# $A_2$ 型の Verma 恒等式の証明

黒木玄

2012 年 4 月 30 日更新 (2012 年 4 月 30 日作成)

**概 要**

微分作用素の場合と $A_2$ 型の $q = 1$ および $q \neq 1$ の場合の $q$-Serre 関係式から Verma 関係式 $f^a g^{a+b} f^b = g^b f^{a+b} g^a$ が導かれることを初等的に (すなわち単なる計算だけで) 証明する (これはよく知られた結果).

# 目 次



## 1 微分作用素の場合

$\partial = d/dx$ とおくと, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\partial^n \phi(x) = \phi(x)\partial^n + n\phi'(x)\partial^{n-1} + \binom{n}{2}\phi''(x)\partial^{n-2} + \cdots$$

が成立することを帰納法で示せる (Leibnitz 則). この公式を使うと

$$x^a \partial^{a+b} x^b = x^{a+b}\partial^{a+b} + (a+b)bx^{a+b-1}\partial^{a+b-1} + 2!\binom{a+b}{2}\binom{b}{2}x^{a+b-2}\partial^{a+b-2} + \cdots,$$

$$\partial^b x^{a+b} \partial^a = x^{a+b}\partial^{a+b} + b(a+b)x^{a+b-1}\partial^{a+b-1} + 2!\binom{b}{2}\binom{a+b}{2}x^{a+b-2}\partial^{a+b-2} + \cdots.$$

ゆえに $\partial^a x^{a+b} \partial^b = x^b \partial^{a+b} x^a$.

## 2 $q = 1$ の場合

$A, B$ が結合代数の元であるとすると, $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$A^n B = BA^n + n[A,B]A^{n-1} + \binom{n}{2}[A,[A,B]]a^{n-2} + \cdots, \tag{1}$$

$$BA^n = A^n B + nA^{n-1}[B,A] + \binom{n}{2}A^{n-2}[[B,A],A] + \cdots \tag{2}$$

が成立することを帰納法で示せる. 結合代数の元 $f, g$ は $A_2$ 型の Serre 関係式

$$[f,[f,g]] = 0, \quad [g,[g,f]] = 0$$

を満たしていると仮定すると, (1), (2) よりそれぞれ帰納的に

$$[f, g^n] = ng^{n-1}[f,g], \quad [f,[f,g^n]] = 2!\binom{n}{2}g^{n-2}[f,g]^2, \quad \ldots$$

$$[f^n, g] = n[f,g]f^{n-1}, \quad [[f^n,g],g] = 2!\binom{n}{2}[f,g]^2 f^{n-2}, \quad \ldots$$

が得られる. ゆえに $c = a + b$ とおいて, (1) を $n = a$, $A = f$, $B = g^c$ に適用し, (2) を $n = a$, $A = g$, $B = f^c$ に適用すると, それぞれ

$$\begin{aligned} f^a g^{a+b} f^b &= g^c f^c + a[f, g^c]f^{c-1} + \binom{a}{2}[f,[f,g^c]]f^{c-2} + \cdots \\ &= g^c f^c + acg^{c-1}[f,g]f^{c-1} + 2!\binom{a}{2}\binom{c}{2}g^{c-2}[f,g]^2 f^{c-2} + \cdots, \\ g^b f^{a+b} g^a &= g^c f^c + ag^{c-1}[f^c, g] + \binom{a}{2}g^{c-2}[[f^c,g],g] + \cdots \\ &= g^c f^c + acg^{c-1}[f,g]f^{c-1} + 2!\binom{a}{2}\binom{c}{2}g^{c-2}[f,g]^2 f^{c-2} + \cdots. \end{aligned}$$

ゆえに $f^a g^{a+b} f^b = g^b f^{a+b} g^a$.

## 3 $q \neq 1$ の場合

$A$, $B$ は結合的代数の元であるとし, $v$ は基礎体の可逆元であるとする. $A, B$ の $v$ 交換子 $[A,B]_v$ を

$$[A,B]_v = AB - vBA$$

と定める. $(\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,A)^n(B)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ を帰納的に

$$(\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,A)(B) = [A,B]_{v^z}, \quad (\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,A)^{m+1}(B) = [A, (\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,A)^n(B)]_{v^{z+2m}}$$

と定めると, $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned} A^m B &= \sum_{k \geqq 0} v^{(m-k)(z+k)} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_v (\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,A)^k(B)A^{m-k} \\ &= v^{mz}BA^m + v^{(m-1)(z+1)}[m]_v(\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,A)(B)A^{m-1} \\ &\qquad + v^{(m-2)(z+2)}\begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}_v (\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,A)^2(B)A^{m-2} + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

が成立することを帰納法で示せる．積の順序を逆転させて,

$$(B)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,A) = [B, A]_{v^z}, \quad (B)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,A)^{m+1} = [(B)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,A)^m, A]_{v^{z+2m}}$$

と定めると, $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned} BA^m &= \sum_{k \geqq 0} v^{(m-k)(z+k)} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_v A^{m-k}(B)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,A)^k \\ &= v^{mz} A^m B + v^{(m-1)(z+1)} [m]_v A^{m-1}(B)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,A) \\ &\qquad + v^{(m-2)(z+2)} \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}_v A^{m-2}(B)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,A)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

が成立することもわかる．

結合代数の元 $f, g$ は $A_2$ 型の $q$-Serre 関係式

$$f^2 g - (q + q^{-1}) fgf + gf^2 = 0, \quad g^2 f - (q + q^{-1}) gfg + fg^2 = 0$$

を満していると仮定する．$(A, B) = (f, g^n)$ と $(A, B) = (g, f^n)$ のどちらの場合も $v = q$, $z = -n$ によって $(\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,A)^m(B)$ と $(B)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,A)^m$ を定める．このとき上の $A_2$ 型の $q - Serre$ 関係式は

$$(\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,f)^2(g) = 0, \quad (\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,g)^2(f) = 0$$

およびこれらの積の順序を逆転させた場合と同値になる．

(1) を $A = f$, $B = g^n$ (ゆえに $z = -n$) に適用すると

$$\begin{aligned} f^m g^n &= q^{-mn} g^n f^m + q^{-(m-1)(n-1)} [n]_q (\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,f)(g^n) f^{m-1} \\ &\qquad + q^{-(m-2)(n-2)} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q (\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,f)^2(g^n) f^{m-2} + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

が成立することがわかる．$m$ を $n$ に置き換えた (2) を $A = g$, $B = f^m$ (ゆえに $z = -m$) に適用すると, (3) で積の順序を逆転させて $(f, m)$ と $(g, n)$ の立場を交換させた公式

$$\begin{aligned} f^m g^n &= q^{-mn} g^n f^m + q^{-(m-1)(n-1)} [m]_q g^{n-1} (f^m)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,g) \\ &\qquad + q^{-(m-2)(n-2)} \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}_q g^{n-2} (f^m)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,g)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

が得られる．

(4) で $m = 1$ とおくと $(f)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,g)^2 = 0$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,f)(g^n) = fg^n - q^{-n} g^n f = [n]_q g^{n-1} [f, g]_{q^{-1}}.$$

これより帰納的に $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対する

$$(\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,f)^k(g^n) = [k]_q! \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q g^{n-k} [f, g]_{q^{-1}}^k \tag{5}$$

が導かれる．同様に (3) で $n = 1$ とおくと $(\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,f)^2(g) = 0$ より

$$(f^m)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,g) = f^m g - q^{-m} g f^m = [m]_q (\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,f)(g) f^{m-1}.$$

これより帰納的に $k=0,1,2,\dots$ に対する

$$(f^m)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,g)^k = [k]_q! \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q [f,g]_{q^{-1}}^k f^{m-k} \tag{6}$$

が導かれる.

c=a+b とおく. (3),(5) より

$$\begin{aligned} f^a g^c f^b &= q^{-ac} g^c f^c + q^{-(a-1)(c-1)}[a]_q (\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,f)(g^c) f^{c-1} \\ &\qquad + q^{-(a-2)(c-2)} \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}_q (\overrightarrow{\mathrm{ad}}\,f)^2 (g^c) f^{c-2} + \cdots \\ &= q^{-ac} g^c f^c + q^{-(a-1)(c-1)}[a]_q [c]_q g^{c-1} [f,g]_{q^{-1}} f^{c-1} \\ &\qquad + q^{-(a-2)(c-2)} [2]_q! \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} c \\ 2 \end{bmatrix}_q g^{c-2} [f,g]_{q^{-1}}^2 f^{c-2} + \cdots . \end{aligned}$$

同様に (4),(6) より

$$\begin{aligned} g^b f^c g^a &= q^{-ac} g^c f^c + q^{-(a-1)(c-1)}[a]_q g^{c-1} (f^c)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,g) \\ &\qquad + q^{-(a-2)(c-2)} \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}_q g^{c-2} (f^c)(\overleftarrow{\mathrm{ad}}\,g)^2 + \cdots \\ &= q^{-ac} g^c f^c + q^{-(a-1)(c-1)}[a]_q [c]_q g^{c-1} [f,g]_{q^{-1}} f^{c-1} \\ &\qquad + q^{-(a-2)(c-2)} [2]_q! \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} c \\ 2 \end{bmatrix}_q g^{c-2} [f,g]_{q^{-1}}^2 f^{c-2} + \cdots . \end{aligned}$$

ゆえに $f^a g^{a+b} f^b = g^b f^{a+b} g^a$.

## 4 一般の Verma 恒等式の証明が載っている文献

Simply-laced の場合の Verma 恒等式は $A_2$ 型の Verma 恒等式に帰着する. Simply-laced でない場合の Verma 恒等式を示すためにはさらに $B_2$ 型と $G_2$ 型の Verma 恒等式も証明しなければいけない.

一般の場合の Verma 恒等式の証明は Lusztig [1] の Proposition 39.3.7 以下にある.

Verma 恒等式は本質的に Verma 表現のあいだの準同型が定数倍を除いて一意的であることを意味している. (このことさえ示されればそこから Verma 恒等式を導くことは易しい.) Malikov [2] は量子展開環の場合にそのことを示している.

## 参考文献

[1] Lusztig, George. Introduction to quantum groups. Reprint of the 1994 edition. Modern Birkhauser Classics. Birkhauser/Springer, New York, 2010. xiv+346 pp. ISBN: 978-0-8176-4716-2

[2] Malikov, Fyodor. Quantum groups: singular vectors and BGG resolution. Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991), 623–643, Adv. Ser. Math. Phys., 16, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.