ソリトン系の基本パターン Part 1

黒木 玄

2001 年 5 月 23 日*

目 次

---

* これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-1.0.txt の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 20 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 6 月 3 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

以下のメールの修正版

```
Date: 22 May 2001 15:26:23 JST
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200105220626.PAA14807@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: ソリトン系の基本パターン
```

Hamilton 構造のような重要な構造抜きの話にしてしまうと、 KP, KdV, ... のようなソリトン系のフローは非常にシンプルで普遍的なパターンで構成できます。以下はその普遍的なパターンの解説。

1 基本設定

$\mathfrak{g}$ は Lie algebra とし, G は対応する単連結な Lie group とする. このノートの全体で以下を仮定する.
(1) $\mathfrak{g}$ は subalgebras $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ の線形直和になっている:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-. \tag{1.1}$$

任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して X_+, X_- を,

$$X = X_+ - X_-, \quad X_+ \in \mathfrak{g}_+, \quad X_- \in \mathfrak{g}_- \tag{1.2}$$

という条件によって定義する. $G_\pm$ はそれぞれ $\mathfrak{g}_\pm$ に対応する G の部分群であるとする. $\mathfrak{g}$ の直和の群バージョンとして以下が成立する:

- 群演算による $G_- \times G_+$ の G における像は G の中で open dense.
- G の単位元のある近傍に入る任意の $g \in G$ は

$$g = g_-^{-1} g_+, \quad g_+ \in G_+, \quad g_- \in G_- \tag{1.3}$$

  と一意に分解される. 以下単位元に十分近い $g \in G$ のみを考え, この条件によって, $g \in G$ に対する $g_+ \in G_+$, $g_- \in G_-$ を定義しておく.

(2) $P_i \in \mathfrak{g}$ $(i \in I)$ は互いに可換である. 以下,

$$p = p(t) = \exp\left(\sum t_i P_i\right) \quad (t \text{ の } G \text{ 値函数}) \tag{1.4}$$

と置く. これは定数係数の線形微分方程式系

$$\partial_i p = P_i p \quad (i \in I) \tag{1.5}$$

の基本解である. ここで, $\partial_i = \partial/\partial t_i$ と書いた. $p = p(t)$ の G への左からの積は G の上にフローを定める.

2 G 上のフローから Sato-Wilson 方程式へ

初期条件 $g(0) \in G$ に対する G 上のフロー解を

$$g = g(t) = p(t)g(0) \tag{2.1}$$

と定義する. この g を $g = g_-^{-1}g_+$ と分解し, 両辺を t_i で微分すると,

$$P_i g = g_-^{-1}\frac{\partial g_+}{\partial t_i} - g_-^{-1}\frac{\partial g_-}{\partial t_i}g_-^{-1}g_+. \tag{2.2}$$

この両辺に左から g_- を右から g_+^{-1} をかけると,

$$g_-P_ig_-^{-1} = \frac{\partial g_+}{\partial t_i}g_+^{-1} - \frac{\partial g_-}{\partial t_i}g_-^{-1}. \tag{2.3}$$

よって,

$$L_i = g_-P_ig_-^{-1} \in \mathfrak{g}, \tag{2.4}$$

$$B_i = \frac{\partial g_+}{\partial t_i}g_+^{-1} \in \mathfrak{g}_+, \tag{2.5}$$

$$B_i^c = \frac{\partial g_-}{\partial t_i}g_+^{-1} \in \mathfrak{g}_- \tag{2.6}$$

と置くと, 以下が成立する:

$$L_i = B_i - B_i^c, \tag{2.7}$$

$$B_i = (L_i)_+ \in \mathfrak{g}_+, \tag{2.8}$$

$$B_i^c = (L_i)_- \in \mathfrak{g}_-, \tag{2.9}$$

$$[L_i, L_j] = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial g_+}{\partial t_i} = B_ig_+, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial g_-}{\partial t_i} = B_i^cg_- = B_ig_- - g_-P_i. \tag{2.12}$$

最後の (2.12) の最右辺は (2.4), (2.7) から得られる等式

$$B_i^c = B_i - g_-P_ig_-^{-1} \tag{2.13}$$

を $B_i^cg_-$ に代入することによって得られる. 方程式 (2.12) を **Sato-Wilson 方程式**と呼ぶ.

3 Sato-Wilson 方程式から Lax 型式と G 上のフローへ

$g_- = g_-(t) \in G_-$ に関して以下を仮定する:

$$L_i = g_-P_ig_-^{-1} \in \mathfrak{g}, \tag{2.4}$$

$$B_i = (L_i)_+ \in \mathfrak{g}_+, \tag{2.8}$$

$$B_i^c = (L_i)_- \in \mathfrak{g}_-, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial g_-}{\partial t_i} = B_i^cg_- = B_ig_- - g_-P_i. \tag{2.12}$$

このとき,

$$L_i = B_i - B_i^c, \tag{2.7}$$
$$[L_i, L_j] = 0 \tag{2.10}$$

が成立する. (ここで, $g_+(t)$ は given でないことに注意せよ. よって, (2.11) は仮定されてない.)

以上の仮定のもとで $\Psi = \Psi(t)$ を次のように定める:

$$\Psi = \Psi(t) = g_-(t)p(t)g_-(0)^{-1}. \tag{3.1}$$

注意 3.1 ここではそのように仮定してないが, もしも $g_-(t)$ が (2.1), (1.3) によって与えられていたとすれば

$$g_(t)^{-1}g_+(t) = p(t)g_-(0)^{-1}g_+(0)$$

が成立しているので, $\Psi(t)$ は $\Psi(t) = g_+(t)g_+(0)^{-1}$ という表示を持つ. □

このとき, 簡単な計算で以下が成立することが確かめられる:

$$\Psi(0) = 1, \tag{3.2}$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial t_i} = B_i\Psi. \tag{3.3}$$
$$L_i\Psi = \Psi L_i(0). \tag{3.4}$$

等式 (3.2), (3.3) は Ψ が方程式 $\partial_i u = B_i u$ の基本解であることを意味しており, Ψ はその条件で一意に特徴付けられる. よって特に, $\Psi \in G_+$ が成立している.

等式 (3.4) は基本解 Ψ を用いれば L_i の初期条件 $L_i(0)$ の時間発展は

$$L_i(t) = \Psi(t)L_i(0)\Psi^{-1}(t) \tag{3.4'}$$

と書けることを意味している. Ψ は normalized された Baker-Akhiezer 函数の類似物である. もしも v が $L_i(0)$ の固有値 λ_i の固有ベクトルであるならば, $\psi = \Psi v$ と置けば

$$L_i(t)\psi(t) = \lambda_i\psi(t)$$

が成立し, 見掛け上の類似性がより見易くなる.

等式 (3.3), (3.4) の compatibility より, 以下が成立することもすぐにわかる:

$$[\partial_i - B_i, L_j] = 0, \tag{3.5}$$
$$[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] = 0. \tag{3.6}$$

ここで, $\partial_i = \partial/\partial t_i$ と書いた. (3.5) を $L_i = g_- P_i g_-^{-1}$ に関する **Lax 方程式**と呼び, (3.6) を零曲率方程式と呼ぶ. (B_i は L_i から $B_i = (B_i)_+$ によって定められる.)

以上によって, Sato-Wilson 方程式から Lax 型式が導かれることがわかった.

さて, 初期条件 $g_+(0) \in G_+$ に対する (2.11) の解を

$$g_+ = g_+(t) = \Psi(t) g_+(0)$$

によって構成することができる. これと Sato-Wilson 方程式の解 g_- と合わせて,

$$g(t) = g_-(t)^{-1} g_+(t) \in G$$

と置く. このとき, (2.11), (2.12) より, $g(t)$ は

$$\partial_i g(t) = P_i g(t)$$

を満たしていることがわかる. よって, (2.1) が成立する.

以上によって, Sato-Wilson 方程式から G 上のフローを復活させることができることがわかった. ただし, G 上のフローは $g_+(t)$ の初期条件 $g_+(0)$ の取り方の分だけ不定性がある.

4 Lax 方程式と零曲率方程式の関係

この節では $L_i = L_i(t) \in \mathfrak{g}$ が与えられていると仮定し,

$$B_i = (L_i)_+ \in \mathfrak{g}_+, \tag{2.8}$$
$$B_i^c = (L_i)_- \in \mathfrak{g}_-, \tag{2.9}$$

と置く. このとき,

$$L_i = B_i - B_i^c \tag{2.7}$$

が成立している. さらに,

$$[L_i, L_j] = 0 \tag{2.10}$$

を仮定する.

この節では以下の 5 つの方程式の間の関係について考察する:

$$[\partial_i - B_i, L_j] = 0, \tag{3.5}$$
$$[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] = 0, \tag{3.6}$$

$$[\partial_i - B_i^c, L_j] = 0, \tag{4.1}$$
$$[\partial_i - B_i^c, \partial_j - B_j^c] = 0, \tag{4.2}$$

$$[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j^c] = 0. \tag{4.3}$$

これらの方程式を総称して **Lax 型式**と呼ぶことにする.

定理 4.1 Lax 型式の方程式のあいだには以下の関係がある:

$$(3.5) \iff (4.1). \tag{4.4}$$
$$(3.5) \implies (3.6) \text{ and } (4.2). \tag{4.5}$$
$$(4.1) \implies (3.6) \text{ and } (4.2). \tag*{(4.5)'}$$
$$(3.6) \implies ((3.5) \iff (4.3)). \tag{4.6}$$
$$(4.2) \implies ((4.1) \iff (4.3)). \tag*{(4.6)'}$$

よって,

$$(3.5) \text{ or } (4.1) \Rightarrow \text{残りの全て}. \tag{4.7}$$
$$((3.6) \text{ or } (4.2)) \text{ and } (4.3) \implies \text{残りの全て}. \tag{4.8}$$

すなわち, 2 つの Lax 方程式 (3.5), (4.1) のどちらかを仮定すると残りの全てが導かれ, 3 つの零曲率方程式 (3.6), (4.2), (4.3) のうち (4.3) ともう 1 つを仮定すると残りの全てが導かれる. □

さて, 上の定理を証明しよう. (4.5)', (4.6)' は (4.5), (4.6) と同様に証明できるので省略する.

(4.4) の証明. (2.7), (2.10) より,

$$[\partial_i - B_i, L_j] = [\partial_i - B_i^c - L_i, L_j] = [\partial_i - B_i^c, L_j].$$

よって, (3.5) $\iff$ (4.1) であることは明らか. □

(4.5) の証明. (3.5) を仮定すると, (4.4) より (4.1) も成立する. (3.5) と i と j を入れ換えた (4.1) に (2.7) を代入すると,

$$[\partial_i - B_i, B_j - B_j^c] = 0, \quad [\partial_j - B_j^c, B_i - B_i^c] = 0.$$

この 2 つの式の左辺が等しいという等式は, 左辺に B_i, B_j の項を移項し, 右辺に B_i^c, B_j^c の項を移項することによって, 次のように整理することができる:

$$[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] = [\partial_i - B_i^c, \partial_j - B_j^c].$$

この等式の左辺は $\mathfrak{g}_+$ に含まれ, 右辺は $\mathfrak{g}_-$ に含まれている. よって, 両辺は $\mathfrak{g}_+ \cap \mathfrak{g}_- = \{0\}$ に含まれることになるので, 0 でなければいけない.

以上によって (3.5) から (3.6) と (4.2) が導かれることがわかった. □

(4.6) の証明. (3.6) に (2.7) から出る $B_j = B_j^c + L_j$ を代入すると,

$$[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j^c - L_j] = 0.$$

これは次と同値である:

$$[\partial_i - B_i, L_j] = [\partial_i - B_i, \partial_j - B_j^c].$$

よって, (3.5) $\iff$ (4.3) であることがわかる. □

5　Lax 型式から Sato-Wilson 方程式へ

この節では $L_i = L_i(t) \in \mathfrak{g}$ が与えられていると仮定し,

$$B_i = (L_i)_+ \in \mathfrak{g}_+, \tag{2.8}$$
$$B_i^c = (L_i)_- \in \mathfrak{g}_-, \tag{2.9}$$

と置く. このとき,

$$L_i = B_i - B_i^c \tag{2.7}$$

が成立している. Lax 型式における次の二つの方程式を仮定する:

$$[\partial_i - B_i, L_j] = 0, \tag{3.5}$$
$$[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] = 0. \tag{3.6}$$

L_i たちの可換性 (2.10) は仮定してないことに注意せよ.

問題はこれから逆に Sato-Wilson 方程式を導くことである. そのためには次の仮定が必要である:

$$L_i(0) = g_-(0) P_i g_-(0)^{-1}, \quad g_-(0) \in G_-. \tag{5.1}$$

要するに (2.4) の初期条件だけは仮定するのである.

P_i たちの可換性に注意すれば, 零曲率方程式 (3.6) は次の Sato-Wilson 方程式の可積分条件に同値であることがわかる:

$$\partial_i u = B_i u - u P_i \quad (u \in G). \tag{5.2}$$

よって, 任意の初期条件 $u(0) \in G$ に対するこの方程式の解 $u(t)$ が一意に存在する. 以下では

$$u(0) = g_-(0) \in G_- \tag{5.3}$$

と仮定する.

しかし, $u(t)$ が G_- に含まれるかどうかは自明でないことに注意せよ. 元来の Sato-Wilson 方程式は G_- に値を持つ函数に関する方程式である. 以下では,

$$L_i = u P_i u^{-1} \tag{5.4}$$

が成立していることを示すことによって, $u(t)$ が実際に G_- に含まれていることとを証明する.

$X_i = L_i - u P_i u^{-1} \in \mathfrak{g}$ と置くと, Lax 方程式 (3.5) と (5.2) を用いて,

$$[\partial_i - B_i, X_j] = 0 \tag{5.5}$$

が成立することを示せる. 初期条件に関する (5.1) と (5.3) より,

$$X_j(0) = 0 \tag{5.6}$$

であることがわかる. よって, 線形微分方程式 (5.5) の初期値問題の解の一意性より, $X_j(t) = 0$ すなわち (5.4) が成立する.

方程式 (5.2) に左から u^{-1} をかけると, B_i, B_i^c の定義 (2.8), (2.9) および (5.4) より,

$$(\partial_i u)u^{-1} = B_i - uP_i u^{-1} = B_i - L_i = B_i^c \in \mathfrak{g}_-. \tag{5.7}$$

よって, 方程式 (5.2) は G_- で閉じた線形微分方程式

$$\partial_i u = B_i^c u \tag{5.8}$$

に同値である. よって, 初期条件 (5.3) のもとで $u(t) \in G_-$ である.

これによって Lax 型式の二つの方程式

$$[\partial_i - B_i, L_j] = 0, \tag{3.5}$$

$$[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] = 0 \tag{3.6}$$

および初期条件に関する仮定

$$L_i(0) = g_-(0)P_i g_-(0)^{-1}, \quad g_-(0) \in G_-. \tag{5.1}$$

から第 2 節の Sato-Wilson 方程式に関係する結果の全てが導かれることがわかった.

6 まとめ

初期条件に関する仮定

$$L_i(0) = g_-(0)P_i g_-(0)^{-1}, \quad g_-(0) \in G_-. \tag{5.1}$$

が満たされている状況のもとでは以下の方程式は全て互いに同等である:

(6.1) G 値函数 $g = g(t)$ に関する定数係数の線形微分方程式:

$$\partial_i g = P_i g.$$

(6.2) G_- 値函数 $g_- = g_-(t)$ に関する Sato-Wilson 方程式:

$$\partial_i g_- = B_i g_- - g_- P_i.$$

ただし, $L_i = g_- P_i g^{-1}$, $B_i = (L_i)_+$, $B_i^c = (L_i)_-$ と定める.

(6.3) $\mathfrak{g}$ 値函数たち L_i と G 値函数 Ψ に関する線形型式:

$$L_i\Psi = \Psi P_i, \quad \partial_i\Psi = B_i\Psi.$$

ただし, $B_i = (L_i)_+$ と定める.

(6.4) $\mathfrak{g}$ 値函数たち L_i に関する Lax 型式:

$$[\partial_i - B_i, L_j] = 0, \quad [\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] = 0.$$

ただし, $B_i = (L_i)_+$ と定める.

7 KP 系

KP 系を得るためには,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{gl}(\infty), \\
\mathfrak{g}_+ &= \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} = (\text{maximal “parabolic” subalgebra}), \\
\mathfrak{g}_- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} = (\text{opposite “nilpotent” subalgebra}), \\
P_i &= \Lambda^i \in \mathfrak{g}_+, \quad i \in I = \mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, \dots\}
\end{aligned}$$

と置けば良い. ここで, Λ は $(m, m+1)$ 成分が全て 1 で他は 0 の上三角行列であり, $*$ は半無限サイズのブロックを意味している.

このとき, G/G_+ は無限次元 Grassmann 多様体になり, その中の単位元に対応する点を通る G_--orbit は無限次元 Grassmann 多様体の open cell になる.

8 mKP 系

modified KP 系を得るためには,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{gl}(\infty), \\
\mathfrak{g}_+ &= \mathfrak{b}_+ = (\text{対角成分を含む上三角}), \\
\mathfrak{g}_- &= \mathfrak{n}_- = (\text{対角成分を含まない下三角})
\end{aligned}$$

と置けば良い. P_i は KP 系の場合と同じ.

このとき, G/G_+ は無限次元 flag 多様体になり, その中の単位元に対応する点を通る G_--orbit は無限次元 flag 多様体の open cell になる.

9 KdV 系と mKdV 系

KP 系と mKP 系の設定を Λ^2 と可換という条件で reduction を考えると KdV 系 と mKdV 系が得られる. Reduction の結果得られる Lie algebra は $\mathfrak{sl}(2)$ の loop 化に同型である.

さらに, spectral parameter z を導入して 2×2 の行列の世界で実現すれば, KdV や mKdV の Drinfeld-Sokolov reduction の手続きが得られる.

他の reduction の場合も同様である.

10 戸田系

戸田系 (戸田階層) に関する詳しい解説は高崎さんの本にある.

戸田系を得るためには,

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\infty) \times \mathfrak{gl}(\infty), \\
&\mathfrak{g}_+ = \{\, (X, X) \mid X \in \mathfrak{gl}(\infty) \,\}, \\
&\mathfrak{g}_- = \{\, (H/2 + X, -H/2 + Y) \mid H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{n}_+, Y \in \mathfrak{n}_- \,\}, \\
&i = I = \mathbb{Z}_{\neq 0}, \quad P_i = \begin{cases} (\Lambda^i, 0) & \text{if } i > 0, \\ (0, (\Lambda^t)^{-i}) & \text{if } i < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

と置けば良い. ここで, $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{h}$ はそれぞれ対角線を含まない $\mathfrak{gl}(\infty)$ の上三角, 下三角と対角行列全体のなる Cartan subalgebra であり, X^t は X の転置である.

このとき, G_- は $GL(\infty)$ と同型であり, G/G_+ の中の単元に対応する点を通る G_--orbit は G/G_+ (これは $GL(\infty)$ と同一視される) の中で open dense であり, G_- と多様体として同型である.

その同型を通して, G 上のフローが $GL(\infty)$ 上に誘導するフローは次の形になる:

$$g(t) = \exp\left(\sum_{i>0} t_i \Lambda^i\right) g(0) \exp\left(-\sum_{i<0} t_i (\Lambda^t)^{-i}\right) \in GL(\infty).$$

よって, 戸田系のフローは $i > 0$ に対する t_i に関するフローとして KP 系のフローを含んでいることがわかる.

11 まだ書いてないこと

- 微分作用素や差分作用素での Lax 型式との関係
- τ 函数と双線形型式について
- Hamilton 構造について
- Lax 作用素 L_i が Lie algebra ではなく Lie group に値を持つ場合

12 主義

以上のような普遍的な構造を toroidal の場合に抽出するべきだと思う.