta_+)] = [\delta(\alpha), \beta_+] = [a_- - a_+, \beta_+],\\
&[a_-, \beta_- - \beta_+] + [\alpha, \delta(\beta_+)] = [a_-, \beta_- - \beta_+] + [a_- - a_+, \beta_+] = [a_-, \beta_-] - [a_+, \beta_+]
\end{aligned}$$

である. これらの式は dg Lie algebroid の定義 (第 2.3 節) を用いて証明される. ここに登場する dg Lie algebroid は degree 0, -1 の部分を除いて 0 なので degree 0 の元に δ をほどこすと (degree 1 の元になるので) 0 になる. これより最初の 2 つの式が成立すること

がわかる. 上と同様の理由で degree -1 の 2 つの元の bracket は (degree -2 の元になるので) 0 になる (V-bracket の定義 (第 2.9 節) も参照せよ). これより 3 番目の式の最初の等号が出る. 4 番目の式は 3 番目からただちに導かれる. 上の 4 つの式を使うと,

$$\begin{aligned}
&\big[(a_-, a_+, \alpha),\ (\delta(\beta_-), \delta(\beta_+), \beta_- - \beta_+)\big] \\
&= \big([a_-, \delta(\beta_-)], [a_+, \delta(\beta_+)], [a_-, \beta_- - \beta_+] + [\alpha, \delta(\beta_+)]\big) \\
&= \big(\delta([a_-, \beta_-]), \delta([a_+, \beta_+]), [a_-, \beta_-] - [a_+, \beta_+]\big) \in B_{c,k}.
\end{aligned}$$

これで $B_{c,k}$ は $Z_{c,k}$ の ideal であることが示された. よって, $H_{c,k}$ にも Lie algebra structure が自然に入ることもわかる.

以上の結果をまとめることによって次が証明される.

定理 2.1. $H_{c,k}$ は S 上の Picard algebroid である. □

$R^1\pi_*(\mathcal{H}) = \mathcal{O}_S$, $p \geq 2$ のとき $R^p\pi_*(\mathcal{H}) = 0$ であり, $\mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{P},\mathcal{F}}$ は $\pi^{-1}\mathcal{T}_S$ と quasi isomorphic なので, short exact sequence

$$0 \to \mathcal{H}[1] \to {}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k} \to \mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{P},\mathcal{F}} \to 0$$

から得られる long exact sequence より, 次の exact sequence が得られる:

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{A}_{c,k} \to \mathcal{T}_S \to 0.$$

実は, この exact sequence と

$$0 \to \mathcal{O}_S \to H_{c,k} \to \mathcal{T}_S \to 0.$$

が一致する. $\{X^*, U\}$ による Čech cohomology によって, $\mathbb{R}^0\pi_*{}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k} = \mathcal{A}_{c,k}$ を計算できることを示せるのである. $Z_{c,k}$, $B_{c,k}$, $H_{c,k}$ はこれらが cocycle, coboundary, cohomology class の空間であることを意識しての記号である.

定理 2.2. 自然な同型 $\mathcal{A}_{c,k} \simeq H_{c,k}$ が存在する. □

この定理によって, $\mathcal{A}_{c,k} = \mathbb{R}^0\pi_*({}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k})$ に Picard algebroid の構造を入れることができる.

このままでは $\mathcal{A}_{c,k}$ の正体は明らかではないが, 次の定理が成立している.

定理 2.3. E は X 上の rank r の vector bundle であるとし, その π に関する deteminant bundle $\det R\pi_*E$ を λ_E と表わし, $\lambda_{\mathfrak{g}_\mathcal{P}} = \det R\pi_*\mathfrak{g}_\mathcal{P}$ を $\lambda_\mathcal{P}$ と表わす. このとき, 以下のような Picard algebroid の間の自然な同型が存在する:

(1) $\mathbb{R}^0\pi_*({}^V\mathcal{A}^\bullet_E) \simeq \mathcal{A}_{\lambda_E}$.
(2) $\mathbb{R}^0\pi_*({}^V\mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{P},\mathcal{F}}) \simeq \mathbb{R}^0\pi_*({}^V\mathcal{A}^\bullet_\mathcal{P}) \simeq \mathbb{R}^0\pi_*({}^V\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g}_\mathcal{P}}) \simeq \mathcal{A}_{\lambda_\mathcal{P}}$.
(3) $\mathbb{R}^0\pi_*({}^V\mathcal{T}^\bullet_Q) \simeq \mathbb{R}^0\pi_*({}^V\mathcal{T}^\bullet) \simeq \mathbb{R}^0\pi_*({}^V\mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{O}_X}) \simeq \mathcal{A}_{\lambda_{\mathcal{O}_X}}$. □

この定理の (1) は [BS] で証明されている．他の (2), (3) は (1) から容易に導かれる．(1) を [BS] とは別の方法で証明することもできる．例えば, Boson-Fermion 対応の世界を利用して証明する方法がわかり易い．

$\mathcal{A}_c = \mathbb{R}^0\pi_*({}^V\mathcal{T}_c^\bullet)$ と置くと, $\mathcal{A}_{c,k}$ の場合と同様にして $\mathcal{A}_c$ には Picard algebroid structure が入る．Picard algebroid の圏の $\mathbb{C}$-vector space structure の定義とすぐ上の定理の結果を合わせることによって, 次の結果がただちに得られる．

系 2.4. 以下の同型が成立している:

(1) $\mathcal{A}_{c,k} \simeq -\dfrac{k}{2h^\vee}\cdot\mathcal{A}_{\lambda_\mathcal{P}} + \left(\dfrac{c}{2} + \dfrac{k\dim\mathfrak{g}}{2h^\vee}\right)\cdot\mathcal{A}_{\lambda_{\mathcal{O}_X}}$.

(2) $\mathcal{A}_c \simeq \dfrac{c}{2}\cdot\mathcal{A}_{\lambda_{\mathcal{O}_X}}$. $\square$

E が X 上の rank r の trivial vector bundle のとき, $\lambda_E = \lambda_{\mathcal{O}_X}^r$ であるから, $\mathcal{A}_E = \dim\mathfrak{g}\cdot\mathcal{A}_{\mathcal{O}_X}$ が成立する．よって, $\mathcal{P}$ が X 上の trivial principal G-bundle であるとき, 上の系の特別な場合として,

$$\mathcal{A}_{c,k} \simeq \frac{c}{2}\cdot\mathcal{A}_{\lambda_{\mathcal{O}_X}} \simeq \mathcal{A}_c$$

という単純な式が得られる．

2.18 S 上の Picard algebroid $\mathcal{A}_{c,k,\chi}$ の定義

${}^V\mathcal{A}^\bullet_{c,k,U,\mathcal{F}} \simeq \mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{P},U,\mathcal{F}}$ であるから次が成立している:

$$\begin{aligned}
A_+^{-1} &\simeq \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,U_1,\mathcal{F}_1}) \times \cdots \times \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,U_N,\mathcal{F}_N}),\\
A_+^{0} &\simeq \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,U_1,\mathcal{F}_1}) \times_{\mathcal{T}_S} \cdots \times_{\mathcal{T}_S} \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,U_N,\mathcal{F}_N}).
\end{aligned}$$

以下ではこの両辺を同一視する．S 上の局所座標系 $s = (s_1,\dots,s_M)$ を取り, π の fiber に沿った局所座標 z と合わせて, X の局所座標系 $(s;z)$ を作る．その局所座標系において $Q_i = \{z=0\}$ が成立していると仮定する．I はその座標系上で定義された $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_X) = \mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}_X$ から $\mathfrak{g}_\mathcal{P}$ の上への $\mathcal{O}_X$ 上の Lie algebra の同型写像であり, その Q_i 上への制限は $\mathfrak{b}(\mathcal{O}_{Q_i}) = \mathfrak{b}\otimes\mathcal{O}_{Q_i}$ を $\mathfrak{b}_{\mathcal{F}_i}$ に移していると仮定する．このとき, $\mathcal{A}^\bullet_{\mathcal{P},U_i,\mathcal{F}_i}$ の local trivialization が以下のようにして得られる:

(1) Q_i の上への函数の制限が定める自然な写像 $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_{U_i}) \to \mathfrak{g}(\mathcal{O}_{Q_i}) \simeq \mathfrak{g}(\mathcal{O}_S)$ を f_i と書くことにする．

(2) 局所的に定義された同型写像 $t_i\colon \mathcal{O}_S^M \oplus \mathcal{O}_{U_i}(-Q_i) \oplus f_i^{-1}(\mathfrak{b}(\mathcal{O}_S)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi,U_i,\mathcal{F}_i}$ が次のように定義される:

$$t_i(\mu,\tau,A) = \mu(s)\cdot\frac{\partial}{\partial s} + \tau(s,z)\frac{\partial}{\partial z} + I(A(s,z)).$$

ここで, $\tau(s,0)=0$, $A(s,0)\in\mathfrak{b}(\mathcal{O}_S)$ が成立している．

(3) t_i の $0\oplus\mathcal{O}_{U_i}(-Q_i)\oplus f_i^{-1}(\mathfrak{b}(\mathcal{O}_S))$ 上への制限は $\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,U_i,\mathcal{F}_i}$ の local trivialization を与える．

$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{b}$ に含まれる $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra であるとする．Δ_i は任意の複素数であるとし, $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ であるとする．λ_i は $\mathfrak{b}$ から $\mathbb{C}$ への Lie algebra homomorphism に一意的に拡張される．$\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_N)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ と置く．$\chi_i \colon \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P},U_i,\mathcal{F}_i}) \to \mathcal{O}_S$ を次のように定める:

$$\chi_i(t(0,\tau,A)) = -\Delta_i \frac{\partial \tau}{\partial z}(s;0) + \lambda_i(A(s;0)).$$

この, χ_i は local trivialization の取り方に寄らずに定まる $\mathcal{O}_S$-homomorphism であることがが確かめられる．このような χ_i を合わせて A_+^{-1} から $\mathcal{O}_S$ への $\mathcal{O}_S$-homomorphism を作ることができる．それを $\chi = \chi_{\Delta,\lambda}$ と表わす．このとき, χ は A_+^{-1} から $\mathcal{O}_S$ への $\mathcal{O}_S$-homomorphism であって,

$$\chi([a_+, \alpha_+]) = \varepsilon(a_+)(\chi(\alpha_+)) \qquad \text{for} \quad a_+ \in A_+^0, \alpha_+ \in A_+^{-1}$$

を満たす．逆にこの条件を満たす χ は上のようにして構成されるものに限られる．以下, このような χ を任意に固定して話を進める．

$\chi \neq 0$ のとき, $\chi \colon A_+^{-1} \to \mathcal{O}_S$ は全射である．このとき, $\mathcal{O}_S$ から $\mathcal{A}_\chi = A_+^{-1} / \operatorname{Ker} \chi$ への injection で以下の図式を可換にするものが唯一存在する:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_+^{-1} & \longrightarrow & A_+^0 & \longrightarrow & \mathcal{T}_S & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\chi}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & \mathcal{A}_\chi & \longrightarrow & \mathcal{T}_S & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

これより, A_+^0 の dg Lie algebroid structure から $\mathcal{A}_\chi$ の Picard algebroid structure が自然に定まることがわかる．$\mathcal{A}_\chi$ を weight χ を持つ **weight algebroid** と呼ぶことにする．

S 上の Picard algebroid の圏には $\mathbb{C}$-vector space の構造が自然に入っているのであった．$\mathcal{A}_{c,k}$ と $\mathcal{A}_\chi$ の和に対応する Picard algebroid を $\mathcal{A}_{c,k,\chi}$ と書くことにする:

$$\mathcal{A}_{c,k,\chi} = \mathcal{A}_{c,k} + \mathcal{A}_\chi.$$

$\mathcal{A}_{c,k} \simeq H_{c,k}$ を利用して, $\mathcal{A}_{c,k,\chi}$ をより具体的な形で表示しよう．$Z_{c,k,\chi}$, $B_{c,k,\chi}$, $H_{c,k,\chi}$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
Z_{c,k,\chi} &= Z_{c,k} \times_{\mathcal{T}_S} A_+^0 \\
&= \{\, (a_-, a_+, \alpha; a'_+) \in A_-^0 \times A_+^0 \times A_{c,k}^{-1} \times A_+^0 \mid a_- - a_+ = \delta(\alpha),\ \varepsilon(a_+) = \varepsilon(a'_+) \,\}, \\
B_{c,k,\chi} &= \{\, (\delta(\alpha_-), \delta(\alpha_+), \alpha_- - \alpha_+ - \iota(\chi(\alpha'_+)); \delta(\alpha'_+)) \mid \alpha_\pm \in A_\pm^{-1},\ \alpha'_+ \in A_+^{-1} \,\}, \\
H_{c,k,\chi} &= Z_{c,k,\chi} / B_{c,k,\chi}.
\end{aligned}$$

ここで, $\operatorname{Ker} \chi \subseteq A_+^{-1} \subseteq A_+^0$ とみなした．$Z_{c,k}$ と A_+^0 から $\mathcal{T}_S$ への写像は $Z_{c,k,\chi}$ から $\mathcal{T}_S$ への写像を誘導する．これも ε と表わす．$\iota \colon \mathcal{O}_S \hookrightarrow Z_{c,k}$ から $\mathcal{O}_S \hookrightarrow Z_{c,k,\chi}$ が自然に定まる．これも ι と書くことにする．$Z_{c,k,\chi}$ には left $\mathcal{O}_S$-module の構造が自然に入り, しかも $B_{c,k,\chi}$ はその $\mathcal{O}_S$-submodule である．よって, $H_{c,k,\chi}$ には left $\mathcal{O}_S$-module の構造が自然に入る．$Z_{c,k}$ と A_+^0 の Lie algebra structure より $Z_{c,k,\chi}$ 上の Lie algebra structure が誘導されるが, その bracket を具体的に書き下すと次のようになる:

$$[(a_-, a_+, \alpha; a'_+), (b_-, b_+, \beta; b'_+)] = ([a_-, b_-], [a_+, b_+], [a_-, \beta] + [\alpha, b_+]; [a'_+, b'_+]).$$

このとき, $B_{c,k,\chi}$ は $Z_{c,k,\chi}$ の ideal になる．よって, $H_{c,k,\chi}$ に Lie algebra structure が induce される．以上の定義のもとで次を示すことができる．

定理 2.5. $H_{c,k,\chi}$ は S 上の Picard algebroid であり, $\mathcal{A}_{c,k,\chi}$ に自然に同型である． □

証明には, 系 2.4 を本質的に用いる．系 2.4 を認めれば, Picard algebroids の圏の線型空間構造の定義を順番に追うことによって証明が得られる．

3 表現から twisted D-module を作る方法

この section では affine Lie algebra と Virasoro algebra の半直積の表現から base space S 上の twisted D-module を作る方法を説明する．tdo の層上の module を考えることと Picard algebroid 上の module を考えることは同じであるので, Picard algebroid の方で構成の仕方を説明する．

この節では前節の記号をそのまま用いる．$c, k \in \mathbb{C}$ であるとし, $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_N) \in \mathbb{C}^N$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in (\mathfrak{h}^*)^N$ を任意に取る．各 λ_i は $\mathfrak{b}$ から $\mathbb{C}$ への Lie algebra homomorphism に一意的に拡張される．

3.1 一般論

$\chi = \chi_{\Delta,\lambda}$ と置く．$\chi\colon \mathcal{A}_+^{-1} \to \mathcal{O}_S$ は以下を満たしている:

(1) χ は $\mathcal{O}_S$-homomorphism である．
(2) $a_+ \in A_+^0$, $\alpha_+ \in A_+^{-1}$ に対して, $\chi([a_+, \alpha_+]) = \varepsilon(a_+)(\chi(\alpha_+))$.

一般に, A が $\mathcal{O}_S$ 上の Lie algebra であるとき, $\mathcal{M}$ が left A-module であるとは, 以下が成立していることである:

(1) $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_S$-module である．
(2) $\rho\colon A \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{M})$ なる $\mathcal{O}_S$-homomorphism が与えられている．
(3) $a, b \in A$ に対して, $\rho([a, b]) = \rho(a)\rho(b) - \rho(b)\rho(a)$.

このとき, $a \in A$, $v \in \mathcal{M}$ に対して $av = \rho(a)v$ と書く．

V-bracket によって $A_{c,k}^{-1}$ を $\mathcal{O}_S$ 上の Lie algebra とみなす．$A_{c,k}^{-1}$ は $\mathcal{O}_S$ 上定義された affine Lie algebra と Virasoro algebra の半直積に同型である．A_+^0 は $\varepsilon\colon A_+^0 \to \mathcal{T}_S$ によって自然に Lie algebroid とみなせる．

$\mathcal{M}$ は left $A_{c,k}^{-1}$-module であり, 以下の条件を満たしていると仮定する:

(1) $1 = \iota(1) \in A_{c,k}^{-1}$ は $\mathcal{M}$ に 1 として作用する．
(2) $\mathcal{M}$ には Lie algebroid A_+^0 上の left module structure も与えられていて, $\alpha \in A_{c,k}^{-1}$, $a_+ \in A_+^0$, $v \in \mathcal{M}$ に対して,

$$[a_+, \alpha]v = a_+(\alpha v) - \alpha(a_+ v).$$

(3) $\alpha_+ \in A_+^{-1} \subseteq A_{c,k}^{-1}$, $v \in \mathcal{M}$ に対して,

$$\alpha_+ v = \delta(\alpha_+)v + \chi(\alpha_+)v.$$

このとき, $\mathcal{M}$ は **admissible** (c,k,χ)**-module** であると言うことにする. (上の条件 (2), (3) を **Harish-Chandra condition** と呼ぶことにする.)

定理 3.1. 上記の仮定のもとで, Lie algebroid $Z_{c,k,\chi}$ の $\mathcal{M}$ への作用を

$$(a_-, a_+, \alpha; a'_+)v = \alpha v + a_+ v + \chi(a_+ - a'_+)v \quad \bigl((a_-, a_+, \alpha; a'_+) \in Z_{c,k,\chi},\ v \in \mathcal{M}\bigr)$$

によって定めることができる. ここで, $a_+ - a'_+ \in \operatorname{Ker}(\varepsilon\colon A_+^0 \to \mathcal{T}_S) = A_+^{-1}$ とみなした. このとき,

$$B_{c,k,\chi}\mathcal{M} \subseteq A_-^{-1}\mathcal{M}, \qquad Z_{c,k,\chi}A_-^{-1}\mathcal{M} \subseteq A_-^{-1}\mathcal{M}$$

が成立するので, $Z_{c,k,\chi}$ の $\mathcal{M}$ への作用は $\mathcal{A}_{c,k,\chi} = H_{c,k,\chi}$ の $\mathcal{M}/A_-^{-1}\mathcal{M}$ への作用を誘導する. これによって, $\mathcal{M}/A_-^{-1}\mathcal{M}$ は Picard algebroid $\mathcal{A}_{c,k,\chi}$ 上の left module とみなせる. □

$A_-^{-1} = \pi_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,X^*})$ とみなせるのであった. $\mathcal{M}/A_-^{-1}\mathcal{M}$ は [TUY] における conformal blocks ([TUY] では vacua と呼んでいる) の定義方程式を意味する twisted D-module の一般化になっている.

Proof. まず, $Z_{c,k,\chi}$ の $\mathcal{M}$ への作用が Lie algebra action であることを示そう. $A = (a_-, a_+, \alpha; a'_+), B = (b_-, b_+, \beta; b'_+) \in Z_{c,k,\chi}$, $v \in \mathcal{M}$ であると仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}
[A,B]v &= ([a_-, \beta] + [\alpha, b_+])v + [a_+, b_+]v + \chi([a_+, b_+] - [a'_+, b'_+])v, \\
ABv &= (\alpha + a_+ + \chi(a_+ - a'_+))(\beta + b_+ + \chi(b_+ - b'_+))v, \\
BAv &= (\beta + b_+ + \chi(b_+ - b'_+))(\alpha + a_+ + \chi(a_+ - a'_+))v, \\
ABv - BAv &= [\alpha, \beta]_V v + [\alpha, b_+]v + [a_+, \beta]v + [a_+, b_+]v \\
&\quad + \varepsilon(a_+)(\chi(b_+ - b'_+))v - \varepsilon(b_+)(\chi(a_+ - a'_+))v.
\end{aligned}$$

ここで, V-bracket の定義と $Z_{c,k,\chi}$ の定義より $[\alpha, \beta]_V = [\delta(\alpha), \beta] = [a_- - a_+, \beta]$, $\varepsilon(a_+) = \varepsilon(a'_+)$, $\varepsilon(b_+) = \varepsilon(b'_+)$ であることを用いると,

$$\begin{aligned}
ABv - BAv &= ([a_-, \beta] + [\alpha, b_+])v + [a_+, b_+]v \\
&\quad + \frac{1}{2}\varepsilon(a_+ + a'_+)(\chi(b_+ - b'_+))v - \frac{1}{2}\varepsilon(b_+ + b'_+)(\chi(a_+ - a'_+))v.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon(a_+ + a'_+)(\chi(b_+ - b'_+)) - \frac{1}{2}\varepsilon(b_+ + b'_+)(\chi(a_+ - a'_+)) \\
&= \frac{1}{2}\chi([a_+ + a'_+, b_+ - b'_+] + [a_+ - a'_+, b_+ + b'_+]) \\
&= \frac{1}{2}\chi(2[a_+, b_+] - 2[a'_+, b'_+]) = \chi([a_+, b_+] - [a'_+, b'_+])
\end{aligned}$$

に注意すれば, $ABv - BAv = [A,B]v$ であることがわかる.

次に $B_{c,k,\chi}\mathcal{M} \subseteq A_-^{-1}\mathcal{M}$ を示そう. $\alpha_\pm \in A_\pm^{-1}$, $\alpha'_+ \in A_+^{-1}$, $v \in \mathcal{M}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&(\delta(\alpha_-), 0, \alpha_-; 0)v = \alpha_- v + 0v + \chi(0-0)v = \alpha_- v \in A_-^{-1}\mathcal{M},\\
&(0, \delta(\alpha_+), -\alpha_+; 0)v = -\alpha_+ v + \delta(\alpha_+)v + \chi(\alpha_+)v = 0,\\
&(0, 0, -\iota(\chi(\alpha'_+)); \delta(\alpha'_+))v = -\chi(\alpha'_+)v + \chi(\alpha'_+)v + 0v = 0.
\end{aligned}$$

ただし, 2 行目で $\mathcal{M}$ が admissible (c,k,χ)-module であることを使った. よって,

$$(\delta(\alpha_-), \delta(\alpha_+), \alpha_- - \alpha_+ - \iota(\chi(\alpha'_+)); \delta(\alpha'_+))v = \alpha_- v \in A_-^{-1}\mathcal{M}.$$

これで $B_{c,k,\chi}\mathcal{M} \subseteq A_-^{-1}\mathcal{M}$ が示された.

最後に $Z_{c,k,\chi}A_-^{-1}\mathcal{M} \subseteq A_-^{-1}\mathcal{M}$ を示そう. $\beta_- \in A_-^{-1}$, $v \in \mathcal{M}$, $A = (a_-, a_+, \alpha; a'_+) \in Z_{c,k,\chi}$ に対して, $a_- - a_+ = \delta(\alpha)$ より,

$$[\alpha, \beta_-]_V = [\delta(\alpha), \beta_-] = [a_- - a_+, \beta_-] = [a_-, \beta_-] - [a_+, \beta_-]$$

であるから,

$$\begin{aligned}
A(\beta_- v) &= \alpha(\beta_- v) + a_+(\beta_- v) + \chi(a_+ - a'_+)(\beta_- v)\\
&= [\alpha, \beta_-]_V v + \beta_-(\alpha v) + [a_+, \beta_-]v + \beta_-(a_+ v) + \chi(a_+ - a'_+)(\beta_- v)\\
&= [a_-, \beta_-]v + \beta_-(\alpha v) + \beta_-(a_+ v) + (\chi(a_+ - a'_+)\beta_-)v \in A_-^{-1}\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

これで $Z_{c,k,\chi}A_-^{-1}\mathcal{M} \subseteq A_-^{-1}\mathcal{M}$ が示された. □

3.2 admissible (c,k,χ)-module の作り方

$A_{c,k}^{-1}$ は V-bracket によって $\mathcal{O}_S$ 上の Lie algebra をなし, $A_{c,k}^0$ は S 上の Lie algebroid とみなせるのであった. $A_{c,k}^\bullet$ の dg Lie algebroid structure によって, $A_{c,k}^{-1}$ は Lie algebroid $A_{c,k}^0$ 上の left module であるとみなせる. $A_{c,k}^{-1}$ の $\mathcal{O}_S$ 上の universal enveloping algebra を $\mathcal{U}_{\mathcal{O}_S}(A_{c,k}^{-1})$ と表わし, それを $1-\iota(1)$ から生成される両側イデアルで割ってできる $\mathcal{O}_S$ 上の associative algebra with 1 を $\mathcal{U}_{c,k}$ と表わす. $U_{c,k}$ にも $A_{c,k}^0$ が左から自然に作用し, $\mathcal{U}_{c,k}$ は dg Lie algebroid $A_{c,k}^0$ 上の left module をなす. 自然に $A_{c,k}^{-1} \subseteq \mathcal{U}_{c,k}$ とみなせる.

$A_{c,k}^{-1}$ の元の左からの積によって, $\mathcal{U}_{c,k}$ を left $A_{c,k}^{-1}$-module とみなせる. その作用は $\iota(1) \in A_{c,k}^{-1}$ が 1 として作用するので, admissible (c,k,χ)-module であるための条件の (1) は満たしている. $\mathcal{U}_{c,k}$ は left $A_{c,k}^0$-module であるので, 条件の (2) も満たしている.

$\{\,\alpha_+ - \chi(\alpha_+) \mid \alpha_+ \in A_+^{-1}\,\}$ から生成される $\mathcal{U}_{c,k}$ の左イデアルを $\mathcal{J}_{c,k,\chi}$ と表わす. $\mathcal{M}_{c,k,\chi} = \mathcal{U}_{c,k}/\mathcal{J}_{c,k,\chi}$ と置き, これを **Verma module** と呼ぶ. χ の性質から $\mathcal{J}_{c,k,\chi}$ は $\mathcal{U}_{c,k}$ の $A_{c,k}^0$-submodule であることがわかるので, $\mathcal{M}_{c,k,\chi}$ も自然に left $A_{c,k}^0$-module になる. $\mathcal{U}_{c,k}$ が admissible (c,k,χ)-module の条件の (1), (2) をみたしていることから, $\mathcal{M}_{c,k,\chi}$ もそうであることがわかる. $v_\chi = 1 \mod J_{c,k,\chi} \in M_{c,k,\chi}$ と置く. 任意の $v \in \mathcal{M}_{c,k,\chi}$ は $v = uv_\chi$ $(u \in U_{c,k,\chi})$ と表わせる. このとき, 任意の $\alpha_+ \in A_+^{-1}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\alpha_+ v = \alpha_+(uv_\chi) &= [\alpha_+, u]_V v_\chi + u(\alpha_+ v_\chi)\\
&= [\delta(\alpha_+), u]v_\chi + u(\chi(\alpha_+)v_\chi)\\
&= \delta(\alpha_+)(uv_\chi) + \chi(\alpha_+)(uv_\chi) = \delta(\alpha_+)v + \chi(\alpha_+)v.
\end{aligned}$$

これで, 条件の (3) も確かめられたので, Verma module $\mathcal{M}_{c,k,\chi}$ は admissible (c,k,χ)-module であることがわかった.

$\mathcal{M}_{c,k,\chi}$ は唯一の maximal A_+^0-invariant $\mathcal{U}_{c,k}$-submodule を持つ. それを $\mathcal{M}_{c,k,\chi}^1$ と表わし, $\mathcal{L}_{c,k,\chi} = \mathcal{M}_{c,k,\chi}/\mathcal{M}_{c,k,\chi}^1$ と置くと, $\mathcal{L}_{c,k,\chi}$ は admissible (c,k,χ)-module である.

$A_{c,k}^{-1}$ は ${}^{\mathrm{tr}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}/S,U^*}$ の local trivialization を適当に取ることによって, 局所的には $\mathcal{O}_S$ 上の affine Lie algebra と Virasoro algebra の半直積のいくつかの直和の center を同一視したものに同型になるのであった. そのことを詳しく述べるために少し記号を準備しよう.

S 上局所的に定義された $z_i \in \mathcal{O}_{U_i} := \pi_*(\widehat{\mathcal{O}}_{X|Q_i})$ が存在して, $\mathcal{O}_{U_i} = \mathcal{O}_S[[z_i]]$ が成立する. $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_{U_i})$ の subalgebra $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_{U_i},\mathfrak{b})$ を

$$\mathfrak{g}(\mathcal{O}_{U_i},\mathfrak{b}) = \{\, A(z_i) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_{U_i}) \mid A(0) \in \mathfrak{b} \,\}$$

と定める. S 上局所的に定義された, 上の Lie algebra の同型 $I\colon \mathfrak{g}(\mathcal{O}_{U_i}) \xrightarrow{\sim} \pi_*(\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}|_{U_i})$ で, $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_{U_i},\mathfrak{b})$ を $\pi_*(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},\mathcal{F}}|_{U_i})$ の上に移すものが存在する. これらを利用して前節と同様の trivialization を取ることによって, 次の同型が定まる:

$$\begin{aligned}
A_{c,k}^{-1} &\simeq \bigoplus_{i=1}^{N} \left(\mathcal{O}_S((z_i)) \frac{\partial}{\partial z_i} \oplus \mathfrak{g}\bigl(\mathcal{O}_S((z_i))\bigr) \right) \oplus \mathcal{O}_S, \\
A_{+}^{-1} &\simeq \bigoplus_{i=1}^{N} \left(\mathcal{O}_S[[z_i]] z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \oplus \mathfrak{g}\bigl(\mathcal{O}_S[[z_i]],\mathfrak{b}\bigr) \right), \\
A_{c,k}^{0} &\simeq \mathcal{T}_S \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \left(\mathcal{O}_S((z_i)) \frac{\partial}{\partial z_i} \oplus \mathfrak{g}\bigl(\mathcal{O}_S((z_i))\bigr) \right), \\
A_{+}^{0} &\simeq \mathcal{T}_S \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \left(\mathcal{O}_S[[z_i]] z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \oplus \mathfrak{g}\bigl(\mathcal{O}_S[[z_i]],\mathfrak{b}\bigr) \right).
\end{aligned}$$

しかし, これらの同型は non-canonical なものである. 右辺の言葉で, ι, δ, ε や V-bracket を書き下すと以下のようになる:

$$\begin{aligned}
&\iota(f) = \sum_{i=1}^{N} (0+0) + f, \\
&\delta\left(\sum_{i=1}^{N} (\sigma_i + B_i) + f \right) = \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i + B_i), \\
&\varepsilon\left(\mu + \sum_{i=1}^{N} (\tau_i + A_i) \right) = \mu, \\
&\left[\sum_{i=1}^{N} (\sigma_{1,i} + B_{1,i}) + f_1, \sum_{i=1}^{N} (\sigma_{2,i} + B_{2,i}) + f_2 \right]_V \\
&\quad = \sum_{i=1}^{N} [\sigma_{1,i} + B_{1,i}, \sigma_{2,i} + B_{2,i}] + \sum_{i=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z_i=0} \left(\frac{c}{12} \sigma_{1,i}'''(z_i) \sigma_{2,i}(z_i) + k\bigl(B_{1,i}'(z_i) | B_{2,i}(z_i) \bigr) \right) dz_i.
\end{aligned}$$

ここで, $f, f_i \in \mathcal{O}_S$, $\tau_i, \sigma_i, \sigma_{l,i} = \sigma_{l,i}(z_i)\frac{\partial}{\partial z_i} \in \mathcal{O}_S((z_i))\frac{\partial}{\partial z_i}$, $A_i, B_i, B_{l,i} \in \mathfrak{g}\bigl(\mathcal{O}_S((z_i))\bigr)$, $\mu \in \mathcal{T}_S$ である.

$\mathbb{C}$ 上の Virasoro algebra Vir と affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ 半直積 $\mathrm{Vir} \ltimes \hat{\mathfrak{g}}$ が次の式によって定義される:

$$\left[f(z)\frac{d}{dz}, X \otimes g(z)\right] = X \otimes f(z)g'(z) \qquad \text{for} \quad f(z), g(z) \in \mathbb{C}((z)), X \in \mathfrak{g}.$$

$c, k, d \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathfrak{h}$ に対して, $\mathrm{Vir} \ltimes \hat{\mathfrak{g}}$ の subalgebra

$$\left(\mathbb{C}[[z]]z\frac{d}{dz} \oplus \mathbb{C}C\right) \ltimes (\mathfrak{b} \otimes 1 \oplus \mathfrak{g} \otimes z\mathbb{C}[[z]] \oplus \mathbb{C}K)$$

の 1 次元表現で次の性質を満たすベクトル v から生成されるものが同型を除いて唯一存在する:

$$Cv = cv, \quad Kv = kv, \quad -z\frac{d}{dz}v = dv, \quad hv = \mu(h)v \quad (h \in \mathfrak{h}).$$

この 1 次元表現から誘導される $\mathrm{Vir} \ltimes \hat{\mathfrak{g}}$ の表現を $\mathrm{Vir} \ltimes \hat{\mathfrak{g}}$ の Verma module と呼び, $M_{c,k,d,\mu}$ と書くことにする. $M_{c,k,d,\mu}$ は唯一の irreducible quotient を持つ. それを $L_{c,k,d,\mu}$ と書くことにする.

$\mathrm{Vir} \ltimes \hat{\mathfrak{g}}$ の N 個のコピーの直積の表現 $M_{c,k,\chi}$, $L_{c,k,\chi}$ を次のように定める:

$$M_{c,k,\chi} = \bigotimes_{i=1}^{N} M_{c,k,\Delta_i,\lambda_i}, \qquad L_{c,k,\chi} = \bigotimes_{i=1}^{N} L_{c,k,\Delta_i,\lambda_i}.$$

このとき, $\mathcal{M}_{c,k,\chi}$, $\mathcal{L}_{c,k,\chi}$ に関して, 局所的で non-canoninal な次の同型が成立している:

$$\mathcal{M}_{c,k,\chi} \simeq M_{c,k,\chi} \otimes \mathcal{O}_S, \qquad \mathcal{L}_{c,k,\chi} \simeq L_{c,k,\chi} \otimes \mathcal{O}_S.$$

4 最後に

最後に詳しく触れることができなかった点について少しコメントしておこう.

1. $k \neq -h^\vee$ でかつ $c = c(k) = k \dim \mathfrak{g}/(k+h^\vee)$ のとき, $L_{c,k,d,\mu}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$-module としてすでに既約になっている. なぜなら, $\hat{\mathfrak{g}}$-module の level k を持つ highest weight representation には管原構成によって central charge $c = c(k)$ の Virasoro algebra の作用を与えることができるからである. 通常, WZW model ではこの場合が扱われる.

2. しかし, $k = -h^\vee$ (level が critical) の場合は管原構成を使うことはできない. よって, critical level の場合は別に扱う必要がある. まず, 管原構成による Virasoro algebra の作用が使えないので, pointed curve の変形を考えずに, curve の上の principal G-bundle の変形のみを考えることになる. その場合いおいても, 今まで述べたものと同様の定式化が存在する. $k = -h^\vee$ のときに得られる base space S 上の Picard algebroid は determinant bundle $\det R\pi_* \mathfrak{g}_{\mathcal{P}}$ の平方根に付随する Picard algebroid になる. この場合の話が量子可積分系の理論とそれに密接に関係している $\mathbb{C}$ 上の Langlands program において重要になる.

3. このノートで説明した枠組において, base space 上の global に方程式を具体的に書き下すためには, S 上での trivialization を決めておく必要がある. そのとき, principal bundle $\mathcal{P}$ に connection が入っている場合が扱い易い. 例えば, $\mathcal{P}$ が trivial bundle の場

合は X 上の trivial connection が自然に入っているとみなせる．また, 楕円曲線を扱った例 1.5, 1.7, 1.8 における $\mathcal{P}$ には π の fiber に沿った integrable connection が自然に入っているとみなせる．

4. 別の方法としては [TUY] のように, π の section Q_i の周辺での local trivialization の data も込めて family を考えることも考えられる．まず, local trivialization の data も含めて考えた無限次元の moduli space 上で考え, それを有限次元の通常の moduli space まで落とすという方法を考えるのである．そのとき, local trivialization を全て忘れ, 通常の moduli space まで話を落とすことができるかどうかが問題になるのだが, このノートで述べた方法を使えばそれが可能になる．そのアイデアの基礎は weight algebroid を考えることであり, $\mathcal{P}$ として trivial bundle のみを扱った場合の定式化は [T] に書いてある．

5. RIMS における講演では, このノートの内容自身というよりは, むしろその公理化の方の話であった．S 上の $A^\bullet_\pm \subseteq A^\bullet_{c,k}$ の持つ性質を抜き出し, それから S 上の Picard algebroid を構成する手続きを説明した．そして, さらにこのノートにおける admissible module に対応するものを定義し, それに対して Picard algebroid 上の left module が得られることを説明した. (ただし, Picard algebroid の代わりに Atiyah algebra という用語を使うなど, 用語法はかなり異なっていた.)

6. 定理 2.3 の (1) の証明だが, [BFM] の第 3.5 節に Fermion を使った証明が書いてある．そちらの証明の方が [BS] に書いてあるものよりもわかり易い.

参考文献

[A] M. Atiyah: *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 181–207 (1957)

[B] D. Bernard: *On the Wess–Zumino–Witten model on the torus*, Nucl. Phys. **B303**, 77–93 (1988)

[BB1] A. Beilinson and J. Bernstein: *A generalization of Cassleman's submodule theorem*, Representation theory of reductive groups, Progr. Math. **40**, 35–52 (1983)

[BB2] A. Beilinson and J. Bernstein: *A proof of Jantzen conjectures*, Adv. Sov. Math. **16** Part 1 (Gelfand Seminar), 1–50 (1993)

[BelD] A. A. Belavin and V. G. Drinfeld: *Solutions of the classical Yang-Baxter equations for simple Lie algebras*, Funct. Anal. Appl. **16**, 159–180 (1982)

[BFM] A. Beilinson, B. Feigin, and B. Mazur: *Introduction to algebraic field theory on curves*, preliminary version of manuscript written by A. Beilinson (199?)

[BPZ] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov: *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241**, 333–380 (1984)

[BS] A. A. Beilinson and V. V. Schechtman: *Determinant bundles and Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **118**, 651–701 (1988)

[C] Cherednik: *Definition of functions for generalized affine Lie algebras*, Funct. Anal. Appl. **17**, 243–245 (1983)

[EO] T. Eguchi and H. Ooguri: *Differential equations for conformal characters in moduli space*, Phys. Lett. B **203**, 44–46 (1988)

[Fr1] E. Frenkel: *Affine Kac-Moody algebras at the critical level and quantum Drinfeld-Sokolov reduction*, Ph.D. Thesis, Harvard University, 1991.

[Fr2] E. Frenkel: *Affine algebras, Langlands duality and Bethe Ansatz*, preprint q-alg/9506003

[Fa] G. Faltings: *Stable G-bundles and projective connections*, J. Alg. Geom. **2**, 507–568 (1993)

[GW] D. Gepner and E. Witten: *String theory on group manifolds*, Nucl. Phys. **B278**, 493–549 (1986)

[Ha] T. Hayashi: *Sugawara operators and Kac-Kazhdan conjecture*, Invent. math. **94**, 13–52 (1988)

[Hi] N. J. Hitchin: *Flat connections and geometric quantization*, Commun. Math. Phys. **131**, 347–380 (1990)

[HS] V. A. Hinich and V. V. Schechtman: *Deformation theory and Lie algebra homology*, preprint `alg-geom/9405013`

[KZ] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov: *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. **247**, 83–103 (1984)

[T] Y. Tsuchimoto: *On the coordinate-free description of the conformal blocks*, J. Math. Kyoto Univ. **33-1**, 29–49 (1993)

[TK] A. Tsuchiya and Y. Kanie: *Vertex operators in conformal field theory on* $\mathbb{P}^1$, Adv. Stud. Pure. Math. **16**, 297–372 (1988), Erratum *ibid.* **19**, 675–682 (1989)

[TUY] A. Tsuchiya, K. Ueno, and Y. Yamada: *Conformal field theory on universal families of stable curves with gauge symmetries*, Adv. Stud. Pure. Math. **19**, 459–566 (1989)

[U] K. Ueno: *On conformal field theory*, in *Vector Bundles in Algebraic Geometry, Durham 1993*, ed. by N. J. Hitchin, P. E. Newstead and W. M. Oxbury, London Mathematical Society Lecture Note Series **208**, 283–345 (1995),