東北大学オープンキャンパス2006 数学クイズ問題

黒木玄　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)

2006年7月28日(木)〜29日(金)

a, b は整数であり, n は 0 でない整数であるとする. $a-b$ が n で割り切れるとき,

$$a \equiv b \pmod{n}$$

と書き, a と b は n を法として合同であると言うことにする. たとえば $1 \equiv 4 \pmod{3}$, $2 \equiv -3 \pmod{5}$ である. $a \equiv b \pmod{n}$ は a と b を n で割った余りが互いに等しいことだと考えてもよい.

問題 1 以上の準備のもとで以下の問題に挑戦せよ.

1. $n = 7, 11, 13$ のとき $175342 \equiv -175 + 342 \pmod{n}$ が成立することを両辺を $n = 7, 11, 13$ で割った余りを実際に計算することによって確認せよ.

2. 一般に, 6桁の数 a の上位3桁と下位3桁のれぞれを b, c と書く ($a = 1000b + c$). このとき a と $-b+c$ を $n = 7, 11, 13$ で割った余りが互いに等しくなることを証明せよ. □

ヒント. 一般に $a \equiv a' \pmod{n}$ かつ $b \equiv b' \pmod{n}$ のとき $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$ と $ab \equiv a'b' \pmod{n}$ が成立する. 実際 $a - a' = kn$, $b - b' = ln$ のとき, $a + b - (a' + b') = a - a' + b - b' = kn + ln = (k + l)n$ であり, $ab - a'b' = (a' + kn)(b' + ln) - a'b' = a'ln + kb'n + kln^2 = (a'l + kb' + kln)n$ である. したがって $a \equiv b \pmod{n}$ をあたかも通常の等号のごとく扱って構わない. □

問題 2 10^{222} を 23 で割った余りを求めよ. □

問題 3 $9, 99, 999, 9999$ のように 9 だけが並んでいる数を素因数分解してみよう:

$$9 = 3^2, \quad 99 = 3^2 \cdot 11, \quad 999 = 3^3 \cdot 37, \quad 9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101,$$
$$99999 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271, \quad 999999 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37, \quad \ldots\ldots$$

これで 9 だけが並んだ数の素因数として少なくとも $3, 7, 11, 13, 37, 41, 101, 271$ が現われることがわかった. (9 だけが並んだ数は $2, 5$ で割り切れないので $2, 5$ が現われないのは当然である.) 13 の次の素数 17 やその次の素数 19 で割り切れる 9 だけが並んでいる数は存在するだろうか? さらにそれ以降の素数についてはどうなっているのだろうか?

1. 17 で割り切れる 9 だけが並んでいる数をひとつ見付けよ.

2. 19 で割り切れる 9 だけが並んでいる数をひとつ見付けよ.

3. 2 と 5 以外の任意の素数 p に対して, p で割り切れる 9 だけが並んでいる数が存在することを証明せよ. □