非線形 Schrödinger 方程式

2 成分 KP 階層の $(1,1)$-reduction からの導出

黒木 玄

最新更新: 2003 年 7 月 3 日　(作成: 2003 年 7 月 1 日)

目 次

1　2 成分 KP 階層とその $(1,1)$-reduction の定義

2 成分 KP では時間変数は t_{1i}, t_{2i} $(i = 1,2,3,\dots)$ になる．以下, R は t_{1i}, t_{2i} $(i = 1,2,3,\dots)$ の函数のなす可換環であるとする．(より正確に言えば, R は $\mathbb{C}$ 上の可換環であり, R には可算個の互いに可換な $\mathbb{C}$-derivations $\partial/\partial t_{ai}$ $(a = 1,2;\ i = 1,2,3,\dots)$ が作用していると仮定する.)

非線形 Schrödinger 階層 (NLSH) の時間変数 t_i と補完的な独立変数 x_i が次のように定義される:

$$t_{1i} = x_i + t_i, \qquad t_{2i} = x_i - t_i.$$

すなわち

$$x_i = (t_{1i} + t_{2i})/2, \qquad t_i = (t_{1i} - t_{2i})/2.$$

このとき

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t_{1i}} + \frac{\partial}{\partial t_{2i}}, \qquad \frac{\partial}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_{1i}} - \frac{\partial}{\partial t_{2i}}.$$

$x = x_1$ と置き, x に関する R 係数および $M_2(R)$ 係数の擬常微分作用素環

$$\mathcal{E} := R((\partial^{-1})), \qquad M_2(\mathcal{E}) = M_2(R)((\partial^{-1}))$$

を考える．ここで

$$\partial := \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t_{11}} + \frac{\partial}{\partial t_{21}}.$$

擬微分作用素 $W \in M_2(\mathcal{E})$ を次のように定義する:

$$W = E + A_1\partial^{-1} + A_2\partial^{-2} + \cdots .$$

ここで, E は単位行列であり,

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}, \qquad a_i, b_i, c_i, d_i \in R.$$

2 成分 KP 階層とは W に関する以下の方程式系のことである:

$$\frac{\partial W}{\partial t_{ai}} = B_{ai}^c W = B_{ai}W - WP_{ai} \qquad (a = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots).$$

ここで

$$P_{ai} = E_{aa}\partial^i, \quad B_{ai} = [WP_{ai}W^{-1}]_+, \quad B_{ai}^c = [WP_{ai}W^{-1}]_-.$$

E_{ab} は 2×2 の行列単位であり, $[\ ]_+$ は微分作用素部分を得る操作であり, $[\ ]_-$ は ∂^{-1} に関する負巾部分の -1 倍を得る操作である.

2 成分 KP 階層を独立変数 x_i, t_i で表示すると次のようになる:

$$\frac{\partial W}{\partial t_i} = B_i^c W = B_i W - WP_i \qquad (i = 1, 2, 3, ...),$$
$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = C_i^c W = C_i W - WQ_i \qquad (i = 1, 2, 3, ...).$$

ここで

$$P_i = \sigma_3\partial^i, \qquad B_i = [WP_iW^{-1}]_+, \quad B_i^c = [WP_iW^{-1}]_-,$$
$$Q_i = \partial^i = E\partial^i, \quad C_i = [WQ_iW^{-1}]_+, \quad C_i^c = [WQ_iW^{-1}]_-.$$

σ_3 は Pauli 行列である: $\sigma_3 = E_{11} - E_{22}$.

NLSH を得るために, 2 成分 KP 階層に次の制限を与える:

$$C_1^c = [W\partial W^{-1}]_- = 0.$$

この条件を $(1,1)$-reduction の条件と呼ぶ. $C_1 = \partial$ なのでこの条件は

$$W\partial W^{-1} = \partial$$

と同値である. これは $\partial = \partial/\partial x$ と W が可換であることを意味するので,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

と同値である. この条件は W の係数行列 A_i に関する条件

$$\frac{\partial A_i}{\partial x} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

と同値である. すなわち, 上の reduction の条件 $C_1^c = 0$ は W の係数が x に関して定数であることと同値になる. このときさらに, W と ∂ の可換性より,

$$W\partial^i W^{-1} = \partial^i, \quad \text{i.e. } C_i^c = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

も導かれる．これは２成分 KP 階層のもとで

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

と同値である．

以上によって, 2 成分 KP 階層に $C_1^c = 0$ という制限を課すことは, W が x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ に寄らないという制限を課すことに同値であることがわかった．この制限を課した 2 成分 KP 階層を**非線形 Schrödinger 階層 (NLSH)** と呼ぶ.

2 非線形 Schrödinger 方程式 (NLSE) の導出

以下では 2 成分 KP 階層の $(1,1)$-reduction の解から, 非線形 Schrödinger 方程式 (NLSE) の解が得られることを説明する．

これ以後登場する函数はすべて x に関して定数であり, ∂ と可換である．よって, ∂ をただの文字 λ とみなして良い．W を次のように書く:

$$W = E + A_1\lambda^{-1} + A_2\lambda^{-2} + \cdots$$

このとき,

$$B_i = [W\sigma_3\lambda^i W^{-1}]_+ = [\lambda^i W\sigma_3 W^{-1}]_+, \qquad B_i^c = [W\sigma_3\lambda^i W^{-1}]_- = [\lambda^i W\sigma_3 W^{-1}]_-$$

の $[\ ]_+$ と $[\ ]_-$ は λ に関する巾を見て定義されることになる．これらを計算するためには $W\sigma_3 W^{-1}$ を計算しておけば良い．W^{-1} をまず計算すると,

$$\begin{aligned} W^{-1} &= E - (A_1\lambda^{-1} + A_2\lambda^{-2} + \cdots) + (A_1\lambda^{-1} + A_2\lambda^{-2} + \cdots)^2 - \cdots \\ &= E - (A_1\lambda^{-1} + A_2\lambda^{-2} + \cdots) + (A_1^2\lambda^{-2} + \cdots) - \cdots \\ &= E - A_1\lambda^{-1} + (-A_2 + A_1^2)\lambda^{-2} + \cdots . \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} W\sigma_3 W^{-1} &= (E + A_1\lambda^{-1} + A_2\lambda^{-2} + \cdots)(\sigma_3 - \sigma_3 A_1\lambda^{-1} + (-\sigma_3 A_2 + \sigma_3 A_1^2)\lambda^{-2} + \cdots) \\ &= \sigma_3 + \lambda^{-1}(-\sigma_3 A_1 + A_1\sigma_3) + \lambda^{-2}(-\sigma_3 A_2 + \sigma_3 A_1^2 - A_1\sigma_3 A_1 + A_2\sigma_3) + \cdots \\ &= \sigma_3 - [\sigma, A_1]\lambda^{-1} + (-[\sigma_3, A_2] + [\sigma_3, A_1]A_1)\lambda^{-2} + \cdots . \end{aligned}$$

記号を簡単にするために,

$$\begin{aligned} L &:= [\sigma_3, A_1] = \begin{bmatrix} 0 & 2b_1 \\ -2c_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ M &:= [\sigma_3, A_2] - [\sigma_3, A_1]A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2b_2 \\ -2c_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2b_1c_1 & 2b_1d_1 \\ -2c_1a_1 & -2b_1c_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と置く．このとき,

$$W\sigma_3 W^{-1} = \sigma_3 - L\lambda^{-1} - M\lambda^{-2} + \cdots .$$

これを使うと,

$$B_1 = \sigma_3\lambda - L = \begin{bmatrix} \lambda & -2b_1 \\ 2c_1 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad B_1^c = M\lambda^{-1} + O(z^{-2}), \quad B_2 = \sigma_3\lambda^2 - L\lambda - M.$$

さらに記号の簡単化のため次のように置く:

$$(y, s) := (t_1, t_2).$$

後で y は NLSE の空間変数, s は NLSE の時間変数と解釈される.

2.1 $W_y = \partial W/\partial t_1 = B_1^c W$ から導かれる M の表示

$W_y = \partial W/\partial t_1 = B_1^c W$ の λ^{-1} の係数を見ると,

$$A_{1,y} = M = \begin{bmatrix} 0 & 2b_2 \\ -2c_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2b_1c_1 & 2b_1d_1 \\ -2c_1a_1 & -2b_1c_1 \end{bmatrix}.$$

この式を用いれば B_2 を A_1 だけで表示できる. そこで以下では A_1 の成分の添字を落として単に

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad A_{1,y} = \begin{bmatrix} a_y & b_y \\ c_y & d_y \end{bmatrix}.$$

と書くことにする. $A_{1,y} = M$ の両辺の対角成分を比べると

$$a_y = -2bc, \qquad d_y = 2bc. \tag{0}$$

が成立していることがわかる.

2.2 $[\partial/\partial t_1 - B_1, \partial/\partial t_2 - B_2] = 0$ の計算

$(y, s) = (t_1, t_2)$ より, $[\partial/\partial t_1 - B_1, \partial/\partial t_2 - B_2] = 0$ は次と同値である:

$$B_{1,s} = B_{2,y} - [B_1, B_2]. \tag{$*$}$$

この $(*)$ の各項は以下のように計算される:

$$\begin{aligned}
B_{1,s} &= L_s = \begin{bmatrix} 0 & -2b_s \\ 2c_s & 0 \end{bmatrix}, \\
B_{2,y} &= L_y\lambda - M_y = \lambda \begin{bmatrix} 0 & -2b_y \\ 2c_y & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{yy} & b_{yy} \\ c_{yy} & d_{yy} \end{bmatrix}, \\
-[B_1, B_2] &= -[\sigma_3\lambda - L, \sigma_3\lambda^2 - L\lambda - M] = -[\sigma_3\lambda - L, -M] \\
&= \lambda \begin{bmatrix} 0 & 2b_y \\ -2c_y & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2(bc)_y & -2b(a_y - d_y) \\ -2c(a_y - d_y) & -2(bc)_y \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

よって, $(*)$ は次と同値である:

$$
\begin{aligned}
0 &= -a_{yy} - 2(bc)_y, && (1)\\
-2b_s &= -b_{yy} + 2b(a_y - d_y), && (2)\\
2c_s &= -c_{yy} + 2c(a_y - d_y), && (3)\\
0 &= -d_{yy} + 2(bc)_y. && (4)
\end{aligned}
$$

2.3 NLSE の導出

上の (1), (4) は $A_{1,y} = M$ の両辺の対角成分の比較から導かれる式 (0) によっていつでも成立している. (0) を (2), (3) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
-2b_s &= -b_{yy} - 8b^2c, && \text{(a)}\\
2c_s &= -c_{yy} - 8bc^2. && \text{(b)}
\end{aligned}
$$

$\epsilon = \pm 1$, $b = q$, $c = \epsilon q^*$ (複素共役の ± 1 倍), $s = it$ のとき, (a) は

$$2iq_t = -q_{yy} - 8\epsilon |q|^2 q \tag{a'}$$

となる. 同様に (b) は

$$-2i\epsilon q_t^* = -\epsilon q_{yy}^* - 8|q|^2 q^*.$$

となり, これは

$$-2iq_t^* = -q_{yy}^* - 8\epsilon |q|^2 q^*. \tag{b'}$$

と同値である. つまり (b) は (a') の両辺の複素共役を取った式に変形される.

非線形 Schrödinger 方程式とは次の形の方程式のことである:

$$iu_t = -u_{yy} \pm |u|^2 u. \tag{NLSE}$$

これと上の (a') は適切なスケール変換のもとで一致している.