ソリトン系の基本パターン Part 9

ソリトン系への Weyl 群の作用 (1)

黒木 玄

2003 年 7 月 20 日

目 次

1 ソリトン系の一般論

定義 1.1 (ソリトン系) ソリトン系とは以下のような 4 つ組 $(G, G_+, G_-, \mathfrak{p})$ のことである:

- G は Lie 群である.
- $G_\pm$ は G の Lie 部分群であり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ (ベクトル空間の直和). ここで $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$, $\mathfrak{g}_\pm := \operatorname{Lie} G_\pm$.
- $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の Abelian Lie subalgebra である.

$(G, G_+, G_-, \mathfrak{p})$ がソリトン系であるとき, G/G_+ への $\mathfrak{p}$ の無限小左作用が生成するフローをそのソリトン系の時間発展と呼ぶ. もしも $\mathfrak{p}$ が無限次元であれば時間発展は互いに可換な無限個のフローになる. □

例 1.2 たとえば non-linear Schrödinger (NLS) hierarchy の場合では

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{sl}_2\bigl(\mathbb{C}((z^{-1}))\bigr),\\
\mathfrak{g}_+ &= \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[z]),\\
\mathfrak{g}_- &= \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[[z^{-1}]])z^{-1},\\
\mathfrak{p} &= \{\, \Lambda \in \mathfrak{g}_+ \mid \Lambda \text{ is diagonal.} \,\}. \quad \square
\end{aligned}
$$

以下, $(G, G_+, G_-, \mathfrak{p})$ はソリトン系であるとし, G の単位元で代表される G/G_+ の点を G/G_+ の原点と呼ぶことにする.

このとき, G/G_+ の原点の近傍は G_- への G/G_+ の左作用によって G_- の単位元の近傍と同一視される. その同一視によって, G の G/G_+ への左作用から G の G_- の単位元の近傍への局所左作用が誘導される. 以下その局所作用の形を書き下してみよう.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ より, G の単位元の近傍の元 g は $G_\pm$ それぞれの単位元の近傍の元 $g_\pm$ によって

$$g = g_-^{-1} g_+$$

と一意に表わされることがわかる[1]. これによって G の単位元の近傍の元の $G_\pm$ への射影 $(\ )_\pm$ を定義しておく. このとき g で代表される G/G_+ の点は G_- の元 g_- と同一視される.

この同一視のもとで G の G/G_+ の左作用から誘導される G 単位元の近傍にへの局所左作用を $a * g_-$ $(a \in G,\ g_- \in G_-)$ と書くことにする. このとき,

$$a g_-^{-1} = (a g_-^{-1})_-^{-1} (a g_-^{-1})_+$$

より,

$$a * g_- = (a g_-^{-1})_- = (a g_-^{-1})_+ g_- a^{-1}$$

である. 以下では $a * g_-$ の 2 通りの表示について説明を加えておく.

$a * g_- = (a g_-^{-1})_-$ が局所左作用になっていることは G の G/G_+ の作用を G_- に引き戻しているだけなので明らかである. しかし, 以下のように直接的な計算で確かめることもできる. $(ab)g_- = a(bg_-)$ を別々に計算すると,

$$\begin{aligned}
(ab)g_- &= (abg_-^{-1})_-^{-1}(abg_-^{-1})_+ = \bigl((ab) * g_-\bigr)^{-1}(abg_-^{-1})_+, \\
a(bg_-) &= a(b * g_-)^{-1}(bg_-^{-1})_+ = (a * (b * g_-))^{-1}\bigl(a(b * g_-)^{-1}\bigr)_+(bg_-^{-1})_+
\end{aligned}$$

であるから,

$$(ab) * g_- = a * (b * g_-), \qquad (abg_-^{-1})_+ = \bigl(a(b * g_-)^{-1}\bigr)_+(bg_-^{-1})_+.$$

$(ab) * g_- = a * (b * g_-)$ は $*$ が実際に作用になっていることを意味している.

$a * g_- = (a g_-^{-1})_+ g_- a^{-1}$ は所謂 Sato-Wilson 方程式の群バージョンである. Sato-Wilson 方程式を書き下すときに我々がよく使っている記号と合わせるためには,

$$W_0 := g_-, \quad W := a * g_- = (a g_-^{-1})_-, \quad Z := (a g_-^{-1})_+$$

と置けば良い. このとき $a * g_- = (a g_-^{-1})_+ g_- a^{-1}$ は

$$W = Z W_0 a^{-1}$$

と書き直される. もしも a が t の函数ならば, この両辺を t で微分して,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} W_0 a^{-1} - Z W_0 a^{-1} \frac{\partial a}{\partial t} a^{-1} = \frac{\partial Z}{\partial t} Z^{-1} W - W \frac{\partial a}{\partial t} a^{-1}.$$

[1] より正確に言えば, $G_\pm$ それぞれの単位元の近傍 $U_\pm$ を十分小さく取れば, 写像 $G_- \times G_+ \to G$, $(g_-, g_+) \mapsto g_-^{-1} g_+$ は $U_- \times U_+$ からその像への可微分同相写像を誘導する. G が無限次元の場合は正当化に注意を要する.

よって,

$$B := \frac{\partial Z}{\partial t} Z^{-1}, \qquad P := \frac{\partial a}{\partial t} a^{-1}$$

と置けば

$$\frac{\partial W}{\partial t} = BW - WP.$$

この最後の形の方程式は Sato-Wilson 方程式と呼ばれている.

波動函数 Ψ を次のように定義する:

$$\Psi := (a * g_-)a = (a g_-^{-1})_+ g_- = Wa = ZW_0.$$

定義より, $\Psi = ZW_0$ の両辺を t で微分すれば Ψ は次の方程式を満たしていることがわかる:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = B\Psi.$$

この形の微分方程式は「線形問題」として具体的なソリトン系に登場する.

2 Weyl 群の作用の一般論

前節では G の G/G_+ への左作用が誘導する G の G_- の単位元の近傍への左局所作用について説明した. この節では $\mathfrak{g}$ の Abelian Lie subalgebra $\mathfrak{p}$ が生成するフローと Weyl 群の作用の関係について説明する.

前節に引き続き, $(G, G_+, G_-, \mathfrak{p})$ はソリトン系であるとし, G における $\mathfrak{p}$ の normalizer を $\mathcal{W}$ と表わすことにする:

$$\mathcal{W} := \{\, g \in G \mid \mathrm{Ad}_g\, \mathfrak{p} = \mathfrak{p} \,\}.$$

例 2.1 NLS の場合では,

$$\mathfrak{p} = \bigoplus_{i>0} \mathbb{C}\Lambda_i, \qquad \Lambda_i = \begin{bmatrix} z^i & 0 \\ 0 & -z^i \end{bmatrix}$$

であるから, $\mathcal{W}$ は $SL_2(\mathbb{C})$ の Weyl 群を代表する元たちと $SL_2(\mathbb{C}((z^{-1})))$ の対角部分群から生成される群であることがわかる. たとえば $\mathcal{W}$ には以下のような元が含まれている:

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad s_0 = \begin{bmatrix} 0 & -z^{-1} \\ z & 0 \end{bmatrix}.$$

s_1, s_0 の $\mathfrak{p}$ への adjoint action はどちらも -1 倍の作用になる. このことは s_1, s_0 によってフローの向きが逆転することを意味している. □

この例より, 一般的な状況では, Weyl 群そのものの作用ではなく, $\mathfrak{p}$ の normalizer $\mathcal{W}$ の作用をまず考えておく方が良さそうなことがわかる.

そして, NLS のような場合における affine Weyl 群の「左作用」において, 「フローの向きの逆転」を入れることが自然であることは, $\mathcal{W}$ が $\mathfrak{p}$ の normalizer であることに注意すれば容易に納得できる.

ソリトン系 $(G, G_+, G_-, \mathfrak{p})$ では出発点では時間発展として $\mathfrak{p}$ から生成されるフローのみを考えるのだが, 時間発展の normalizer $\mathcal{W}$ まで対称性を広げて考える方が自然である. すなわち, $\mathfrak{p}$ が生成するフローのみを時間発展と考えるのではなく, $\mathcal{W}$ に含まれる離散的な Abel 部分群をも時間発展とみなし, さらに非可換な Weyl 群的な対称性もあると考える方が自然である. つまり, $(G, G_+, G_-, \mathfrak{p})$ ではなく $(G, G_+, G_-, \mathfrak{p}, \mathcal{W})$ の方をより自然な対象として積極的に研究すべきなのである.

$\mathcal{W}$ は G の部分群なので G/G_+ に自然に作用する. その作用は $\mathcal{W}$ の G_- の単位元の近傍への局所作用を定める. 具体的な多くの例において $\mathcal{W}$ の元は G_- に有理写像として作用することになる. これがソリトン系への「affine Weyl 群の作用」の正体である.

以上によっておそろしく一般的な設定において, 連続と離散両方の時間発展を持ち, Weyl 群的な非可換な対称性を持つ系を作る方法がはっきりした. (ただし, このノートで説明している方法では, Hamiltonian 構造やその量子化は別問題ということになってしまう. ソリトンの佐藤理論は系の対称性を扱うには極めて優れた枠組みだが, 今のところ Hamiltonian 構造や量子化の議論と相性がよろしくない.)

3 左右両方からの Weyl 群作用の正体

前節まででは G の G/G_- への左作用が G の G_- の単位元の近傍への左局所作用を誘導することを用いて, 時間発展を与える群 $\mathfrak{p}$ の normalizer $\mathcal{W}$ の G_- への左局所作用を定めた.

現実のソリトン系 (およびその何らかの reduction) では G/G_- を考えるだけではなく, G の全体を考える方が都合が良い場合が出て来る. すなわち, ソリトン系から戸田階層にに移って議論した方が具合が良い場合がある.

しかし, 戸田階層は double を考えることによって通常のソリトン系とみなせる. 実際, 戸田階層を G 全体の理論とみなすのではなく, $G \times G$ に付随したソリトン系とみなした方が様々な議論が透明になってわかり易くなる. たとえば, Weyl 群の左と右からの作用が G 自身ではなく $G \times G$ の Weyl 群 $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ が作用であることを自然に理解することができる.

G に付随する戸田階層はソリトン系として以下のように定義される. 細部を正確に説明するために $\mathbb{C}$ 上の reductive group G の loop group とその Lie algebra の homogeneous gradation の組に付随する戸田系について説明する. より一般の場合も同様である. (G の例として GL_n や SL_n などを考えておけば良い.) 以下 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ と置く.

そのような戸田階層とは以下のようなソリトン系 $(D, D_+, D_-, \mathfrak{p})$ のことである:

$$
\begin{aligned}
&D := G\bigl(\mathbb{C}((z^{-1}))\bigr) \times G\bigl(\mathbb{C}((z))\bigr),\\
&D_+ := \bigl\{\, (b, b) \bigm| b \in G\bigl(\mathbb{C}[z, z^{-1}]\bigr) \,\bigr\},\\
&D_- := \bigl\{\, (a_-, a_+) \bigm| a_- \in \exp\bigl[\mathfrak{g}\bigl(\mathbb{C}[[z^{-1}]]\bigr) z^{-1}\bigr],\ a_+ \in G\bigl(\mathbb{C}[[z]]\bigr) \,\bigr\},\\
&\mathfrak{p} := \bigl\{\, (\Lambda_+, \Lambda_-) \bigm| \Lambda_+ \in \mathfrak{h}\bigl(\mathbb{C}[z]\bigr) z,\ \Lambda_- \in \mathfrak{h}\bigl(\mathbb{C}[z^{-1}]\bigr) \,\bigr\}.
\end{aligned}
$$

ここで, G の代数群の意味での Cartan 部分群 H の Lie algebra を $\mathfrak{h}$ と書いた. たとえば

$G = GL_n$ の場合は

$$
\begin{aligned}
&D := GL_n\big(\mathbb{C}((z^{-1}))\big) \times GL_n\big(\mathbb{C}((z))\big),\\
&D_+ := \big\{\, (b,b) \bigm| b \in GL_n\big(\mathbb{C}[z,z^{-1}]\big) \,\big\},\\
&D_- := \big\{\, (a_-,a_+) \bigm| a_- \in E + M_n(\mathbb{C}[[z^{-1}]])z^{-1},\ a_+ \in GL_n(\mathbb{C}[[z]]) \,\big\},\\
&\mathfrak{p} := \big\{\, (\Lambda_+,\Lambda_-) \bigm| \Lambda_+ \in \mathrm{diag}\big(\mathbb{C}[z]^n\big)z,\ \Lambda_- \in \mathrm{diag}\big(\mathbb{C}[z^{-1}]^n\big) \,\big\}.
\end{aligned}
$$

準周期解や自己相似解を作る場合において $(a_-,a_+) \in D_-$ は無限遠点と原点で形式解を得るための波動作用素の組になる. $(W,\overline{W}) = (W,Z) = (a_-,a_+)$ と置けばピンと来る人がいるかもしれない.

上の記号のもとで, $\mathfrak{p}$ の D における normalizer $\mathcal{W}$ は $G\big(\mathbb{C}((z^{-1}))\big)$ と $G\big(\mathbb{C}((z))\big)$ のそれぞれにおける Cartan subgroup の normalizers の直積 $\mathcal{W}_\infty \times \mathcal{W}_0$ に一致している. 大雑把に言えば $\mathcal{W}$ は 2 つの affine Weyl groups の直積を少し膨らませたような群になっている.

D_- の元を (W,Z) と書き, $\mathcal{W}$ の元を (w_∞,w_0) と書くと, 左側の w_∞ は W に作用し, 右側の w_0 は Z に作用する. これらの作用が $\mathfrak{p}$ の生成するフローの向きを (部分的に) 逆転させるという現象には注意しなければいけない.

もしも $\mathfrak{p}$ の左半分 $\mathfrak{p}_+ = \{(\Lambda_+,0) \in \mathfrak{p}\}$ だけから生成されるフローしか考えないことにすれば[2], 右側の w_0 の作用がフローの向きを逆転させるという現象について考慮する必要がなくなる. それどころか $\mathfrak{p}_+$ の D における normalizer は $\mathcal{W}_\infty \times G\big(\mathbb{C}((z))\big)$ になるので, 右側の作用として $G\big(\mathbb{C}((z))\big)$ の任意の元による作用が許されることになる.

まとめ: ソリトン系の時間発展の生成元たちのなす Lie subalgebra $\mathfrak{p}$ の **normalizer** $\mathcal{W}$ を考えよ! ソリトン系は $\mathfrak{p}$ から生成される連続的な時間発展だけではなく, $\mathcal{W}$ に含まれる離散的な対称性込みで研究されるべきである.

[2]戸田階層においてフローの半分しか考えないことは G に付随する戸田階層から mKdV や NLS のようなソリトン系に移ることを意味している.