ソリトン系の基本パターン Part 7

多成分 KP 系の Hamiltonians について 1

黒木 玄

2001 年 7 月 1 日*

目 次

1 Khesin と Zakharevich の 1995 年の論文 **1**

2 行列値函数係数の擬微分作用素の対角化 **3**

3 generalized n-component KP hierarchy の Hamiltonians について **5**

この文書は次のメールに追加・修正を加えたもの

```
Date: Sun, 1 Jul 2001 10:41:20 +0900 (JST)
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200107010141.KAA07070@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: Soliton-7.txt
```

多成分 KP 系 (および他の様々なスペクトル保存変形で実現できる系) の Hamiltonian 構造についてかなり理解が進んだ感じがしたので, 忘れないうちに簡単に説明しておくことにします. 根性があれば後でより詳しく書くかもしれません.

1 Khesin と Zakharevich の 1995 年の論文

基礎になる参考文献は Boris Khesin and Ilya Zakharevich の 1995 年の論文 [KZ] である. この論文には generalized 1-component KP hierarchies の Hamiltonian 構造の理論が書いてある. しかし, 残念なことに, 肝腎の multi-component case に関しては

> *Remark 9.6.* . . . It is interesting to generalize the functions H_i to the case of matrix coefficients.

*これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-7.txt の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 18 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 7 月 1 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

と書いてあるだけであった.

さて, Khesin-Zakharevich が扱っている generalized n-component KP hierarchy の L-operator は次のような最高次の係数が 1 の場合であった:

$$L = \partial^\alpha + u_1\partial^{\alpha-1} + u_2\partial^{\alpha-2} + \cdots .$$

ここで, $\alpha \neq 0$ でかつ $u_i \in M(n, C^\infty(S^1))$ である.

しかし, 実際には Khesin-Zakharevich の論文と同様の議論が多成分の場合にも可能であるためには L-operator は次の形でなければいけない:

$$L = c\partial^\alpha + u_1\partial^{\alpha-1} + u_2\partial^{\alpha-2} + \cdots \tag{$*$}$$

ただし, 最高次の係数 c は定数対角行列であり, その固有値は 0 でなく, 互いに異なるものと仮定する.

($\alpha = 1$ の場合が元来の n-component KP hierarchy の場合であり, 他の場合が generalized n-component KP hierarchy である. α が正の整数 l で L が微分作用素になる場合に制限すると l-reduced n-component KP hierarchy の場合が得られる. Khesin-Zakharevich は 1-component の場合に関して詳しい.)

最高次の係数 c に関する仮定は重要である. 特に, 本当に multi-component の場合 (すなわち $n > 1$ の場合) は $c = 1 =$ (単位行列) であってはいけない.

例えば, non-linear Schröfinger hierarchy や Davey-Stewartson hierarchy (= 2-component KP) では $c = \mathrm{diag}(1, -1)$ に取るのが慣習になっているので, 確かに上の仮定は満たされている.

どの系にどういう名前が付いていて物理的にどういう意味を持つのかについて実はあまり良く知らないのですが, おそらく他の場合も同様でしょう.

Khesin-Zakharevich は上に書いたように $c = 1$ の場合だけを扱っている (下線は引用者による):

> **Lemma 9.2** ([7]). ... *Consider a pseudodifferential symbol L of the order $t \neq 0$ <u>with the leading coefficient 1</u>.* ...

その上, Lemma 9.2 における “matrix case” に関する statement は “with the leading coefficient 1” の場合には証明不可能であった. また, 次の節で説明するように c が上の generic condition を満たしているとき, L が対角化可能であるという事実にも触れていない.

おそらく, そのせいで, Remark 9.6 で “It is interesting to generalize the functions H_i to the case of matrix coefficients.” と述べるに留まざるを得なかったのだと思う.

いずれにせよ, 私が 6 月 20 日に次のように書いたように, 最高次の係数を generic に取ることが本質だと思う:

> 補足: 零でない互いに異なる数 a, b, c を取り,
>
> $$L = W\,\mathrm{diag}(a\partial, b\partial, c\partial)W^{-1}$$
>
> と置くと, 同一の L を与える W の不定性はちょうど定数対角行列係数の擬微分作用素の右からの積の分だけある. (この事実のより一般的な場合については

http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-4.txt

の定理 2.4 を見よ.) だから, この L に関する Lax 方程式系は well-defined な hierarchy を定める. この意味で L は一つあれば十分である. □

(http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-5.txt より)

2 行列値函数係数の擬微分作用素の対角化

Khesin-Zakharevich の論文の Lemma 9.2 の scalar case に関する statement の正しい一般化は次の定理である.

定理 2.1 c は互いに異なる 0 でない対角成分を持つ定数対角行列であるとし, $\alpha \neq 0$, $u_i \in M(n, C^\infty(S^1))$ に関する次の擬微分作用素を考える:

$$L = c\partial^\alpha + u_1\partial^{\alpha-1} + u_2\partial^{\alpha-2} + \cdots. \tag{$*$}$$

このとき, 以下のような $M(n, C^\infty(S^1))$ 係数の擬微分作用素 P, A が存在する:

(a) $P = p_0 + p_1\partial^{-1} + p_2\partial^{-2} + \cdots, p_0$ は可逆.
(b) $A = c\partial^\alpha + a_1\partial^{\alpha-1} + a_2\partial^{\alpha-2} + \cdots$, a_i は定数対角行列.
(c) $L = PAP^{-1}$.

証明. $LP = PA$ の両辺の $\partial^{\alpha-k}$ の係数を比べると次の形の方程式を得る:

(0) $[c, p_0] = 0$,
(1) $[c, p_1] + \alpha c p_0' + u_1 p_0 - p_0 a_1 = 0$,
$\cdots\cdots\cdots$
(n) $[c, p_n] + \alpha c p_{n-1}' + u_1 p_{n-1} - p_{n-1} a_1 - p_0 a_n + F_n = 0$.

ここで, F_n は $u_1, \dots, u_n$, $p_0, \dots, p_{n-2}$, $a_2, \dots, a_{n-1}$, c の微分多項式である.
数学的帰納法によって, 方程式 (0), (1), ..., (n) を満たすように

$p_0, \dots, p_{n-1} \in M(n, C^\infty(S^1))$,
p_n の off-diagonal 成分 $\in C^\infty(S^1)$,
定数対角行列 $a_1, \dots, a_n$

を選べることを示せば良い.
まず, $n = 0$ の場合. p_0 の off-diagonal 成分を 0 と置けば (0) が満たされる. (c に関する仮定から p_0 の off-diagonal 成分は 0 でなければいけない.)
次に, $n = 1$ の場合. c は定数対角行列で固有値が互いに異なると仮定したので,

$$\operatorname{Ker}\operatorname{ad}(c) = \{\text{diagonal matirces}\},$$
$$\operatorname{Im}\operatorname{ad}(c) = \{\text{off-diagonal matrices}\}$$

であるから, p_0 の off-diagonal 成分を given と考え, 方程式 (1) を p_1 の off-diagonal 成分を決定する方程式と p_0 の diagonal 成分に関する次の微分方程式に分離できる:

$$\alpha p'_{0;ii} + (u_{1;ii} - a_{1;ii})p_{0;ii} = 0.$$

この微分方程式は $u_{1;ii} - a_{1;ii}$ の S^1 上での積分が $2\pi i/(\alpha \int_{S^1} dx)$ の整数倍になるように定数 $a_{1;ii}$ を選べば,

$$p_{0;ii} = \exp\bigl(-\alpha^{-1}\int(u_{1;ii} - a_{1;ii})\,dx\bigr) \in C^\infty(S^1)$$

と解ける. (定数 $a_{1;ii}$ に関する条件は $p_{0;ii}$ が S^1 上の一価函数になるために必要である. $a_{1;ii}$ の不定性はちょうど $2\pi i/(\alpha \int_{S^1} dx)$ の整数倍の差の分だけあり, $p_{0;ii}$ の不定性はちょうど定数倍の分だけある.)

$n \geq 2$ のとき, 帰納的に $n-1$ まで成立していると仮定して, n の場合を示す.

帰納法の仮定より, $a_1, \dots, a_{n-1}$ と $p_1, \dots, p_{n-2}$ と p_{n-1} の off-diagonal 成分が given であると考え, 方程式 (n) を p_n の off-diagonal 成分を一意に決定する方程式と p_{n-1} の diagonal 成分 $p_{n-1;ii}$ に関する次の微分方程式に分離できる:

$$\alpha p'_{n-1;ii} + (u_{1;ii} - a_{1;ii})p_{n-1;ii} = a_{n;ii}p_{0;ii} - F_{n;ii}.$$

この方程式は, $a_{n;ii} - F_{n;ii}p_{0,ii}^{-1}$ の S^1 上での積分が 0 になるように定数 $a_{n;ii}$ を (一意的に) 選ぶことによって,

$$p_{n-1;ii} = p_{0;ii}\int(a_{n;ii} - F_{n;ii}p_{0,ii}^{-1})\,dx \in C^\infty(S^1)$$

と解ける. 以上によって定理が示された. □

注意しなければいけないことは, 基礎になる微分環として, $\mathbb{C}((x))$ ではなく $C^\infty(S^1)$ を取っていることである. $\mathbb{C}((x))$ の場合は $\partial = x\partial/\partial$ と取れば, $C^\infty(S^1)$ の場合とかなり似て来る. しかし, $C^\infty(S^1)$ の場合と違って, $\mathbb{C}((x))$ の要素の exponential は一般に定義されない. 基礎になる微分環として $C^\infty(\mathbb{R})$ を取ると, $A = c\partial^\alpha$ (i.e. $a_i = 0$) に取れる.

a_i として定数ではなく, 単に diagonal なものを取るならば基礎になる微分環が何であっても次が成立する.

定理 2.2 R は任意の微分環であり, c は互いに異なる 0 でない成分を持つ定数対角行列であり, $\alpha \neq 0$, $u_i \in M(n,R)$ に対する次の擬微分作用素を考える:

$$L = c\partial^\alpha + u_1\partial^{\alpha-1} + u_2\partial^{\alpha-2} + \cdots. \tag{$*$}$$

このとき, 以下を満たしている $M(n,R)$ 係数の擬微分作用素 P, X が存在する:

(a) $P = 1 + p_1\partial^{-1} + p_2\partial^{-2} + \cdots$,
(b) $A = c\partial^\alpha + a_1\partial^{\alpha-1} + a_2\partial^{\alpha-2} + \cdots$, a_i は対角行列.
(c) $L = PDP^{-1}$.

ここで, a_i は定数とは仮定してないことに注意せよ. さらにこのとき以下が成立する:

(1) p_i を off-diagonal に取れば L に対して P, D は一意的であり, a_i, p_i は u_j たちの微分多項式で表わされる.

(2) $(P, A) = (P_1, A_1), (P_2, A_2)$ が上の条件を満たしているとき, ある擬微分作用素

$$D = 1 + d_1\partial^{-1} + d_2\partial^{-2} + \cdots, \quad d_i \text{ は対角行列}$$

が存在して, $A_2 = DA_1D^{-1}$ が成立する. □

3 generalized n-component KP hierarchy の Hamiltonians について

さて, generalized n-component KP hierarchy の Hamiltonians の取り方は次のようになるべきである.

結論 3.1 Khesin-Zakharevich による generalized 1-component KP hierarchy の Hamiltonians H_i の generalized n-component KP hierarchy における対応物は対角行列 a_i の対角成分の値を L の函数とみたものである. □

Hamiltonians とは保存量のことである. generalized n-component KP hierarchy における保存量とは, (a) の形の擬微分作用素 V によって L を VLV^{-1} に変換しても変わらない L の函数のことである. 上の定理より, そのような量は常に対角行列 a_i の対角成分たちの函数になる.

要するに,「スペクトル保存変形」という言葉の意味を最も素直に解釈すれば良いのだ.

しかし, a_i 自身は扱い易くないので, より扱い易い座標に移るという問題が大事になる. 1-component KP では $\mathrm{trace}(L^i)$ という形で扱い易い Hamiltonian が構成できたのだった. n-component の場合における良い Hamiltonians はどのような形をしているか?

この問題の有限次元での類似は, 行列の固有値が a_i の成分に対応しており, 行列の固有多項式の係数が良い Hamiltonians に対応している.

参考文献

[EKRRR] B. Enriquez, S. Khoroshkin, A. Radul, A. Rosly, and V. Rubtsov: Poisson-Lie aspects of classical W-algebras, The interplay between differential geometry and differential equations, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 167 (1995) 37–59

[KZ] Boris Khesin and Ilya Zakharevich, Poisson-Lie group of pseudodifferential symbols, Commun. Math. Phys. 171 (1995) 475-530, http://jp.arxiv.org/abs/hep-th/9312088