ソリトン系の基本パターン Part 1 の補足

黒木 玄

2001 年 5 月 23 日*

目 次

以下のメールの修正版

```
Date: 23 May 2001 12:11:52 JST
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200105230311.MAA27350@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: formal flow and Gauss decomposition
```

1 $\exp(\sum t_i P_i)$ が G の元とみなせないことへの対策

|・p(t) を文字通りには G の元と見なすことはできない点

$p(t) = \exp(\sum t_i P_i)$ は formal に扱うしかないでしょう.

収束している本物の解は Grassmann に値を持つ函数で各点での Taylor 展開が $p(t)$ から来る formal な解に一致する (もしくは同じことだが P_i から来るベクトル場に t_i に関する微分で得られた速度ベクトルが一致する) という風に扱うことにすれば良いのだと思います.

でも, 無限次元の幾何なのでおお真面目に定式化すると大変そうですね. Mulase さんは Katsura-Ueno-Shimizu をどこかで引用していたと思う.

P_i たちに対応するフローは G_- 上の conjugation invariant な函数たちを Hamiltonian とするフローになっているようです. 戸田系の場合に確かめれば, mKP, KP, mKdV, KdV,

---

* これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-1.1.txt の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 20 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 5 月 23 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

... を含んでいるし, straight forward に拡張すれば多成分系も扱えるので, 良いのですが, 実はまだ確かめてないのだ.

この辺の事情をはっきりさせれば, P_i を天下りに与えるという感じは全くなくなります. 群上の conjugation invariant functions という大昔から基本的であることがよくわかっていたものからフローがやって来ることになる.

2 Gauss 分解について

|・Gauss 分解の「使える」一般論がどの程度あるのか

ええと, Gauss 分解のような精密な結果は難しいですが, 一般に Lie algebra が subalgebras の線形直和に

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_N$$

と分解しているとき, 対応する群 G の単位元の十分小さな近傍の元 g が

$$g = g_1 \cdots g_N, \qquad (g_1, \ldots, g_N) \in G_1 \times \cdots \times G_N \text{ の単位元の近傍}$$

と一意的分解するというのは一般論からすぐに出ます. そして, $G_1 \cdots G_N$ は G の中で open dense になる. こういう雑なレベルの話で良いならば Lie algebra のレベルで直和になっていることを確かめれば十分です.

Gauss 分解できない g についてはどうするかという話をするためには, G/G_+ という Grassmann 多様体もしくは flag 多様体上の flow を考えなければいけなかったのでした.

(G, G_+, G_-) は戸田系の場合には Poisson double をなしていて, G/G_+ の中に G_- が open dense に入っているという形になる. G/G_+ 上の flow の Hamilton 構造もその枠組から得られます.

後で書きたいこと: KP での擬微分作用素と戸田系の場合の差分作用素について