パンルヴェ系とソリトン系 Part 2

黒木 玄

2001 年 6 月 6 日[*]

目 次

次のメールを修正したもの

```
Date: Wed, 6 Jun 2001 06:25:25 +0900 (JST)
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200106052125.GAA08185@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: Painlev\'e and Soliton, Part 2
```

前回のは Painlevé 系や string equation と soliton 系を繋げる部分に関しては文献の紹介にとどめてしまいました. 今回はアイデアの説明をもう少し詳しくやります.

1 ソリトン系の基本設定

$\mathfrak{g}$ は Lie algebra であるとし, $\mathfrak{g}$ は subalgebras $\mathfrak{g}_\pm$ の線形直和になっているとし, それに関する $X \in \mathfrak{g}$ の分解を

$$X = X_+ - X_-, \quad X_+ \in \mathfrak{g}_+, \quad X_- \in \mathfrak{g}_-$$

[*] これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Painleve-Soliton-2.txt の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 20 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 6 月 6 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

と書くことにする．$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_\pm$ に対応する群を G, $G_\pm$ と書く．このとき, 単位元に十分近い元のみを考えると $g \in G$ は

$$g = g_-^{-1} g_+, \quad g_\pm \in G_\pm$$

と一意に分解される．相空間 (phase space) X を

$$X := G/G_+$$

と定め, G の単位元が代表する X の点を原点と呼び, o と書くことにする．原点 o に十分近い点 $x \in X$ は

$$x = g_-^{-1} o, \quad g_- \in G_-$$

と一意に表わされる．

$P_i \in \mathfrak{g}$ $(i \in I)$ は互いに可換であると仮定し, 時間変数 $t = (t_i)_{i \in I}$ に関する G 上のフローを

$$g(t) := \exp(\sum t_i P_i) g(0)$$

と定める．$g(t)$ は G の単位元に十分近いと仮定し,

$$g(t) = g_-(t)^{-1} g_+(t), \quad g_\pm(t) \in G_\pm$$

と一意的に分解されているとする．混乱がない場合は t を省略して g, $g_\pm$ と書くことがある．

以上の $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_\pm, P = (P_i)_{i \in I})$ の 4 つ組を **soliton system** と呼ぶことにする．

$L_i = B_i - B_i^c$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
L_i &= L_i(t) := g_-(t) P_i g_-(t)^{-1} \in \mathfrak{g}, \\
B_i &= B_i(t) := [L_i(t)]_+ \in \mathfrak{g}_+, \\
B_i^c &= B_i^c(t) := [L_i(t)]_- \in \mathfrak{g}_-.
\end{aligned}$$

このとき, $\partial_i = \partial/\partial t_i$ と置くと,

$$\begin{aligned}
\partial_i(g_+) &= B_i g_+, \\
\partial_i(g_-) &= B_i^c g_- = B_i g_- - g_- P_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= 0, \\
[\partial_i - B_i, L_j] &= 0, \\
[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] &= 0.
\end{aligned}$$

以上がソリトン系の基本設定である．

2 string equation の基本設定

次を満たしている $q \in \mathfrak{g}$ を新たに導入する:

$$[q, P_i] = F_i(P).$$

ここで, $F_i(P) \in \mathfrak{g}$ は P_i たちの函数で,

$$
\begin{aligned}
&[P_i, F_j(P)] = 0,\\
&g_- F_i(P) g_-^{-1} = F((g_- P_i g_-^{-1})_{i\in I}) = F((L_i)_{i\in I}) = F(L)
\end{aligned}
$$

を満たすものであるとする. ここで, $L = (L_i)_{i\in I}$ と置いた.

上の q を用いて, 時刻 t に依存する $Q = Q(t) \in \mathfrak{g}$ を次のように定義する:

$$
Q = Q(t) := \exp\left(\sum t_i P_i\right) q \exp\left(-\sum t_i P_i\right) = q - \sum t_i F_i(P).
$$

この Q は次の補題が成立するように定めた.

補題 2.1 Q は以下を満たしている:

$$
[Q, P_i] = F_i(P), \tag{2.1}
$$
$$
[\partial_i - P_i, Q] = 0. \tag{2.2}
$$

証明. (2.1) の証明. $F_j(P)$ は P_i と可換なので,

$$
[Q, P_i] = \left[q - \sum t_j F_j(P),\ P_i\right] = [q, P_i] = F_i(P).
$$

(2.2) の証明. q は t_i によらず, $F_j(P)$ は P_i と可換なので,

$$
[\partial_i - P_i, Q] = \left[\partial_i - P_i,\ q - \sum t_j F_j(P)\right] = -F_i(P) + [q, P_i] = 0. \quad \square
$$

上の補題の (2.2) は次の線形微分方程式の可積分条件である:

$$
\begin{aligned}
\partial_i(g(s,t)) &= P_i g(s,t),\\
\partial_s(g(s,t)) &= Q(t) g(s,t).
\end{aligned}
$$

ここで $\partial_s = \partial/\partial s$ と置いた. $\partial_i = \partial/\partial t_i$ と混乱しないように注意せよ. よって, 与えられた初期値 $g(0,0) \in G$ に対して, この線形微分方程式の解 $g = g(s,t) \in G$ が唯一存在する.

この $g(s,t)$ は次のように一意分解されているとする:

$$
g(s,t) = g_-(s,t)^{-1} g_+(s,t), \quad g_+(s,t) \in G_+, \quad g_-(s,t) \in G_-.
$$

混乱が生じなければ s, t を省略して $g = g_-^{-1} g_+$ と書くことにする.

前節の定義を拡張して, $L_i = L_i(s,t)$, $M = M(s,t) \in \mathfrak{g}$ を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
L_i &:= g_- P_i g_-^{-1},\\
M &:= g_- Q g_-^{-1}.
\end{aligned}
$$

さらに, $B_i := [L_i]_+$, $B_i^c = [L_i]_-$ と置く.

$g = g_-^{-1} g_+$ の両辺を t_i, s で微分することによって以下の結果を容易に証明できる:

$$\partial_i(g_+) = B_i g_-, \tag{2.3}$$
$$\partial_i(g_-) = B_i^c g_- = B_i g_- - g_- P_i, \tag{2.4}$$
$$\partial_s(g_+) = M_+ g_-, \tag{2.5}$$
$$\partial_s(g_-) = M_- g_- = M_+ g_- - g_- Q. \tag{2.6}$$

さらに, 以下も容易に証明される:

$$[L_i, L_j] = 0, \tag{2.7}$$
$$[\partial_i - B_i, L_j] = 0, \tag{2.8}$$
$$[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] = 0. \tag{2.9}$$

定理 2.2 M, M_+ は以下を満たしている:

$$[M, L_i] = F_i(L) \quad (\textbf{string equation}), \tag{2.10}$$
$$[\partial_i - B_i, M] = 0 \quad (\text{Lax equation}), \tag{2.11}$$
$$[\partial_i - B_i, \partial_s - M_+] = 0 \quad (\text{zero curvature equation}). \tag{2.12}$$

証明. Q, P_i, $F_i(P)$ を g_- と g_-^{-1} で挟むと, それぞれ M, L_i, $F_i(L)$ なるので, (2.1) の両辺を g_- と g_-^{-1} で挟むことによってこの定理の (2.10) が得られる. $L_i = g_- P_i g_-^{-1} = B_i - B_i^c$, $\partial_i(g_-) = B_i^c g_-$ より,

$$g_-(\partial_i - P_i) g_-^{-1} = \partial_i - g_- g_-^{-1} \partial_i(g_-) g_-^{-1} - L_i = \partial_i - B_i^c - L_i = \partial_i - B_i.$$

よって, (2.2) より,

$$0 = g_-[\partial_i - P_i, Q] g_-^{-1} = [g_-(\partial_i - P_i) g_-^{-1}, g_- Q g_-^{-1}] = [\partial_i - B_i, M].$$

これで (2.11) が示せた. (2.12) は (2.3), (2.5) の compatibility condition である. □

例 2.3 以下のような例が基本的である:

(2.13) $P_n = z^n$, $q = z\partial_z$ のとき, $[q, P_n] = nP_n$ なので, $[M, L_n] = nL_n$.

(2.14) $P_n = \partial_x^n$, $q = -x\partial_x$ のとき, $[q, P_n] = nP_n$ なので, $[M, L_n] = nL_n$.

(2.15) $P_n = z^n$, $q = \frac{1}{n} z^{-n+1} \partial_z$ のとき, $[q, P_n] = 1$ なので, $[M, L_n] = 1$.

(2.16) $P_n = \partial_x^n$, $q = -\frac{1}{n} x \partial_x^{-n+1}$ のとき, $[q, P_n] = 1$ なので, $[M, L_n] = 1$.

(2.17) $\mathfrak{g}$ が $\mathbb{Z}$-gradation の入った affine Lie algebra であり, degree を測る作用素を $q \in \mathfrak{g}_0$ と書くとき, $\deg P_n = d_n$ ならば $[q, P_n] = d_n P_n$ なので, $[M, L_n] = d_n L_n$. □

定理 2.4 波動函数 $\Psi = \Psi(s, t)$ を次のように定める:

$$\Psi = \Psi(s, t) = g_-(s, t) \exp\left(\sum t_i P_i\right).$$

このとき, 簡単な計算で以下が成立することがわかる:

$$L_i\Psi = \Psi P_i, \tag{2.18}$$
$$\partial_i(\Psi) = B_i\Psi, \tag{2.19}$$
$$M\Psi = \Psi q, \tag{2.20}$$
$$\partial_s(\Psi) = M_-\Psi. \tag{2.21}$$

特に $M \in \mathfrak{g}_+$ ならば Ψ は s によらない.

証明. 以下のように計算すれば良い:

$$\begin{aligned}
L_i\Psi &= g_-P_ig_-^{-1}g_-\exp(\sum t_iP_i) = g_-P_i\exp(\sum t_i - P_i) \\
&= g_-\exp(\sum t_i - P_i)P_i = \Psi P_i, \\
\partial_i(\Psi) &= \partial_i(g_-)\exp\left(\sum t_iP_i\right) + g_-P_i\exp\left(\sum t_iP_i\right) \\
&= (B_ig_- - g_-P_i)\exp\left(\sum t_iP_i\right) + g_-P_i\exp\left(\sum t_iP_i\right) \\
&= B_ig_-\exp(\sum t_iP_i) = B_i\Psi.
\end{aligned}$$

$Q = \exp(\sum t_iP_i)q\exp(-\sum t_iP_i)$ より,

$$\exp\left(-\sum t_iP_i\right)\ Q\ \exp\left(\sum t_iP_i\right) = q$$

であるから,

$$\begin{aligned}
&M\Psi = g_-Qg_-^{-1}g_-\exp(\sum t_iP_i) = g_-Q\exp(\sum t_iP_i) = g_-\exp(\sum t_iP_i)q = \Psi q, \\
&\partial_s(\Psi) = \partial_s(g_-)\exp(\sum t_iP_i) = M_-g_-\exp(\sum t_iP_i) = M_-\Psi. \quad \square
\end{aligned}$$

3 reduction の一般論

前節の記号をそのまま用いる. 前節の $\gamma(s,t)$ を用いて, phase space $X = G/G_+$ 上の初期条件 $x(0,0) = g_-(0,0)o \in X$ のフローの解を

$$x(s,t) = \gamma_-(s,t)x(0,0) \in X$$

と定める.

この節の意味での reduction とはこのフローを幾つかの時間変数で不変な部分空間に制限することである. P_n に関する reduction がいわゆる n-reduction の一般化になっており, Q に関する reduction が soliton 系から isomonodromic deformation を出す self-similarity condition や string equation の話の一般化になっている.

不変な部分空間を特徴付けるためにはほとんど tautology の次の補題が使える.

補題 3.1 任意の $A \in \mathfrak{g}$ と (単位元に十分近い) 任意の $g_-(0) \in G_-$ に対して, A の左無限小作用が生成するフローの $x(0) = g_-(0)^{-1}o$ を通る軌道を

$$x(s) = g_-(s)^{-1}o, \quad g_-(s) \in G_-$$

と書くことにする. このとき, 以下の条件は互いに同値である:

(1) $x(0)$ は A の左無限小作用で不変である (i.e. $\partial_s(g_-(s))|_{s=0} = 0$).
(2) $g_-(0)Ag_-^{-1}(0) \in \mathfrak{g}_+$.
(3) $x(s) = x(0)$ (i.e. $g_-(s) = g_-(0)$).
(4) $g_-(s)Ag_-^{-1}(s) \in \mathfrak{g}_+$.

証明. (3) から (1) が出るのは明らか. (4) で $s = 0$ と置けば (2) が出る.
$x(s)$ は (単位元に十分近い) 任意の $g_+(0) \in G$ を与えて,

$$\begin{aligned} g(s) &= \exp(sA)g_-^{-1}(0)g_+(0), \\ g(s) &= g_-(s)^{-1}g_+(s), \quad g_\pm(s) \in G_+, \\ x(s) &= g_-(s)^{-1}o \end{aligned}$$

によって構成される. そして, $g_-(s)$ は次の方程式を満たしている:

$$\partial_s(g_-) = [g_-Ag_-^{-1}]_-g_-.$$

よって, (1) は $[g_-(0)Ag_-^{-1}(0)]_-g_-(0) = 0$ と同値であり, この式は (2) と同値である. これで (1) と (2) が同値であることがわかった.
(2) は次と同値である:

$$g_-(0)\exp(sA)g_-(0)^{-1} \in G_+. \tag{2'}$$

これは,

$$g(s) = g_-(0)^{-1}\bigl(g_-(0)\exp(sA)g_-(0)^{-1}g_+(s)\bigr)$$

より, $g_-(s) = g_-(0)$ すなわち (3) と同値である.
これで (2) と (3) の同値性がわかったが, (2) と (3) を合わせると (4) が出る. 以上によって全ての同値性が示された. □

補題 3.2 $g(s,t) \in G$ は次の方程式を満たしていると仮定する:

$$\begin{aligned} \partial_s(g(s,t)) &= A(t)g(s,t), \\ \partial_t(g(s,t)) &= Bg(s,t). \end{aligned}$$

ここで, A は t によっている可能性があるが, B は s にも t にもよってないと仮定する. $g(s,t)$ は次のように分解されていると仮定する:

$$g(s,t) = g_-(s,t)^{-1}g_+(s,t).$$

さらに,

$$\begin{aligned} X(s,t) &:= g_-(s,t)A(t)g_-(s,t)^{-1}, \\ Y(s,t) &:= g_-(s,t)Bg_-(s,t)^{-1} \end{aligned}$$

と置く. このとき, 以下が成立する:

(1) $X(0,0) \in \mathfrak{g}_+$ ならば $X(s,t) \in \mathfrak{g}_+$.

(2) $X(0,0), Y(0,0) \in \mathfrak{g}_+$ ならば $X(s,t), Y(s,t) = Y(0,t) \in \mathfrak{g}_+$.

証明. $g_- = g_-(s,t)$ が

$$\partial_t(g_-) = X_- g_-, \quad \partial_s(g_-) = Y_- g_-$$

を満たしていることから, X を s で微分し, Y を t で微分し,

$$X_- = X_+ - X, \quad Y_- = Y_+ - Y$$

であることに注意すれば, X と Y が以下の方程式を満たしていることがわかる:

$$\partial_s(X) = [X_+, X], \tag{3.1}$$

$$\partial_t(Y) = [Y_+, Y]. \tag{3.2}$$

Y を s で微分することによって次の方程式が得られる:

$$\partial_s(Y) = [X_-, Y]. \tag{3.3}$$

$g = g(s,t)$ の満たしている方程式の compatibility condition

$$[\partial_t - B, A(t)] = 0$$

の両辺を $g_-(s,t)$, $g_(s,t)^{-1}$ で挟むことによって, $[\partial_t - Y_+, X] = 0$. すなわち,

$$\partial_t(X) = [Y_+, X] \tag{3.4}$$

が成立することもわかる.

まず, (3.1), (3.4) から, $X(0,0) \in \mathfrak{g}_+$ ならば $X(s,t) \in \mathfrak{g}_+$ であるおとがわかる. そのとき, $X_-(s,t) = 0$ であるから, (3.2), (3.3) より, さらに $Y(0,0) \in \mathfrak{g}_+$ も成立していれば $Y(s,t) = Y(0,t) \in \mathfrak{g}_+$ となる. □

以上の 2 つの補題より次の定理がただちに得られる.

定理 3.3 以下が成立する:

(1) $L_n(0,0) \in \mathfrak{g}_+ \iff x(0,0) = g_-(0,0)^{-1}$ は P_n の左無限小作用で不変.
(2) $M(0,0) \in \mathfrak{g}_+ \iff x(0,0) = g_-(0,0)^{-1}$ は $Q(0) = q$ の左無限小作用で不変.
(3) $L_n(0,0) \in \mathfrak{g}_+ \implies L_n(0,t) \in \mathfrak{g}_+$.
(4) $L_n(0,0), M(0,0) \in \mathfrak{g}_+ \implies L_n(s,t) = L(0,t), M(s,t) \in \mathfrak{g}_+$.

証明. (1), (2) は補題 3.1 からすぐに出る.

補題 3.2 (1) を $A = P_n$, $B = P_i$ の場合に適用することによって, $L_n(0,0) \in \mathfrak{g}_+$ ならば $L_n(0,t) \in \mathfrak{g}_+$ であることがわかる.

補題 3.2 (1) を $A = Q$, $B = P_i$ の場合に適用することによって, $L_n(0,t), M(0,0) \in \mathfrak{g}_+$ ならば $M(s,t) \in \mathfrak{g}_+$ であることがわかる.

補題 3.2 (2) を $A = Q$, $B = P_i$ の場合に適用することによって, $L_n(0,t), M(0,0) \in \mathfrak{g}_+$ ならば $L_n(s,t) \in \mathfrak{g}_+$ であることがわかる. □

4 KP 系の reduction

次の場合を考える:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathbb{C}[[x]]((\partial_x^{-1})),\\
&\mathfrak{g}_+ = \mathbb{C}[[x]][\partial_x],\\
&\mathfrak{g}_- = \mathbb{C}[[x]][[\partial_x^{-1}]]\partial_x^{-1},\\
&P_i = \partial_x^i \quad (i \in I = \{1, 2, 3, \ldots, r\}),\\
&q = -x\partial_x.
\end{aligned}$$

このとき, $[q, P_i] = iP_i$ が成立するので,

$$Q = Q(t) = q - \sum_{i=1}^{r} it_i P_i \in \mathfrak{g}.$$

r を有限で止めておかないと $Q \in \mathfrak{g}$ とならないことに注意せよ.

L_i と M はそれぞれ次の形になり, $[M, L_i] = iL_i$ を満たしている:

$$\begin{aligned}
L_i &= g_- P_i g_-^{-1} = g_- \partial_x^i g_-^{-1} = (L_1)^i,\\
M &= g_- Q g_-^{-1} = g_- q g_-^{-1} - \sum it_i (L_1)^i.
\end{aligned}$$

擬微分作用素 $X \in \mathfrak{g}$ が $X \in \mathfrak{g}_+$ であることは X が微分作用素になることを意味している.

$n \in I$ を任意に固定する. $L_n(0,0)$ が微分作用素であれば $L_n(0,t)$ もそうである. そのとき, $L_{kn} = (L_n)^k$ なので $L_{kn}(0,t)$ も微分作用素になる. そして, $L_i(0,t)$ は t_{kn} によらない.

$L(0,0)$ と $M(0,0)$ が微分作用素ならば $L_{kn}(s,t)$, $M(s,t)$ も微分作用素になり, $L_{kn}(s,t) = L_{kn}(0,t)$ が成立する.

$L_n(0,0)$ が微分作用素になるという条件は所謂 n-reduction の条件である.

$G_- = 1 + \mathfrak{g}_-$ および $g_- q g_-^{-1} = q - [g_- q g_-^{-1}]_-$ より, M_+, M_- は次の形をしている:

$$\begin{aligned}
M_+ &= q - \sum it_i B_i,\\
M_- &= [g_- q g_-^{-1}]_- + \sum it_i B_i^c.
\end{aligned}$$

よって, M が微分作用素であるという条件は

$$M = -x\partial_x - \sum it_i B_i$$

または

$$[g_- q g_-^{-1}]_- = -\sum it_i B_i^c$$

が成立するという条件と同値である.

5 modified Drinfeld-Sokolov hierarchy の similarity reduction

次の場合を考える:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}((z^{-1}))) \oplus \mathbb{C}d \quad (\text{centerless affine } \mathfrak{sl}(n),\ d = z\partial_z),\\
&\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}d \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}[z]),\\
&\mathfrak{g}_- = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{sl}(n, z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]),\\
&\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ z & & & & 0 \end{bmatrix},\\
&P_i = \Lambda^i \quad (i \in I = \{\, i \mid i = 1, 2, \dots, r \text{ でかつ } i \text{ は } n \text{ で割り切れない} \}),\\
&q := nd + \rho^\vee \quad \Bigl(\rho^\vee = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha^\vee\Bigr).
\end{aligned}
$$

このとき, $q =$ (affine $\mathfrak{sl}(n)$ の principal gradation を与える Cartan の元) である. $[q, P_i] = iP_i$ なので

$$
Q = Q(t) = q - \sum_{i\in I} it_i P_i \in \mathfrak{g}.
$$

i の上限 r を有限で止めておかないと $Q \in \mathfrak{g}$ とならないことに注意せよ.

$G_- = 1 + \mathfrak{g}_-$ および $g_- q g_-^{-1} = q - [g_- q g_-^{-1}]_-$ より,

$$
\begin{aligned}
M_+ &= q - \sum it_i B_i,\\
M_- &= [g_- q g_-^{-1}]_- + \sum it_i B_i^c.
\end{aligned}
$$

よって, $M \in \mathfrak{g}_+$ が成立するための必要十分条件は

$$
M = nd + \rho^\vee - \sum it_i B_i
$$

または

$$
[g_- q g_-^{-1}]_- = -\sum it_i B_i^c
$$

が成立することである.

つづく.