ソリトン系の基本パターン Part 5

幾つかの疑問への回答

黒木 玄

2001 年 6 月 20 日*

目 次

1 reduction と Hamiltonian 構造 1
1.1 Hamiltonians の形は変わらない 1
1.2 phase space に関してはややこしい 3

2 first and second Poisson structures 4

3 KP, KdV, NLS の特殊性 5

この文書は以下のメールを補足修正したもの

```
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200106191831.DAA00651@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Date: Wed, 20 Jun 2001 03:31:15 +0900
Subject: 幾つかの疑問への回答
```

1 reduction と Hamiltonian 構造

疑問 1 Reduction と Hamiltonian 構造の関係はどうなっているか? 端的には KP と KdV の場合の関係はどうなっているか? □

1.1 Hamiltonians の形は変わらない

L-operator レベルでの Hamiltonians (もしくは擬微分作用素環上の函数としての Hamiltonians) は何も変わりません. KP の n-reduction は n の倍数番目の時間発展が trivial に

*これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-5.txt の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 18 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 6 月 20 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

なるような初期条件を取るだけですから, 何も変わるはずがない.

それでは reduction によって phase space が小さくなったはずではないかという疑問を持つ人がいるかもしれませんが, それを言いたいなら KP のレベルでそういう疑問を持たなければいけない. KP の Hamiltonians は擬微分作用素環 $\mathcal{E}$ 全体の上の函数でした. この疑問については次の節に書きます.

補足 1.1 reduction という言葉は数学的に様々な意味を持っていることを忘れると混乱してしまう. symplectic reduction や Hamiltonian reduction の意味での reduction と KP の n-reduction の意味での reduction の意味は正確には異なっていることに注意しなければいけない. 前者の意味での reduction は symplectic 構造や Hamiltonian 構造がなければ定義できないが, 後者の意味での reduction は Hamiltonian 構造抜きで定義された単なる constraints である. 例えば, Drinfeld-Sokolov reduction は前者の意味での reduction であり, reduction によって n-KdV hierarchy などの phase space 上の Poisson 構造が定義される. そのようにして classical W_n algebra が構成される. そういう話と KP の n-reduction の話を混同してはいけない. □

一般に, 一つの L-operator が L の函数で時間発展の generators L_i が表わされているとします:

$$L_i = f_i(L).$$

これが時間発展の generators であるとは, L_i が L と可換でかつ,

$$\partial_{t_i} L = [(L_i)_-, L] = [(L_i)_+, L] \tag{$*$}$$

という形の Lax 方程式でソリトン系の hierarchy を生成していることである.

例えば, L_i が L の分数巾の多項式であれば L_i は L と可換になる. KdV の場合は $L = \partial^2 + u$ であり, $L_i = L^{i/2}$ $(i = 3, 5, 7, \dots)$ であるから, L_i は L と可換である.

また, NLS の場合では reduction の条件によって $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial)$ と L は可換であり, 時間発展の generators は $L_i = Q^{i-1}L$ の形をしていたので, これらも L と可換である.

以下では以上のような状況を考える.

そのような状況のもとでは $f_i(L)$ の不定積分 $F_i(L)$ を取り,

$$H_i(L) = \mathrm{trace}(F_i(L))$$

と置けば, 適切に制限された L に関して (NLS ならば $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial)$ と可換な L に関して), 対応する Hamilton 方程式はちょうど $(*)$ の形になる.

KP の L に関する Hamiltonian functions は

$$H_i(L) = \frac{1}{i+1}\,\mathrm{trace}(L^{i+1}) \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

である. $L^{i+1}/(i+1)$ は L^i の L に関する不定積分である.

KdV の L-operator は KP の L の二乗 L^2 に等しい. L^2 と L は ± 1 倍の不定性を除いて一対一に対応しているので, KdV の L-operator にうつっても KP の L の情報はほとんど完全に保たれる. KdV の Hamiltonians の形は KP のそれと同じである.

NLS の $L = W\,\mathrm{diag}(\partial, -\partial)W^{-1}$ に関する Hamiltonians は

$$H_i(L) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(Q^{i-1}L^2) \quad (Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial),\ i = 1, 2, 3, \dots)$$

である. $1/2Q^{i-1}L^2$ は $Q^{i-1}L$ の L に関する不定積分である.

1.2 phase space に関してはややこしい

一般に Lie algebra $\mathfrak{g}$ の dual space $\mathfrak{g}^*$ には自然に Poisson 構造が入る. $\mathfrak{g}^*$ の symplectic leaves は coadjoint orbits と一致する.

擬微分作用素環 $\mathcal{E} = \mathbb{C}((x))((\partial^{-1}))$ の linear Poisson 構造とは r-bracket

$$[A, B]_r = [A_+, B_+] - [A_-, B_-]$$

に関する Lie algebra $\mathcal{E}_r$ の dual space に入る自然な Poisson 構造のことである. ただし, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_r$ の dual space と $\mathcal{E}$ 自身を自然な内積によって同一視するので, 実際には Poisson 構造は $\mathcal{E}$ 上に入ることになる. その Poisson 構造に関する symplectic leaves は E_r に対応する群の coadjoint orbits と一致する.

Lie algebra $\mathcal{E}_r$ は Lie algebra として, $\mathcal{E}_+ = \mathcal{D}$ と $-\mathcal{E}_-(= \mathcal{E}_-$ の opposite Lie algebra) の直積に等しい. そして, $(\mathcal{E}, \mathcal{E}_+, E_-)$ は Manin triple をなす. よって特に, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{E}_-$ は Lie bialgebra をなす. $\mathcal{E}^*$ は Lie algebra として $-\mathcal{E}_r$ に同型であり, $\mathcal{E}_+$ と $\mathcal{E}_-$ は互いに相手の dual space になっている.

さて, KP の Hamiltonian 構造は KP の L の空間

$$X := \{\, L = W\partial W^{-1} \mid W \in G_- \,\}, \quad (G_- := 1 + \mathcal{E}_-)$$

上に与えられているのではなく, $\mathcal{E}$ 全体の上で定義されている. 本当は X 上に Poisson 構造が定義されていて, その上に Hamiltonian が定義されているという形で定式化がなされていることの望ましい. しかし, そうはなってないのである.

X は (無限次元の多様体として)

$$G_-/Z_- \quad (ここで\ Z_- := 1 + \mathbb{C}[[\partial^{-1}]]\partial^{-1})$$

に同型である. この上の Poisson bracket は, Lie bialgebra $\mathcal{E}_-$ に対応する群 G_- 上の Poisson 構造から来ていると考えるのは正しいであろう.

よって, 正しい phase space 上での Poisson 構造を考えるためには, どうしても群レベルでの Poisson 構造を考える必要がある. したがって, quadratic Poisson bracket を考えなければいけない.

しかし, quadratic Poisson bracket の話は後回しにすることにしたので, ここではこれ以上この話に深入りすることはしない.

補足 1.2 Poisson 構造入りの phase space を reduction で構成するためには, Poisson reduction の手続きが必要である. Lie group の momentum map や Hamiltonian action による reduction の理論は, Poisson Lie group に関する理論として大幅に一般化されている.

単なる Lie group の理論は trivial な Poisson 構造を持つ場合として, Poisson Lie group の理論に含まれてしまっている. この点は幾何学において Hamiltonian reduction の理論が重要であることから, もっと強調されてしかるべきであろう. そして, さらに Poisson Lie group の理論は quantum group の理論に量子化されている. □

補足 1.3 擬微分作用素のなす Lie bialgebra に付随する Poisson Lie group を考えることによって W-algebra の理論を構成することに関しては以下の文献を参照せよ:

- Boris Khesin and Ilya Zakharevich: Poisson-Lie group of pseudodifferential symbols and fractional KP-KdV hierarchies, C. R. Acad. Sci., v. 316 (1993) Serie I, 621–626, `hep-th/9311125`
- Boris Khesin and Ilya Zakharevich: Poisson-Lie group of pseudodifferential symbols, Commun. Math. Phys. 171 (1995) 475–530, `hep-th/9312088`
- B. Enriquez, S. Khoroshkin, A. Radul, A. Rosly, V. Rubtsov: Poisson-Lie aspects of classical W-algebras, The interplay between differential geometry and differential equations, 37–59, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 167, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995

以上の論文は KP の Hamiltonian 構造に関する基本文献である. □

2 first and second Poisson structures

疑問 2 1st & 2nd Hamiltonian structures という 2 通りの構造が文献にはあらわれます. さらには, それらを線型に interporate して one parameter family ができるという状況を bi-Hamiltinian structure と呼んでいるようです. これはいかにも大切なかんじがする. こういう話とこれまでの理解はどういう関係にあるか. □

Hamiltonian structure と言うと, Poisson 構造だけではなく, Hamiltonians も与える場合のことを指すと思うので, first and second Poisson structures と呼ぶことにする. 実は,

$$\text{first Poisson structure} = \text{linear Poisson structure},$$
$$\text{second Poisson structure} = \text{quadratic Poisson structure}$$

である. 難しいのは後者の方であり, 群上の Poisson 構造と関係があるという点でより本質的な Poisson 構造も後者の方である.

前者の linear Poisson 構造は上に書いたように, r-bracket が定める Lie algebra の dual space に入る自然な Poisson 構造のことです. classical r-matrix を使って,

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\}_1 = [r, L \otimes 1 + 1 \otimes L]$$

で定義される Poisson bracket は linear (or first) Poisson structure の典型例である.

後者の quadratic (or second) Poisson 構造の典型例は次の Sklyanin bracket である:

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\}_2 = [r, L \otimes L].$$

以上の 2 つの Poisson bracket のあいだには次の関係がある:

$$\{aL + b1 \underset{,}{\otimes} aL + b1\}_2 = a^2\{L \underset{,}{\otimes} L\}_2 + ab\{L \underset{,}{\otimes} L\}_1. \tag{$**$}$$

ここで, a, b は任意パラメータである. 実際,

$$\begin{aligned}\{aL + b1 \underset{,}{\otimes} aL + b1\}_2 &= [r, a^2 L \otimes L + ab(L \otimes 1 + 1 \otimes L) + b^2 1 \otimes 1] \\ &= a^2[r, L \otimes L] + ab[r, L \otimes 1 + 1 \otimes L] + b^2[r, 1 \otimes 1] \\ &= a^2\{L \underset{,}{\otimes} L\}_2 + ab\{L \underset{,}{\otimes} L\}_1.\end{aligned}$$

等式 $(**)$ から, 同一の r-matrix から定義された linear Poisson bracket と quadratic Poisson bracket の一次結合もまた Poisson bracket になることがわかる.

先のメールで紹介した Yuri B. Suris や S. Parmentier の論文は Sklyanin brakcet が適切でない状況における quadratic Poisson bracket をどのように定義すれば良いかについての研究です. それらの文献に関しては

http://www.math.tohoku.ac.jp/∼kuroki/Hyogen/hamiltonian-str.html

を見て下さい. 特に,

S. Parmentier, On coproducts of quasi-triangular Hopf algebras, (English. English summary) Algebra i Analiz 6 (1994), no. 4, 204–222; translation in St. Petersburg Math. J. 6 (1995), no. 4, 879–894

は一般化された quadratic Poisson bracket の量子化に関する仕事なので重要である.

要するに大事な話から逃げないためには, r-matrix の理論や Lie bialgebra の理論や Poisson Lie group の理論や quadratic Poisson bracket の理論から逃げてはいけないということですね.

quantum group と関係があるのは quadratic Poisson bracket の方です. 一方, universal enveloping algebra の意味での量子化と関係があるのは linear Poisson bracket の方です.

3 KP, KdV, NLS の特殊性

疑問 3 NLS が特殊であるとはどのような意味でなのか? 具体的にはたとえば, $\hat{sl}_3$ の homogeneous Vertex represenatatin に付随する系 (いいかえると $(1,1,1)$-reduced な 3-cKP) の場合には, その特殊事情は保たれるのか否か. □

疑問 1 への回答に書いたように, (1-component) KP や KdV や NLS の特殊な点は一つの L-operator L の函数で時間発展の generators L_i が

$$L_i = f_i(L) \tag{1}$$

と書けることである. ここで, L_i が時間発展の generators であるとは, hierarchy が

$$\partial_{t_i} L = [(L_i)_-, L] = [(L_i)_+, L] \tag{2}$$

という Lax 方程式系で書けていることである．この条件が成立しているおかげで, Hamiltonians として,

$$H_i(L) = \mathrm{trace}(F_i(L)) \qquad (F_i \text{ は } f_i \text{ の不定積分}) \tag{3}$$

が取れるのであった.

例えば, KdV の場合は

$$L = \partial^2 + u = W\partial^2 W^{-1},$$
$$L_i = L^{i/2}, \quad H_i(L) = \frac{2}{i+2}\,\mathrm{trace}\left(L^{(i+2)/2}\right) \qquad (i = 3, 5, 7, \dots),$$

が取れ, NLS の場合は

$$Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial) = W\,\mathrm{diag}(\partial, \partial)W^{-1}, \quad L = W\,\mathrm{diag}(\partial, -\partial)W^{-1},$$
$$L_i = Q^{i-1}L, \quad H_i(L) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(Q^{i-1}L^2) \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

が取れる．(ここで,

$$\partial^2 + u = W\partial^2 W^{-1}, \quad \mathrm{diag}(\partial, \partial) = W\,\mathrm{diag}(\partial, \partial)W^{-1}$$

はそれぞれ KdV と NLS を得るための reduction の条件である.)

注意しなければいけないことは L_i の L を用いた表示は一意的ではないことである．よって, L_i に対応した Hamiltonian $H_i(L)$ の取り方も一意的ではない.

ソリトン系の Lax 方程式がその系の L-operators (それは特別な形の擬微分作用素, 例えば, KdV なら $L = \partial^2 + u$, NLS なら $L = W\,\mathrm{diag}(\partial, -\partial)W^{-1}$) のなす部分多様体の上に定めるベクトル場を擬微分作用素全体の上の Hamiltonian vector field に拡張するやり方は一意的ではない.

例えば, NLS の場合では i が正の奇数であるとき, 上の L_i の表示の代わりに $L_i = L^i$ が取れ, 対応する Hamiltonian として $H_i(L) = \frac{1}{i}\,\mathrm{trace}(L^i)$ が取れる．このような Hamiltonian の非一意性は気になるところである.

それどころか, KdV や NLS では成立していた (1), (2) のような特殊な条件は大抵成立してない.

例えば, 2 以上の n に関する n-component KP では成立してない.

さらに, 3-component KP の $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial, \partial)$ に関する reduction でも成立してないと思う[1].

Q-reduction を課すと, 独立な時間変数は 3∞ 個から 2/3 の 2∞ 個に減る．2∞ 個なので全ての独立な時間発展を表わすためには, Q の他に 2 つ L が必要である.

その 2 つは (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $(1, 1, 1)$ と合わせて一次独立になるように取り,

$$L_1 = W\,\mathrm{diag}(a_1\partial, b_1\partial, c_1\partial)W^{-1}, \quad L_2 = W\,\mathrm{diag}(a_2\partial, b_2\partial, c_2\partial)W^{-1}$$

と定めれば良い.

[1]適切な quadratic Poisson bracket を採用し, 適切な L の形を選べば以上の気持ち悪い問題は全て解決する (2002 年 1 月 18 日の追記). 「ソリトン系の基本パターン Part 6, 7」を参照せよ.

補足 3.1 零でない互いに異なる数 a, b, c を取り,

$$L = W\,\mathrm{diag}(a\partial, b\partial, c\partial)W^{-1}$$

と置くと, 同一の L を与える W の不定性はちょうど定数対角行列係数の擬微分作用素の右からの積の分だけある. (この事実のより一般的な場合については

http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-4.txt

の定理 2.4 を見よ.)　だから, この L に関する Lax 方程式系は well-defined な hierarchy を定める. この意味で L は一つあれば十分である. □

NLS の場合は独立な時間変数の個数が reduction によって 2∞ から ∞ に減ったので, $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial)$ の他にもう 1 つの L があれば十分だった.

それに対して, 3-component KP の $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial, \partial)$ に関する reduction の場合では, 上の L_1, L_2, Q の函数で系の全ての時間発展の generators を表わすことができるが, どれか一つ欠けても表わすことは不可能になる.

何か巧妙な方法があってうまく行く可能性が完全にないとは言えないのであるが, 少なくとも単純にはうまく行かない.

補足 3.2 Hamiltonian を見付けるという問題は, ソリトン系の Lax 方程式がその系の L-operators 全体のなす部分多様体の上に定めるベクトル場を擬微分作用素全体の上の Hamiltonian vector field に拡張するという問題と同じである. 一般に任意の Hamiltonian $H(L)$ に関する Hamilton 方程式は

$$\{L, H_i\}(L) = [(f(L))_-, L] - [f(L), L]_- = [(f(L))_+, L] - [f(L), L]_+$$

という形になる. ここで, $f(L) := \nabla H(L)$ と置いた. f は擬微分作用素 L に対して, 擬微分作用素 $f(L)$ を対応させる函数である. この Hamilton 方程式は $f(L)$ と可換な L において Lax 方程式の形になる. □

実は以上に書いたような事情があるので,

http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Quantization-2.txt

の「2. 量子ソリトン系に向けての別の方針」を考えなければいけなかったのである. いずれにせよ, L のレベルではなく W のレベルで Poisson 構造をつかまえることは考えるべき問題だと思う.