ソリトン系の基本パターン Part 6

Enriquez-Khoroshkin-Radul-Rosly-Rubtsov 1995 の紹介

黒木 玄

2001 年 6 月 23 日*

目 次

*これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-6.txt の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 18 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 6 月 23 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

```
Date: Sat, 23 Jun 2001 21:06:15 +0900 (JST)
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200106231206.VAA28861@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: ソリトン系の基本パターン Part 6
```

http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-5.txt で簡単に紹介した [EKRRR] にざっと目を通し終わりました. これは結構読み易い.

Poisson-Lie group の立場から, second Gelfand-Dickey bracket (KdV の場合は $L = \partial + u$ の u に関する classical Virasoro algebra になる) をどう理解するかが上の論文の一つのテーマです.

このノートでは彼らのアイデアを簡単に説明することにします.

ただし, 彼らは $C^\infty(S^1)$ 上の擬微分作用素を扱ってますが, $\mathbb{C}((x))$ 上の擬微分作用素を扱ってもほとんど同じなので, $C^\infty(S^1)$ を全て $\mathbb{C}((x))$ に置き換えたバージョンで説明します.

1 Poisson 構造を入れたい場所 $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{L}_\alpha$

Poisson bracket を入れるべき無限次元多様体として以下の場所を考える (p.43):

(a) $\mathcal{M}_n = \{L = \partial^n + u_1\partial^{n-1} + \cdots + u_n \in \mathbb{C}((x))[\partial]\}$,
(b) $\mathcal{L}_\alpha = \{L = \partial^\alpha + u_1\partial^{\alpha-1} + \cdots + u_n\partial^{\alpha-n} + \cdots\}$.

論文では $\mathcal{M}$ は $\bar{\mathcal{L}}$ と書いてある. ここで, α は任意の数であり, $\mathcal{L}_\alpha$ は ∂^α で拡張された擬微分作用素の集合であり, n が正の整数であれば, $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{L}_n$ が成立している. 例えば,

$$\mathcal{L}_1 = \{L = \partial + u_1 + u_2\partial^{-1} + u_3\partial^{-2} + \cdots\}$$

は $u_1 = 0$ と制限する前の KP hierarchy の L-operators 全体のなす多様体であり,

$$\mathcal{M}_2 = \{L = \partial^2 + u_1\partial + u_2\}$$

は $u_1 = 0$ と制限する前の KdV hierarchy の L-operators のなす多様体である.

さらに,

$$\mathcal{L}_0 = \{W = 1 + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \cdots\}$$

は KP hierarchy の波動作用素のなす群である. 実はこちらの見方を拡張することによって, KP hierarchy の quadratic Poisson bracket をとらえるというのが基本的な方針である. そのためには, すべての $\mathcal{L}_\alpha$ を含んだ群を構成しなければいけない.

次の節で Lie algebra レベルの拡張を説明し, その次の節では群レベルでの拡張について説明する. 最終的に, $\mathcal{L}_\alpha$ は次のようなもの全体の集合と同一視されることになる:

$$\exp(\alpha\log\partial + a_1\partial^{-1} + a_2\partial^{-2} + \cdots).$$

2　擬微分作用素の拡張

次に擬微分作用素のなす Lie algebra $\mathcal{E}$ に $\log \partial$ を添加し, 中心拡大する (p.50). ($\log \partial$ の重要性は微分作用素環の central extension を理解する過程で発見された.)

2.1　$\log \partial$ の添加

$\log \partial$ とは何なのか?　$\log z$ が z^{-1} の不定積分として定義されたのと同様のやり方で $\log \partial$ は ∂^{-1} の不定積分として定義する.

∂^{-1} と擬微分作用素 A の交換関係は次のように定義されたのでした:

$$\partial^{-1}A = A\partial^{-1} - A'\partial^{-2} + A''\partial^{-3} - A^{(3)}\partial^{-4} + \cdots .$$

ここで, A', A'', $A^{(n)}$ は擬微分作用素 A の係数をその導函数で置き換えて得られる擬微分作用素を表わしている. この等式の両辺を ∂ で形式的に不定積分すると,

$$(\log \partial)A = A(\log \partial) + A'\partial^{-1} - 1/2A''\partial^{-2} + \cdots$$

となる. すなわち,

$$[\log \partial, A] = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}/kA^{(k)}\partial^{-k}.$$

(注意: 論文 p.30 における $[\log \partial, a]$ の定義式の右辺の i は余計なので削除しなければいけない.)

この式によって, Abelian Lie algebra $\mathbb{C}\log \partial$ の擬微分作用素のなす Lie algebra

$$\mathcal{E} := \mathbb{C}((x))((\partial^{-1}))$$

への作用を定義すると,

$$[\log \partial, AB] = [\log \partial, A]B + A[\log \partial, B]$$

が成立している. よって, $\mathbb{C}\log \partial$ と $\mathcal{E}$ の半直積 Lie algebra

$$\mathbb{C}((x))((\partial^{-1})) \rtimes \mathbb{C}\log \partial$$

を考えることができる. (これは, affine Lie algebra の場合で言えば, loop Lie algebra $\mathfrak{a}((x))$ への $\mathbb{C}x\partial$ の作用による半直積 Lie algebra $\mathfrak{a}((x)) \rtimes \mathbb{C}x\partial$ の類似物である.)

2.2　Adler trace

$\mathcal{E} = \mathbb{C}((x))((\partial^{-1}))$ に Adler trace を次のように定義する:

$$\mathrm{trace}(A) := \operatorname*{Res}_{x=0}(A_{-1}\,dx) \quad (A = \sum A_i\partial^i).$$

要するに $x^{-1}\partial^{-1}$ の係数を A の trace と定義する. (これは affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{gl}}(n)$ の場合における

$$\mathrm{trace}(A) := \operatorname*{Res}_{x=0}(Ax^{-1}\,dx)$$

の類似物である.)

Adler trace は次のように非常に良い性質を持っている:

- $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$.
- $\mathrm{trace}(A') = 0$.
- $\langle A, B\rangle := \mathrm{trace}(AB)$ によって定義される bilinear form は $\mathcal{E}$ 上非退化.
- $\mathrm{trace}([\log\partial, A]) = 0$.

これらの条件から, 以下が導かれる:

- $\langle\ ,\ \rangle$ は Lie algebra $\mathcal{E}$ の adjoint 作用に関して invariant である:

$$\langle [A,B], C\rangle + \langle B, [A,C]\rangle = 0 \quad (A, B, C \in \mathcal{E}).$$

- $\langle\ ,\ \rangle$ は $[\log\partial, \bullet]$ の作用に関しても invariant である:

$$\langle [\log\partial, A], B\rangle + \langle A, [\log\partial, B]\rangle = 0 \quad (A, B \in \mathcal{E}).$$

2.3 擬微分作用素のなす Lie algebra の central extension

Adler trace の性質より, $\mathcal{E}$ の 2-cocycle c を次のように定義することができる:

$$c(A,B) := \langle [\log\partial, A], B\rangle = \mathrm{trace}([\log\partial, A]B) \quad (A, B \in \mathcal{E}).$$

(これは, loop Lie algebra $\mathfrak{a}((x))$ の central extension として affine Lie algebra を定義するときに使われる 2-cocycle

$$c(A,B) := \langle [x\partial, A], B\rangle \quad (A, B \in \mathfrak{a}((x)))$$

の類似物とみなせる.)

この 2-cocycle を用いて, $\mathcal{E}$ の $\mathbb{C}c$ による central extension

$$\hat{\mathcal{E}} := \mathbb{C}((x))((\partial^{-1})) \oplus \mathbb{C}c$$

を考えることができる. Lie algebra 構造は $\mathcal{E} = \mathbb{C}((x))((\partial^{-1}))$ の commutator を $[\ ,\ ]_0$ と書くことにすれば,

$$[A,B] = [A,B]_0 + c(A,B)c \quad (A, B \in \mathcal{E} = \mathbb{C}((x))((\partial^{-1})))$$

によって定義される.

この central extension が我々のよく知っている central extension の拡張になっていることは以下のような計算をしてみればすぐにわかる.

$f, g \in \mathbb{C}((x))$ に対して,

$$\begin{aligned}
c(f,g) &= \mathrm{trace}([\log\partial, f]g) = \mathrm{trace}((f'\partial^{-1} - 1/2 f''\partial^{-2} + \cdots)g) \\
&= \mathrm{trace}(f'g\partial^{-1} + O(\partial^{-2})) = \operatorname*{Res}_{x=0}(f'g\,dx). \\
c(f\partial, g\partial) &= \mathrm{trace}([\log\partial, f\partial]g\partial) = \mathrm{trace}((f' - 1/2f''\partial^{-1} + 1/3f'''\partial^{-2} - \cdots)g\partial) \\
&= \mathrm{trace}(f'g - 1/2f''g + (1/2f''g' + 1/3f'''g)\partial^{-1} + O(\partial^{-2})) \\
&= \operatorname*{Res}_{x=0}[(1/2f''g' + 1/3f'''g)dx] = -1/6 \operatorname*{Res}_{x=0}(f'''g\,dx).
\end{aligned}$$

前者は Heisenberg algebra を定義するときに使われる 2-cocyle であり, 後者は Virasoro algebra を定義するときに使われる 2-cocycle である.

2.4 拡張された擬微分作用素のなす Manin triple

$\mathcal{E}$ への Abelian Lie algebra $\mathbb{C}\log\partial$ の作用は $\hat{\mathcal{E}}$ への作用に

$$[\log\partial, c] = 0$$

という条件によって自然に拡張される. これによって, Lie algebra

$$\mathfrak{g} := \tilde{E} := \mathbb{C}((x))((\partial^{-1})) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}\log\partial$$

が定義される. (これは $x\partial$ 付きの affine Lie algebra

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}((x)) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}x\partial$$

の類似物である.)

$\mathcal{E}$ の invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ は

$$\langle c, \log\partial\rangle = 0, \quad \langle c, E\rangle = \langle \log\partial, \mathcal{E}\rangle = 0$$

という条件によって, $\mathfrak{g}$ の invariant nondegenerate symmetric bilinear form に拡張される. (これも affine Lie algebra の場合と同様.)

$\mathfrak{g}$ の subalgebra $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_+ &:= \mathbb{C}((x))[\partial] \oplus \mathbb{C}c, \\
\mathfrak{g}_- &:= \mathbb{C}\log\partial \oplus \mathbb{C}((x))[[\partial^{-1}]]\partial^{-1}.
\end{aligned}$$

このとき, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ は Manin triple をなす. よって $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ は形式的に Lie bialgebra をなす.

拡張された擬微分作用素のなす Manin triple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ は KP 系の基本になる対称性である.

3 $\mathfrak{g}_- = \mathbb{C}\log\partial \oplus \mathbb{C}((x))[[\partial^{-1}]]\partial^{-1}$ に対応する Poisson Lie 群

$\mathfrak{g}_-$ を形式的に exponentiate して群 G_- を構成することができる.
G_- の要素とみなされるべき

$$\exp(\alpha\log\partial + a_1\partial^{-1} + a_2\partial^{-2} + \cdots)$$

は $\partial^\alpha = \exp(\alpha\log\partial)$ によって ∂ の非整数巾を含むように拡張された擬微分作用素で表わすことができる:

$$\partial^\alpha + u_1\partial^{\alpha-1} + u_2\partial^{\alpha-2} + \cdots .$$

ここで, ∂^α に関する交換関係は次の拡張された Leibnirz の法則が成立しているものと考える:

$$\partial^\alpha f = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}\partial^{\alpha-k}.$$

ここで, $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$ である.
以上の考察によって, Poisson bracket を入れたい場所の

(b) $\mathcal{L}_\alpha = \{\, L = \partial^\alpha + u_1\partial^{\alpha-1} + \cdots + u_n\partial^{\alpha-n} + \cdots \}$

をすべての α について和集合を取ったものとして, $\mathfrak{g}_-$ に対応する群 G_- を構成することができることがわかる:

$$G_- = \bigcup_\alpha \mathcal{L}_\alpha.$$

これが, quadratic Poisson bracket を定義する舞台である.
これに対して, $\mathfrak{g}_+ = \mathbb{C}((x))[\partial] \oplus \mathbb{C}c$ もしくは $\mathfrak{g}$ 全体に対応する群を構成することはできない. しかし, $\mathfrak{g}_+$ や $\mathfrak{g}$ の無限小作用を G_- に考えることは可能である.
$\mathfrak{g}_+$ の Abelian subalgebra $\mathfrak{a} = \mathbb{C}[\partial]$ の G_- への infinitesimal dressing action がソリトン系のフローを生成する.

4 $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{L}_\alpha$ は Poisson Lie 群の Poisson 部分多様体

一般に $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ が Manin triple のとき, $\mathfrak{g}_-$ に対応する Lie 群 G_- の上には自然に Poisson-Lie group の構造を定めることができる.
それがどういう構成になるかは KP 系とは独立に論じるべき一般論なので省略し, 結論を述べておこう:

(1) $G_- = \bigcup_\alpha \mathcal{L}_\alpha$ 上に Poisson-Lie 群の構造を定めることができる.
(2) $\mathcal{L}_\alpha = \{L = \partial^\alpha + u_1\partial^{\alpha-1} + \cdots + u_n\partial^{\alpha-n} + \cdots\}$ は G_- の Poisson 部分多様体をなしている.

(3) それによって定まる $\mathcal{L}_0$ 上の Poisson 構造は KP hierarchy の波動作用素のなす群のレベルでの Poisson 構造である.

(4) さらに, $\mathcal{M}_n = \{L = \partial^n + u_1\partial^{n-1} + \cdots + u_n\} \subset \mathcal{L}_n$ も G_- の Poisson 部分多様体をなしている.

(5) それによって定まる $\mathcal{M}_n$ 上の Poisson 構造は Gelfand-Dickey の second Poisson bracket と一致している.

ざっと見た感じでは, 以上で紹介した [EKRRR] よりも [KZ] の方の説明の方が詳しいようです.

参考文献

[EKRRR] B. Enriquez, S. Khoroshkin, A. Radul, A. Rosly, and V. Rubtsov: Poisson-Lie aspects of classical W-algebras, The interplay between differential geometry and differential equations, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 167 (1995) 37–59

[KZ] Boris Khesin and Ilya Zakharevich, Poisson-Lie group of pseudodifferential symbols, Commun. Math. Phys. 171 (1995) 475-530, http://jp.arxiv.org/abs/hep-th/9312088