共形場理論における頂点作用素について

黒木玄

目次

§0. Introduction

§§0.0. はじめに

共形場理論(conformal field theory, 略してCFT)はMoscowの理論物理学者たちによる有名な論文[BPZ](1984年)に端を発し，その基本的なアイデアはoperator product expansion(略してOPE)とWard-Takahashi identity(略してWT identity)によって2次元統計場の臨界点における臨界指数やN点函数を特徴付けようということであった．この理論は当時大流行の兆しを見せていたstring theoryにただちに応用されstring theoryの基礎理論の地位を確立し，他方では2次元可解格子模型などの具体的な統計系との関係も次第につけられていった．また，数学的にも共形場理論は多くの分野(例えば，無限次元Lie環，KP方程式系(ソリトン)，Riemann面の変形とmoduli，braid群とHecke環の表現，etc)と深く関係し幅広い発展を見せている．したがって，共形場理論が最近の数学と理論物理学の接近に果たした役割は非常に大きいと言えよう．

共形場理論を数学の言葉に直すとどのようになるかを概説しよう．簡単のために[KZ]の理論を複素射影直線$\mathbb{P}^1$上の理論として説明しよう．$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\hat{c}$ をaffine Lie algebraとし，$\mathfrak{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]\frac{d}{dt} + \mathbb{C}\hat{c}$ をVirasoro algebraとし，これらの半直積を$\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{L}$と表わす．$\mathcal{H}_\lambda$は$\hat{\mathfrak{g}}$の

highest weight irreducible representation であるとし，$\mathcal{H}^{\dagger}_{\lambda}$ をそのdual (right module とみなす) とする．$\mathcal{H}_{\lambda}$, $\mathcal{H}^{\dagger}_{\lambda}$ には Segal-Sugawara construction により $\hat{\mathfrak{g}}\oplus\mathcal{L}$ が自然に作用する．$X(m):=X\otimes t^{m}\in\hat{\mathfrak{g}}$ $(X\in\mathfrak{g})$, $L_m:=-t^{m+1}\dfrac{d}{dt}$ とおき，$X(\zeta):=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\zeta^{-m-1}X(m)$ $(X\in\mathfrak{g})$, $T(\zeta):=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\zeta^{-m-2}L_m$ と定める．$X(\zeta)$ は current operator と呼ばれ，$T(\zeta)$ は energy momentum tensor と呼ばれる．定数 $\ell\in\mathbb{C}$ を固定し，$\mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0\leq a\leq N)$, $\mathcal{H}^{\dagger}_{\lambda_\infty}$ には $\hat{\ell}$ は $\ell\cdot\mathrm{id}$ として作用しているとする．$M:=\{z=(z_0,\cdots,z_N)\in\mathbb{C}^{N+1}\mid z_0,\cdots,z_N$ は互いに異なる$\}$ とおき，$\infty\in\mathbb{P}^1$ を無限遠点とする．以上の準備のもとで，共形場理論の主役をなす対象である conformal block を定義しよう．直観的には，conformal block とは点 z_a $(0\leq a\leq N)$, ∞ のそれぞれに“差し込まれた”表現 $\mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0\leq a\leq N)$, $\mathcal{H}^{\dagger}_{\lambda_\infty}$ を $X(\zeta)$ $(X\in\mathfrak{g})$, $T(\zeta)$ によって結び合わせたものである．すなわち，$\Phi(z)$ が $v_a\in\mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0\leq a\leq N)$, $v_\infty\in\mathcal{H}^{\dagger}_{\lambda_\infty}$ に対して M 上の多価正則函数

$$\Phi\begin{pmatrix} v_\infty ; & v_N \cdots v_0 \\ \infty\ ; & z_N \cdots z_0\end{pmatrix}=\langle\phi_{v_\infty}(\infty)\,\phi_{v_N}(z_N)\cdots\phi_{v_0}(z_0)\rangle=\langle v_\infty|\,\Phi(z)\,|v_N\rangle\cdots|v_0\rangle$$

を定め[1], 以下が成立するとき $\Phi(z)$ を type $\vec{\lambda}=(\lambda_\infty;\lambda_N\cdots\lambda_0)$ の conformal block と呼ぶ：

(CB1) $A(\zeta)$ は $X(\zeta)$ $(X\in\mathfrak{g})$ または $T(\zeta)$ であるとし，$z\in M$ を固定すると ζ の函数として以下が成立する[2]：

$$\Phi\begin{pmatrix} v_\infty A(\zeta) ; & v_N \cdots v_0 \\ \infty\ ; & z_N \cdots z_0\end{pmatrix}=\Phi\begin{pmatrix} v_\infty ; & A(\zeta-z_N)v_N & v_{N-1}\cdots v_0 \\ \infty\ ; & z_N & z_{N-1}\cdots z_0\end{pmatrix}=\cdots$$

$$\cdots=\Phi\begin{pmatrix} v_\infty ; & v_N \cdots & A(\zeta-z_a)v_a & \cdots v_0 \\ \infty\ ; & z_N \cdots & z_a & \cdots z_0\end{pmatrix}=\cdots=\Phi\begin{pmatrix} v_\infty ; & v_N \cdots v_1 & A(\zeta-z_0)v_0 \\ \infty\ ; & z_N \cdots z_1 & z_0\end{pmatrix}.$$

$$(CB2)\quad \Phi\begin{pmatrix} v_\infty ; & v_N \cdots v_{a+1} & L_{-1}v_a & v_{a-1}\cdots v_0 \\ \infty ; & z_N \cdots z_{a+1} & z_a & z_{a-1}\cdots z_0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial z_a}\Phi\begin{pmatrix} v_\infty ; & v_N \cdots v_0 \\ \infty ; & z_N \cdots z_0 \end{pmatrix} \quad (0\le a\le N)$$

条件(CB1), (CB2)はそれぞれOPE, WT identityの数学的な解釈である。[3] 特に, $N=1$でtypeが$(\lambda_\infty;\lambda_1\lambda_0)$のconformal blockをchiral vertex operator(カイラル頂点作用素)と呼ぶ。[4] 共形場理論の最も基本的な構成要素はchiral vertex operatorsであると言うことができる. なぜなら, chiral vertex operatorsを任意の図式(diagram)にしたがって適切に合成すると, Mのある開部分集合上で収束し, M上に解析接続されてconformal blockを定めるからである. これの証明には, conformal blockの定義から導かれるKnizhnik-Zamolodchikov equation (略してKZ equation)が用いられる. 以下, $\mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0\le a\le N)$, $\mathcal{H}^+_{\lambda_\infty}$は$\hat{\mathfrak{g}}$のintegrable representationsであるとする. 次の結果が最も重要である: type λのすべてのconformal blocksはintegrable representationsに対するchiral vertex operatorsを(任意に固定された図式にしたがって)合成することによって得られる. これが本文における主結果である. この性質はconformal blockのfactorization propertyと呼ばれている。[5]

Appendix Bにおいては, Virasoro algebraに対するchiral vertex operatorについて調べてある. 一般のconformal blockについて調べることはできなかったが, chiral vertex operatorの段階でも, 共形場理論とVirasoro algebraは表現論的に深く結びついていることがわかる. Appendix Cにおいては, $\mathfrak{g}$がabelianな場合の理論(この場合chiral vertex operatorはかなり具体的な表式を持つ)と$\mathfrak{g}$がnon-abelian simple (特に$\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$)のときの理論が$\hat{\mathfrak{g}}$の

Fock表現（[FFr1〜4]）を通して結びつき，それによって $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ に対するKZ equationの解になるような積分表示式が得られることを説明する．これらのAppendix B, Cの内容は，これからの発展が大いに期待されるところである．

注. (1) 本文では z_0 を0に固定し $\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|v_0\rangle$ という表記法を用いている．これは，string theoryにおいてconformal blockは $v_0,\cdots,v_N$ という状態のstringが入ってきて v_∞ という状態のstringが出ていく散乱振幅のholomorphic partを表わすことに由来している．しかし，物理学者はあまりこの表記法を用いていない．物理学者は，$\langle\phi_{v_\infty}(\infty)\phi_{v_N}(z_N)\cdots\phi_{v_0}(z_0)\rangle$ に似た表記法をよく用いる．

(2) 物理学者は (CB1) によって定まる函数をよく $\langle A(\zeta)\phi_{v_\infty}(\infty)\cdots\phi_{v_0}(z_0)\rangle$ と書く．

(3) Riemann面の上に定義を拡張するためには，各点のまわりに座標系をとって $X(\zeta)d\zeta\ (X\in\mathfrak{g})$ が1-formの変換性を示すことを仮定し，Ward identityの定式化にはKodaira-Spencer theoryを使わなければならない（例えば[TUY]）．

(4) 頂点作用素の頂点（vertex）という言葉の由来は，場の量子論におけるFeynman diagramにおいて相互作用を表わす部分はそのdiagramの中の頂点であり，string theoryにおいて頂点作用素はstringの基本的な相互作用と考えられていることである．また，物理的な理論ではholomorphic partとanti-holomorphic partを組み合わせて考える必要があるが，カイラルという言葉はholomorphic partのみを扱うことを意味する．

(5) 今ではこの結果はRiemann面上の理論に拡張されている（[TUY]）．

以下，定義も詳しく説明し，内容を概説しよう．

§0.1. Affine Lie algebra とその highest weight representation

以下、基礎体は複素数体$\mathbb{C}$とする．$\mathfrak{g}$は non-abelian simple Lie algebra とし、$\mathfrak{h}$はその Cartan subalgebra とし，$\mathfrak{g}$の三角分解を$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$と表わす．$\theta$は$\mathfrak{g}$の highest root とし、$\Delta_+$は$\mathfrak{g}$の positive roots 全体とし，$\rho:=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$ とおく．$(\,|\,)$は$\mathfrak{g}$の Killing form で$(\theta|\theta)=2$と正規化されたものとする．

$\hat{\mathfrak{g}}:=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}\hat{\ell}$，$X(m):=X\otimes t^m$ $(X\in\mathfrak{g},\ m\in\mathbb{Z})$，$\mathcal{L}:=\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{d}{dt}\oplus\mathbb{C}\hat{c}$，$L_m:=-t^{m+1}\frac{d}{dt}$ とおき，$\hat{\mathfrak{g}}$，$\mathcal{L}$，$\hat{\mathfrak{g}}\oplus\mathcal{L}$に Lie algebra の構造を次のように入れる：

$$[X(m),Y(n)]=[X,Y](m+n)+(X|Y)m\delta_{m+n,0}\hat{\ell}\quad(X,Y\in\mathfrak{g},\ m,n\in\mathbb{Z}),$$
$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}\hat{c}\quad(m,n\in\mathbb{Z}),$$
$$[L_m,X(n)]=-n\,X(m+n)\quad(X\in\mathfrak{g},\ m,n\in\mathbb{Z}),$$
$$[\hat{\ell},\hat{\mathfrak{g}}\oplus\mathcal{L}]=[\hat{c},\hat{\mathfrak{g}}\oplus\mathcal{L}]=0.$$

$\hat{\mathfrak{g}}$は$\mathfrak{g}$の affinization もしくは affine Lie algebra と呼ばれ，$\mathcal{L}$は Virasoro algebra と呼ばれる．$\mathfrak{g}$は自然に$\hat{\mathfrak{g}}$の subalgebra とみなせるので，$X=X(0)=X\otimes t^0$ $(X\in\mathfrak{g})$ と書く．$\hat{\ell}$の固有値を level と呼び、$\hat{c}$の固有値を central charge と呼ぶ．

$\ell\in\mathbb{C}$，$\lambda\in\mathfrak{h}^*$とする．以下の性質をもつ vector $|\ell,\lambda\rangle\neq0$ から生成される $\hat{\mathfrak{g}}$-module を highest weight $\hat{\mathfrak{g}}$-module と呼ぶ：

$$X(m)|\ell,\lambda\rangle = 0 \quad (X\in\mathfrak{g},\ m>0), \quad \mathfrak{n}_+|\ell,\lambda\rangle = 0,$$

$$\hat{\ell}|\ell,\lambda\rangle = \ell|\ell,\lambda\rangle, \quad H|\ell,\lambda\rangle = \lambda(H)|\ell,\lambda\rangle \quad (H\in\mathfrak{h}).$$

$|\ell,\lambda\rangle$ から生成される highest weight simple $\hat{\mathfrak{g}}$-module を $\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ と書くことにする。

$\hat{\mathfrak{g}}$ の $\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ への作用を $\hat{\mathfrak{g}}\oplus\mathcal{L}$ の $\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ への作用に拡張しよう。$\{J^p\}_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ の Killing form (1) についての orthonormal basis とし、$1\le p\le\dim\mathfrak{g}$ に対して

$$\mathop{\circ}_{\circ} J^p(i)J^p(j) \mathop{\circ}_{\circ} := \begin{cases} J^p(i)J^p(j) & (i\le j) \\ J^p(j)J^p(i) & (i>j) \end{cases}$$

とおく。g は $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter number とし、$\ell\neq -g$ とする。このとき、$\mathcal{L}$ の $\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ への作用を次のように定めると、$\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ は simple $\hat{\mathfrak{g}}\oplus\mathcal{L}$-module をなす：

$$L_m := \frac{1}{2(\ell+g)}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathop{\circ}_{\circ} J^p(i)J^p(m-i) \mathop{\circ}_{\circ} \quad (m\in\mathbb{Z}),$$

$$\hat{c} := c\cdot id := \frac{\ell\dim\mathfrak{g}}{\ell+g}\, id.$$

この L_m $(m\in\mathbb{Z})$ は Segal-Sugawara operators と呼ばれる。L_m の $|\ell,\lambda\rangle$ への作用は次をみたす：

$$L_m|\ell,\lambda\rangle = 0 \quad (m>0),$$

$$L_0|\ell,\lambda\rangle = \Delta_{\ell,\lambda}|\ell,\lambda\rangle, \quad \Delta_{\ell,\lambda} := \frac{(\lambda|\lambda+2\rho)}{2(\ell+g)}.$$

また、$n\in\mathbb{Z}$ に対して、

$$\mathcal{H}_{\ell,\lambda}(n) := \{v\in\mathcal{H}_{\ell,\lambda} \mid L_0 v = (\Delta_{\ell,\lambda}+n)v\},$$

$$V_\lambda := \mathcal{H}_{\ell,\lambda}(0) = \{v\in\mathcal{H}_{\ell,\lambda} \mid L_0 v = \Delta_{\ell,\lambda}v\}$$

とおくと、$\mathcal{H}_{\ell,\lambda} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_{\ell,\lambda}(n)$ が成立し、V_λ は highest weight λ をもつ simple $\mathfrak{g}$-module をなす。

P_+ は $\mathfrak{g}$ の dominant integral weights 全体とし、$\ell\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して、

$$P_\ell := \{\lambda \in P_+ \mid 0 \leq (\theta|\lambda) \leq \ell\}$$

とおく。$\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ が $\mathfrak{g}$ の integrable representation であるための必要十分条件は $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ かつ $\lambda \in P_\ell$ が成立することであることがよく知られている([Kac]).

$\lambda \in P_+$ とする。このとき, V_λ, $\mathcal{H}_{\ell,\lambda}(n)$ は有限次元になる. $\mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}$ を

$$\mathcal{H}^+_{\ell,\lambda} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}(n), \quad \mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}(n) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\ell,\lambda}(n), \mathbb{C})$$

と定める. $\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ と $\mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}$ の自然な pairing を $\langle\,|\,\rangle$ と表わし, $\mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}$ に right $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$-module の構造を次のように入れる:

$$\langle ux|v\rangle := \langle u|xv\rangle \qquad (x \in U(\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}),\ v \in \mathcal{H}_{\ell,\lambda},\ u \in \mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}).$$

$V^+_\lambda := \mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}(0)$ とおくと, V^+_λ は simple right $\mathfrak{g}$-module をなす. $\mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}$ の vector $\langle \ell,\lambda|$ で以下の性質をもつものが唯一存在する:

$$\langle \ell,\lambda| X(m) = 0 \quad (X \in \mathfrak{g},\ m < 0), \quad \langle \ell,\lambda|\mathfrak{n}_- = 0,$$

$$\langle \ell,\lambda|\hat{\ell} = \ell\langle \ell,\lambda|, \quad \langle \ell,\lambda|H = \lambda(H)\langle \ell,\lambda| \quad (H \in \mathfrak{h}),$$

$$\langle \ell,\lambda|\ell,\lambda\rangle = 1.$$

§§0.2. Conformal block の定義と基本性質

以下, level $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\ell \neq -g)$ を固定し, ℓ を省略して $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_{\ell,\lambda}$, $|\lambda\rangle = |\ell,\lambda\rangle$, etc と表わす. $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_N, \lambda_\infty \in P_+$ とする.

$x \in U(\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L})$, $v_a \in \mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0 \leq a \leq N)$ に対して,

$$\rho_a(x)\, v_N \otimes \cdots \otimes v_1 \otimes v_0 := v_N \otimes \cdots \otimes v_{a+1} \otimes (x v_a) \otimes v_{a-1} \otimes \cdots \otimes v_0 \quad (0 \leq a \leq N)$$

とおく．$\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty}$ への $\hat{\mathfrak{g}}\oplus\mathfrak{L}$ の右からの作用を ρ_∞ と表わす．ここで，

$$H := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}\mathcal{H}_{\lambda_a},\ \mathbb{C}\right)$$

とおく．H には弱位相を入れて考える．$\Phi\in H$，$v_\infty\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}v_a\in\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}\mathcal{H}_{\lambda_a}$ に対して次のように書くことにする：

$$\langle v_\infty|\Phi|\bigotimes_{a=0}^{N}v_a\rangle = \langle v_\infty|\Phi|v_N\rangle\cdots|v_1\rangle|v_0\rangle \quad := \quad \Phi(v_\infty\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}v_a).$$

ρ_∞ は $\hat{\mathfrak{g}}\oplus\mathfrak{L}$ の H への左からの作用を定め，ρ_a $(0\leq a\leq N)$ は $\hat{\mathfrak{g}}\oplus\mathfrak{L}$ の H への右からの作用を定める．これらを，上の記号で書くと次のようになる：

$$\langle v_\infty|\rho_\infty(x)\Phi|\bigotimes_{a=0}^{N}v_a\rangle := \langle v_\infty\rho_\infty(x)|\Phi|\bigotimes_{a=0}^{N}v_a\rangle,$$

$$\langle v_\infty|\Phi\rho_a(x)|\bigotimes_{a=0}^{N}v_a\rangle := \langle v_\infty|\Phi|\rho_a(x)\bigotimes_{b=0}^{N}v_b\rangle = \langle v_\infty|\Phi|v_N\rangle\cdots|xv_a\rangle\cdots|v_0\rangle$$

$$(v_b\in\mathcal{H}_{\lambda_b},\ v_\infty\in\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty},\ x\in U(\hat{\mathfrak{g}}\oplus\mathfrak{L}),\ 0\leq a\leq N).$$

$X(\zeta)$ $(X\in\mathfrak{g})$ と $T(\zeta)$ を次のように定める：

$$X(\zeta) := \sum_{m\in\mathbb{Z}}\zeta^{-m-1}X(m)\ \ (X\in\mathfrak{g}),\qquad T(\zeta) := \sum_{m\in\mathbb{Z}}\zeta^{-m-2}L_m.$$

$A(\zeta)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\zeta^{-m-h}A_m$ は $X(\zeta)$ $(X\in\mathfrak{g})$ または $T(\zeta)$ とする．$\Phi\in H$ に対して，$\rho_\infty(A(\zeta))\Phi$，$\Phi\rho_a(A(\zeta-z_a))$ $(0\leq a\leq N)$ を次のように定める：

$$\rho_\infty(A(\zeta))\Phi \ := \sum_{m\in\mathbb{Z}}\zeta^{-m-h}\rho_\infty(A_m)\Phi,$$

$$\Phi\rho_a(A(\zeta-z_a)) := \sum_{m\in\mathbb{Z}}(\zeta-z_a)^{-m-h}\Phi\rho_a(A_m)\quad(0\leq a\leq N).$$

もちろん収束は弱位相で考えるが収束するとは限らないことを注意しておく．

$M := \{z=(z_1,\cdots,z_N)\in\mathbb{C}^N\mid 0,z_1,\cdots,z_N$ は互いに異なる$\}$ とおく．M 上の多価正則函数とは M の universal covering $\tilde{M}$ の上の大域的一価正則函数のこととする．

Definition 0.1 (conformal block)

$\Phi(z)$ が type $(\lambda_\infty;\lambda_N\cdots\lambda_0)$ の conformal block であるとは、以下の条件が成立することと定める：

(CB0) $\Phi(z)$ は M 上の $\mathcal{H}$-値多価正則函数である.

(CB1) $z\in M$ を固定し, $A(\zeta)$ は $X(\zeta)$ $(X\in\mathfrak{g})$ または $T(\zeta)$ であるとする。このとき, $\rho_\infty(A(\zeta))\Phi(z)$ は $|\zeta|$ が十分大きいとき収束し, $\Phi(z)\rho_a(A(\zeta-z_a))$ $(0\le a\le N)$ は $|\zeta-z_a|>0$ が十分小さいとき収束する. さらに, $\rho_\infty(A(\zeta))\Phi(z)$ および $\Phi(z)\rho_a(A(\zeta-z_a))$ $(0\le a\le N)$ は $\{\zeta\in\mathbb{C}\,|\,\zeta\neq 0,z_1,\cdots,z_N\}$ 上の同一の $\mathcal{H}$-値正則函数に解析接続される.

(CB2) $1\le a\le N$ に対して, $\Phi(z)\rho_a(L_{-1})=\dfrac{\partial}{\partial z_a}\Phi(z)$.

以下, $\Phi(z)$ は type $(\lambda_\infty;\lambda_N\cdots\lambda_0)$ の conformal block とし, $F(z)$ は $\Phi(z)$ の $V^\dagger_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}V_{\lambda_a}$ 上への制限とする. $\Phi(z)$ は $F(z)$ から一意に決定されることが conformal block の定義より導かれる。$z_0:=0$ とおき, $z_{ab}:=z_a-z_b$ とおく。$(E_\theta,H_\theta,F_\theta)\in\mathfrak{g}_\theta\times\mathfrak{h}\times\mathfrak{g}_{-\theta}$ は $\mathfrak{g}$ の highest root θ に対する sl_2-triplet とする。$\lambda\in P_\ell$ に対して, $L_\lambda:=\ell-(\theta|\lambda)+1$ とおく。$\lambda\in P_\ell$ のとき, $\mathcal{H}_\lambda$ において $E_\theta(-1)^{L_\lambda}|\lambda\rangle=0$ となり, $\mathcal{H}^\dagger_\lambda$ において $\langle\lambda|F_\theta(1)^{L_\lambda}=0$ となる. Ω_{ab} $(0\le a,b\le N)$ を次のように定める：

$$\Omega_{ab}:=\frac{1}{\ell+g}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}}\rho_a(J^p)\rho_b(J^p)\qquad(0\le a,b\le N).$$

Ω_{ab} は $\Phi\in\mathcal{H}$ に右から作用する.

Proposition 0.2

$F(z) = \Phi(z)|_{V_{\lambda_\infty}^+ \otimes \bigotimes_{a=0}^N V_{\lambda_a}}$ は，以下の (S0), (S1) をみたし，さらに，$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_N, \lambda_\infty \in P_\ell$ ならば (S2) をもみたす：

(S0) $F(z)$ は M 上の $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\lambda_\infty}^+ \otimes \bigotimes_{a=0}^N V_{\lambda_a}, \mathbb{C})$-値多価正則函数であり，

$$\rho_\infty(X) F(z) = \sum_{a=0}^N F(z)\rho_a(X) \quad (X \in \mathfrak{g},\ z \in M)$$

をみたす．よって，$F(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{a=0}^N V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty})$ とみなせる．

(S1) $F(z)$ は次の微分方程式をみたす：

$$\frac{\partial}{\partial z_a} F(z) = F(z)\left[\sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}} \frac{\Omega_{ab}}{z_{ab}}\right] \quad (1 \le a \le N).$$

この方程式は，Knizhnik-Zamolodchikov equation (略して，KZ equation) と呼ばれる．

(S2) $v_b \in V_{\lambda_b}\ (0 \le b \le N)$, $v_\infty \in V_{\lambda_\infty}^+$ に対して，

$$\langle v_\infty | F(z) \left[\sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}} \frac{\rho_b(E_\theta)}{z_{ab}}\right]^{L_{\lambda_a}} |v_N\rangle \cdots |v_{a+1}\rangle |\lambda_a\rangle |v_{a-1}\rangle \cdots |v_0\rangle = 0 \quad (0 \le a \le N),$$

$$\langle \lambda_\infty | F(z) \left[\sum_{1\le b\le N} z_b \rho_b(F_\theta)\right]^{L_{\lambda_\infty}} |v_N\rangle \cdots |v_1\rangle |v_0\rangle = 0.$$

以上の条件 (S0~2) は $F(z)$ を特徴づける基本的な方程式である (Theorem 0.5 を見よ)． (S0,1) は [KZ] によって導かれた ([KZ] の (2.14b) と (3.21))．そして，(S2) は [GW] と [TK1] によって導かれた．

§§0.3. Chiral vertex operatorの定義と基本性質

$\lambda, \mu, \nu \in P_+$とする. $\Phi(z)$が type $(\nu; \mu\lambda)$のconformal blockのとき, 特に, $\Phi(z)$を chiral vertex operator (カイラル頂点作用素)と呼ぶ. 以下, $\Phi(z)$は type $(\nu;\mu\lambda)$の chiral vertex operatorとする. $\Phi(z)$は$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$の上の$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\nu^+ \otimes \mathcal{H}_\mu \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathbb{C})$-値多価正則函数である. $\Phi(z)$は$\mathbb{C}^\times$上で

$$\Phi(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{-m-\Delta_\lambda-\Delta_\mu+\Delta_\nu}\, \Phi_m$$

と展開されて, $\Phi_m \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\mu \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathcal{H}_\nu)$とみなせる. そこで, 次のように書くことにする:

$$\langle u|\Phi(z;v)|w\rangle := \Phi(z; u\otimes v\otimes w) \qquad (u\in\mathcal{H}_\nu^+,\ v\in\mathcal{H}_\mu,\ w\in\mathcal{H}_\lambda),$$

$$\Phi_m(v)w := \Phi_m(v\otimes w) \in \mathcal{H}_\nu \qquad (v\in\mathcal{H}_\mu,\ w\in\mathcal{H}_\lambda).$$

$\Phi(z)$に対して, ある$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu\otimes V_\lambda, V_\nu)$が存在して,

$$(*) \qquad \Phi(z)\big|_{V_\nu^+\otimes V_\mu\otimes V_\lambda} = z^{-\Delta_\lambda-\Delta_\mu+\Delta_\nu}\,\varphi$$

が成立する. ここで, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\nu^+\otimes V_\mu\otimes V_\lambda, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\mu\otimes V_\lambda, V_\nu)$という同一視を用いている. $\Phi(z)$はφから一意に決定される.

Theorem 0.3

$\lambda, \mu, \nu \in P_+$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu\otimes V_\lambda, V_\nu)$, $\varphi \neq 0$とする. $\lambda\in P_\ell$のとき以下の条件(a)と(b)は同値であり, $\mu\in P_\ell$のとき以下の条件(a)と(c)は同値であり, $\nu\in P_\ell$のとき以下の条件(a)と(d)は同値である. 特に, $\lambda,\mu,\nu\in P_\ell$のとき, 以下の条件(a), (b), (c), (d)は互いに同値である:

(a) $\lambda,\mu,\nu\in P_\ell$ かつ (*) をみたす type $(\nu;\mu\lambda)$ の chiral vertex operator $\Phi(z)$ が存在する.

(b) $\varphi|V_\nu^\dagger\otimes(E_\theta^{L\lambda}V_\mu)\otimes|\lambda\rangle=0.$

(c) $\varphi|V_\nu^\dagger\otimes|\mu\rangle\otimes(E_\theta^{L\mu}V_\lambda)=0.$

(d) $\varphi|\langle\nu|\otimes(F_\theta^{L\nu}V_\mu)\otimes V_\lambda=0.$

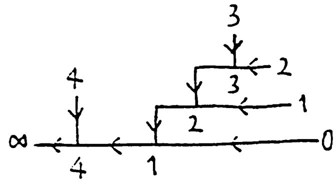
この結果は level ℓ が $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\ell\neq -g)$ の場合の結果であることを注意しておく. $\ell\notin\mathbb{Q}$ のときは, 任意の $\lambda,\mu,\nu\in P_+$, $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu\otimes V_\lambda,V_\nu)$ に対して (*) をみたす type $(\nu;\mu\lambda)$ の chiral vertex operator が存在し話は簡単になる.

§§0.4. Chiral vertex operators の合成

$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_N,\lambda_\infty\in P_\ell$ とし, $\vec{\lambda}:=(\lambda_\infty;\lambda_N\cdots\lambda_1\lambda_0)$ とおく. 以下 §4 の意味での (tree-level ϕ^3) diagram Γ と $\vec{\lambda}$ に対する chiral vertex operators の合成について説明する. しかし, 一般の diagram Γ に対して説明すると長くなるので, ここでは, 例で説明することにする.

以下, $N=4$, $\vec{\lambda}=(\lambda_\infty;\lambda_4\cdots\lambda_0)$ とし, 例として次の diagram Γ を考える:

$\Gamma =$



.

このような diagram Γ の中の次のような部分を頂点 (vertex) と呼ぶ：

 .

Γ の中の矢線の先と根がともに頂点につながっているときその矢線を内線と呼び，それ以外の矢線を外線と呼ぶ．外線には $0, 1, \cdots, N=4, \infty$ と番号をつけてあり，外線 a $(1 \leq a \leq N=4)$ から矢線の矢の向きに進み最初に出会う下向きの矢線の先にある頂点には a と番号をつけてある．Γ の内線全体を，その先と根の頂点の番号により，$I = \{(1,4), (2,1), (3,2)\}$ と表わす．頂点 a $(1 \leq a \leq N=4)$ に対して，そこに来ている左向きの矢線を逆にたどって右に進み最後にたどりつく外線の番号が b のとき，$\delta(a) := b$ とおく．$\delta(1) = \delta(4) = 0$, $\delta(2) = 1$, $\delta(3) = 2$ である．$z_0 := 0$，$z_{ab} := z_a - z_b$ $(0 \leq a, b \leq N=4)$ とおく．頂点 a には，$z_{a,\delta(a)} = z_a - z_{\delta(a)}$ を対応させる．

$(\Gamma, \vec{\lambda})$ に対して，chiral vertex operators の合成を定義しよう．まず，Γ の外線 $b = 0, 1, \cdots, N=4, \infty$ に対して λ_b を対応させる．そして，任意に $\vec{\mu} = (\mu_{14}, \mu_{21}, \mu_{32}) \in P_\ell^{N-1}$ をとり Γ の内線 $(1,4), (2,1), (3,2) \in I$ に対してそれぞれ $\mu_{14}, \mu_{21}, \mu_{32}$ を対応させる．頂点 a に来る左向きの矢線，頂点 a に来る下向きの矢線，頂点 a から出る左向きの矢線のそれぞれに対応する weight を $\lambda(a) = \lambda(\vec{\mu}, a)$，$\mu(a) = \mu(\vec{\mu}, a)$，$\nu(a) = \nu(\vec{\mu}, a)$ と表わす．例えば，$\lambda(2) = \lambda_1$，$\mu(2) = \mu_{32}$，$\nu(2) = \mu_{21}$ である．次に頂点 a $(1 \leq a \leq N=4)$ に対して，type $\langle \nu(a); \mu(a) \lambda(a) \rangle$ の chiral vertex operator $\Phi_a(z_{a,\delta(a)})$ を任意にとり，

$$\Phi_a(z_{a,\delta(a)}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z_{a,\delta(a)}^{-m-\Delta_{\lambda(a)}-\Delta_{\mu(a)}-\Delta_{\nu(a)}} \Phi_m^{(a)}$$

と展開する．$\Phi_m^{(a)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mu(a)} \otimes \mathcal{H}_{\lambda(a)}, \mathcal{H}_{\nu(a)})$ とみなせる．$\Phi_a(z_{a,\delta(a)})$ $(1 \le a \le N=4)$ の上の Γ にしたがった合成 $\Phi(z)$ を次のように定める：

$$
\begin{aligned}
\langle v_\infty | \Phi(z) | \bigotimes_{b=0}^{N} v_b \rangle &:= \langle v_\infty | \Phi_4(z_4; v_4) \Phi_1(z_1; \Phi_2(z_{21}; \Phi_3(z_{32}; v_3) v_2) v_1) v_0 \rangle \\
&:= \sum_{m_1,\dots,m_N \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{a=1}^{N} z_{a,\delta(a)}^{-m_a - \Delta_{\lambda(a)} - \Delta_{\mu(a)} - \Delta_{\nu(a)}} \right) \\
&\qquad \times \langle v_\infty | \Phi_{m_4}^{(4)}(v_4) \Phi_{m_1}^{(1)}(\Phi_{m_2}^{(2)}(\Phi_{m_3}^{(3)}(v_3) v_2) v_1) v_0 \rangle
\end{aligned}
$$

$$(v_b \in \mathcal{H}_{\lambda_b},\ 0 \le b \le N,\ v_\infty \in \mathcal{H}_{\lambda_\infty}).$$

この級数の収束性は自明でないことを注意しておく．したがって，はじめは形式的に考えることになる．

座標系 $\tau = (\tau_\infty, \tau_{14}, \tau_{23}, \tau_{32})$ を次のように定める：

$$\tau_\infty := z_4, \quad \tau_{14} := \frac{z_1}{z_4}, \quad \tau_{21} := \frac{z_{21}}{z_1}, \quad \tau_{32} := \frac{z_{32}}{z_{21}}.$$

τ を Γ から定める規則は明らかであろう．逆変換は次のようになる：

$$
\begin{aligned}
&z_4 = \tau_\infty, \quad z_1 = \tau_\infty \tau_{14}, \quad z_{21} = \tau_\infty \tau_{14} \tau_{21}, \quad z_{32} = \tau_\infty \tau_{14} \tau_{21} \tau_{32}, \\
&z_2 = \tau_\infty \tau_{14} (\tau_{21} + 1), \quad z_3 = \tau_\infty \tau_{14} (\tau_{21} \tau_{32} + \tau_{21} + 1).
\end{aligned}
$$

したがって，十分小さな $r > 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
U &:= \{ \tau \in \mathbb{C}^4 \mid |\tau_{14}|, |\tau_{21}|, |\tau_{32}| < r \}, \\
Y &:= \{ \tau \in U \mid \tau_\infty \tau_{14} \tau_{21} \tau_{32} = 0 \}
\end{aligned}
$$

とおくと，$U \setminus Y \subset M$ とみなせ，τ は $U \setminus Y$ における M の局所座標系をなす．

Theorem 0.4

$(\Gamma, \vec{\lambda})$ に対する chiral vertex operators の合成 $\Phi(z)$ は，十分小さな $r>0$ に対する $U \setminus Y$ 上で収束し，M上のH値多価正則函数に解析接続されて，type $\vec{\lambda}$ の conformal block を定める.

もちろんこの結果は任意の diagram に対して成立する．この定理の証明のためには，まず $\Phi(z)$ が形式的に conformal block の公理をみたすことを示し，座標系 τ において KZ equation が Y に沿って確定特異点型であることを用いる.

§§ 0.5. Main theorem について

Γ は §4 の意味での任意の (tree-level ϕ^3) diagram とし，$\lambda, \mu, \nu \in P_\ell$, $\vec{\lambda} = (\lambda_\infty; \lambda_N \cdots \lambda_0) \in P_\ell^{N+2}$ とする．以上の結果をまとめるために次のようにおく：

$$V_{\mu\lambda}^{\nu} := \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu \otimes V_\lambda, V_\nu) \,\middle|\, \varphi \text{ は Theorem 0.3 の条件 (a), (b), (c), (d) をみたす} \right\},$$

$$\mathcal{V}_{\mu\lambda}^{\nu} := \left\{ \text{type } (\nu; \mu\lambda) \text{ の chiral vertex operators 全体} \right\},$$

$$V(\Gamma, \vec{\lambda}) := \bigoplus_{\vec{\mu} \in P_\ell^{N-1}} \bigotimes_{a=1}^{N} V_{\mu(\vec{\mu},a)\,\lambda(\vec{\mu},a)}^{\nu(\vec{\mu},a)},$$

$$\mathcal{V}(\Gamma, \vec{\lambda}) := \bigoplus_{\vec{\mu} \in P_\ell^{N-1}} \bigotimes_{a=1}^{N} \mathcal{V}_{\mu(\vec{\mu},a)\,\lambda(\vec{\mu},a)}^{\nu(\vec{\mu},a)},$$

$$\mathcal{V}(\vec{\lambda}) := \{\text{type } \vec{\lambda} \text{ の conformal blocks 全体}\},$$

$$\mathcal{S}(\vec{\lambda}) := \{\vec{\lambda} \text{ に対する条件 (§0〜2) をみたす } F(z) \text{ 全体}\}.$$

Proposition 0.2 より, conformal block $\Phi(z) \in \mathcal{V}(\vec{\lambda})$ の $V_{\lambda_\infty}^{+} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}$ の上への制限は, $\mathcal{V}(\vec{\lambda})$ から $\mathcal{S}(\vec{\lambda})$ への写像 η を定める. Theorem 0.3 より, $V_{\mu\lambda}^{\nu}$ と $\mathcal{V}_{\mu\lambda}^{\nu}$ は同型であるから, $V(\Gamma, \vec{\lambda})$ と $\mathcal{V}(\Gamma, \vec{\lambda})$ も同型である. Theorem 0.4 より, chiral vertex operators の合成は, $\mathcal{V}(\Gamma, \vec{\lambda})$ から $\mathcal{V}(\vec{\lambda})$ への写像 θ_Γ を定める. θ_Γ の定める $V(\Gamma, \vec{\lambda})$ から $\mathcal{V}(\vec{\lambda})$ への写像を Θ_Γ と表わす.

<u>Theorem 0.5</u> (Main theorem)

任意の diagram Γ と $\vec{\lambda} \in P_\ell^{N+2}$ に対して, η, θ_Γ, Θ_Γ は同型写像である:

$$\begin{tikzcd}
V(\Gamma, \vec{\lambda}) \arrow[dr, "\Theta_\Gamma", "\sim"'] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & & \\
\mathcal{V}(\Gamma, \vec{\lambda}) \arrow[r, "\sim", "\theta_\Gamma"'] & \mathcal{V}(\vec{\lambda}) \arrow[r, "\eta", "\sim"'] & \mathcal{S}(\vec{\lambda})
\end{tikzcd}$$

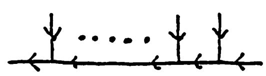
$\mathcal{S}(\vec{\lambda})$ は定義より M 上の local system を定めることがわかる. よって, 同型 η によって, conformal blocks の全体 $\mathcal{V}(\vec{\lambda})$ も M 上の local system を定め, η は M 上の local system の同型を導く. これに対して θ_Γ と Θ_Γ は, M の開集合 $U \setminus Y$ 上の局所的な同型であることを注意しておく. また, θ_Γ, Θ_Γ の定め方には多価性による不定性があるので, 適当な分枝を選んで定義される. この結果は conformal block の factorization property と呼ばれる.

Corollary 0.6

$N_{\mu\lambda}^{\nu} := \dim V_{\mu\lambda}^{\nu}$ とおくと, $\dim \mathcal{V}(\vec{\lambda}) = \sum_{\vec{\mu}\in P_\ell^{N-1}} \prod_{a=1}^{N} N_{\mu(\vec{\mu},a)\,\lambda(\vec{\mu},a)}^{\nu(\vec{\mu},a)}$.

以上は $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\ell \neq -g)$ の場合の結果であるが, すべての P_ℓ を P_+ に置き換えれば, $\ell \notin \mathbb{Q}$ のときも全く同様に成立する.

以上の定式化と結果は, 基本的には [TK1] によっている. [TK1] においては, $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ で diagram が以下の Γ_0 の場合の結果を得ている:

$\Gamma_0 =$  .

$\Phi(z)$ は type $\vec{\lambda}$ の conformal block とする. $\mathfrak{S}_N$ は N 次の対称群とし, $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して $\sigma(z) := (z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(N)})$, $\sigma(\vec{\lambda}) := (\lambda_\infty; \lambda_{\sigma(N)} \cdots \lambda_{\sigma(1)}\, \lambda_0)$ とおく. このとき, $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して $\sigma^*\Phi(z)$ を

$$\langle v_\infty | \sigma^*\Phi(z) | v_N \rangle \cdots | v_1 \rangle | v_0 \rangle := \langle v_\infty | \Phi(\sigma(z)) | v_{\sigma^{-1}(N)} \rangle \cdots | v_{\sigma^{-1}(1)} \rangle | v_0 \rangle$$

$$(v_a \in \mathcal{H}_{\lambda_{\sigma(a)}},\ 1 \leq a \leq N,\ v_0 \in \mathcal{H}_{\lambda_0},\ v_\infty \in \mathcal{H}^+_{\lambda_\infty})$$

と定めると, Definition 0.1 より $\sigma^*\Phi(z)$ は type $\sigma(\vec{\lambda})$ の conformal block をなす. よって, base point $z \in M$ をとり z から $\sigma(z)$ までの path γ をとると, conformal block の解析接続によって同型写像

$$B(\gamma) : \mathcal{V}(\vec{\lambda}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(\sigma(\vec{\lambda}))$$

が得られる. [TK1] では, $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$, $\ell \notin \mathbb{Q}$ で $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N$ が $sl_2(\mathbb{C})$ の2次元既約表現の highest weight の場合に, Θ_{Γ_0} によって $\mathcal{V}(\vec{\lambda})$ の basis を定めて $B(\gamma)$ の行列表示を具体的に求めている. その結果は, $\lambda_0 = 0$ のとき,

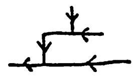
Wenzl が代数的に作った Hecke algebra の表現と一致するという驚くべきことであった. そこでは, $B(\gamma)$ の行列表示を求めるためには, Γ_0 に対する Theorem 0.5 より次の diagram に対する $B(\gamma)$ の行列表示を求めれば十分であることを利用している:

 .

Γ は diagram とし, U_Γ は Γ に対する chiral vertex operators の合成が収束する領域としよう. U_Γ は Γ によって異なる. 同じ頂点の個数をもつ2つの diagrams Γ, Γ' に対して, U_Γ から $U_{\Gamma'}$ への path γ をとると conformal block の解析接続と $\Theta_\Gamma, \Theta_{\Gamma'}$ を通して同型写像

$$F(\gamma):\ V(\Gamma,\vec{\lambda}) \xrightarrow{\sim} V(\Gamma',\vec{\lambda})$$

が定まる. Theorem 0.5 より, 一般の Γ, Γ' に対する $F(\gamma)$ は以下の特別な Γ, Γ' に対する $F(\gamma)$ から決定されることがわかる;

$\Gamma =$  , $\Gamma' =$  .

[MS1~3] は Theorem 0.5 にあたることを仮定して, M の位相から得られる $B(\gamma)$ と $F(\gamma)$ の関係式を求めている. この [MS1~3] の仕事が Theorem 0.5 を証明しようと思った動機の1つであった. 現在では, conformal block の factorization property は Riemann 面 (の universal family) の上の conformal block に対して証明されている [TUY].

§§0.6. 内容の構成について

§1では Affine Lie algebra とその表現についての記号と用語の説明をし，Affine Lie algebra の integrable representation についての基本的結果を後で使い易い形 (Lemma 1.2) で引用しておく．

§2では conformal block と chiral vertex operator の定義をして，Proposition 0.2 (Lemma 2.3) を証明する．

§3は Theorem 0.3 (Theorem 3.11，Lemma 3.13) の証明についやされる．

§4では diagram Γ に対する chiral vertex operators の合成を定義し，Theorem 0.4 (Theorem 4.8) と Theorem 0.5 (Theorem 4.10) を証明する．

Appendix A では，§4で用いる regular singularity をもつ connection に対する結果を引用してある．

Appendix B では，Virasoro algebra に対する chiral vertex operator を定義し，[FFu1,2] の結果を引用して，それに対する Theorem 0.3 に対応することを証明する (Theorem B.9)．

Appendix C では，[FFr1~4] の結果から，どのようにして KZ equation の解になるような積分表示式が導かれるかを説明し，その被積分函数の形を $\mathfrak{g} = sl_{r+1}(\mathbb{C})$ の場合に具体的に求めてある．

§1. 記号や用語についての準備

§§1.1. Affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ と Virasoro algebra $\mathcal{L}$

以下，基礎体は $\mathbb{C}$ とし，一般に Lie algebra $\mathfrak{a}$ に対してその universal enveloping algebra を $U(\mathfrak{a})$ と表わす．

$\mathfrak{g}$ を non-abelian simple Lie algebra とし，$\mathfrak{h}$ をその Cartan subalgebra とし，Δ をその roots 全体とし，Δ_+ (resp. Δ_-) を positive (resp. negative) roots 全体とする．$\alpha \in \Delta$ に対する $\mathfrak{g}$ の root subspace を $\mathfrak{g}_\alpha$ と表わす．$\mathfrak{n}_+ := \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$，$\mathfrak{n}_- := \bigoplus_{\alpha\in\Delta_-} \mathfrak{g}_\alpha$ とおく．θ を $\mathfrak{g}$ の highest root とし，$(\ |\ )$ を $(\theta|\theta) = 2$ と正規化された $\mathfrak{g}$ の Killing form とする．$\mathfrak{h}$ とその dual space $\mathfrak{h}^*$ は $(\ |\ )$ によって同一視される．$\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$ とおく．g を $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter number とする．$\{J^\mu\}_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}}$ は $(\ |\ )$ に関する $\mathfrak{g}$ の orthonormal basis であるとする．$(E_\theta, H_\theta, F_\theta) \in \mathfrak{g}_\theta \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}_{-\theta}$ は θ に対する $\mathfrak{sl}_2$-triplet であるとする．(i.e. $[E_\theta, F_\theta] = H_\theta$，$[H_\theta, E_\theta] = 2E_\theta$，$[H_\theta, F_\theta] = -2F_\theta$)．$P_+$ は $\mathfrak{g}$ の dominant integral weights 全体とし，$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して P_ℓ を次のように定める：

$$P_\ell := \{\lambda \in P_+ \mid 0 \leq (\theta|\lambda) \leq \ell\}.$$

w_0 は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の最長元とする．w_0 は $\mathfrak{g}$ のすべての positive roots を negative roots にうつす．

$\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\hat{\ell}$, $\mathcal{L} := \mathbb{C}[t, t^{-1}]\frac{d}{dt} \oplus \mathbb{C}\hat{c}$ とおき,

$$X(m) := X \otimes t^m \quad (X \in \mathfrak{g},\ m \in \mathbb{Z}), \quad L_m := -t^{m+1}\frac{d}{dt} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

とおく. $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$ に Lie algebra の構造を以下のように入れる:

$$[X(m), Y(n)] = [X, Y](m+n) + (X|Y)m\delta_{m+n,0}\hat{\ell} \quad (X, Y \in \mathfrak{g},\ m, n \in \mathbb{Z}),$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}\hat{c} \quad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

$$[L_m, X(n)] = -nX(m+n) \quad (X \in \mathfrak{g},\ m, n \in \mathbb{Z}),$$

$$[\hat{\ell}, \hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}] = [\hat{c}, \hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}] = 0.$$

$\hat{\mathfrak{g}}$ は $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$ の ideal をなし, $\mathcal{L}$ は $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$ の subalgebra をなす. $\hat{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ の affinization もしくは affine Lie algebra と呼ばれ, $\mathcal{L}$ は Virasoro algebra と呼ばれる. $\mathfrak{g}$ は自然に $\hat{\mathfrak{g}}$ の subalgebra とみなせるので, $X = X(0) = X \otimes t^0$ $(X \in \mathfrak{g})$ と書く. $\hat{\ell}$ の固有値を level と呼び, $\hat{c}$ の固有値を central charge と呼ぶ. $\hat{\ell}$ が $\ell \cdot id$ $(\ell \in \mathbb{C})$ として作用する $\hat{\mathfrak{g}}$-module を level ℓ の $\hat{\mathfrak{g}}$-module と呼ぶ. $\hat{\mathfrak{g}}$ の level ℓ を固定すると言えば, それ以後 level ℓ の $\hat{\mathfrak{g}}$-module のみを扱う. $\hat{\mathfrak{g}}$ の level は固定されることが多い. $\mathcal{L}$ の central charge についても同様である. $\hat{\mathfrak{g}}_\pm$, $\mathcal{L}_\pm$ を

$$\hat{\mathfrak{g}}_\pm := \mathfrak{g} \otimes t^{\pm1}\mathbb{C}[t^{\pm1}] \subset \hat{\mathfrak{g}}, \quad \mathcal{L}_\pm := \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathbb{C}L_{\pm m} \subset \mathcal{L}$$

と定める. $\hat{\mathfrak{g}}_\pm$, $\mathcal{L}_\pm$ は $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$ の subalgebra をなす.

§§1.2. Highest weight module について

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_+$ は以下の Lie algebras とその三角分解のどれかであるとする:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+,$$
$$\hat{\mathfrak{g}}_+ = (\hat{\mathfrak{g}}_- \oplus \mathfrak{n}_-) \oplus (\mathbb{C}\hat{\ell} \oplus \mathfrak{h}) \oplus (\hat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \mathfrak{n}_+),$$
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_- \oplus (\mathbb{C}\hat{c} \oplus \mathbb{C}L_0) \oplus \mathcal{L}_+,$$
$$\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L} = (\hat{\mathfrak{g}}_- \oplus \mathfrak{n}_- \oplus \mathcal{L}_-) \oplus (\mathbb{C}\hat{\ell} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}\hat{c} \oplus \mathbb{C}L_0) \oplus (\hat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathcal{L}_+).$$

さらに, $\mathcal{A}_0^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_0, \mathbb{C})$ とおく.

$\chi \in \mathcal{A}_0^*$ とする. χ に対して left (resp. right) $\mathcal{A}$-module の vector $|\chi\rangle$ (resp. $|\chi\rangle$) が weight χ の highest weight vector であるとは次が成立することと定める:

$$|\chi\rangle \neq 0, \quad \mathcal{A}_+|\chi\rangle = 0, \quad a|\chi\rangle = \chi(a)|\chi\rangle \quad (a \in \mathcal{A}_0)$$
$$(\text{resp. } \langle\chi| \neq 0, \quad \langle\chi|\mathcal{A}_- = 0, \quad \langle\chi|a = \chi(a)\langle\chi| \quad (a \in \mathcal{A}_0)).$$

$|\chi\rangle$ (resp. $\langle\chi|$) から生成される $\mathcal{A}$-module を highest weight χ の highest weight left (resp. right) $\mathcal{A}$-module と呼ぶ.

$\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^+$) は left (resp. right) $\mathcal{A}$-module とし, $\eta \in \mathcal{A}_0^*$ に対して

$$\mathcal{H}(\eta) := \{v \in \mathcal{H} \mid av = \eta(a)v \ (a \in \mathcal{A}_0)\}$$
$$(\text{resp. } \mathcal{H}^+(\eta) := \{v \in \mathcal{H} \mid va = \eta(a)v \ (a \in \mathcal{A}_0)\})$$

とおき, 次が成立していると仮定する:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\eta \in \mathcal{A}_0^*} \mathcal{H}(\eta), \quad \dim \mathcal{H}(\eta) < \infty \quad (\eta \in \mathcal{A}_0^*)$$
$$(\text{resp. } \mathcal{H}^+ = \bigoplus_{\eta \in \mathcal{A}_0^*} \mathcal{H}^+(\eta), \quad \dim \mathcal{H}^+(\eta) < \infty \quad (\eta \in \mathcal{A}_0^*)).$$

このとき，$\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^+$) の dual $\mathcal{H}^*$ (resp. $\mathcal{H}^{+*}$) を次のように定める：

$$\mathcal{H}^* := \bigoplus_{\eta \in \mathcal{A}_0^*} \mathcal{H}^*(\eta), \quad \mathcal{H}^*(\eta) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(\eta), \mathbb{C}) \quad (\eta \in \mathcal{A}_0^*)$$

$$(\text{resp. } \mathcal{H}^{+*} := \bigoplus_{\eta \in \mathcal{A}_0^*} \mathcal{H}^{+*}(\eta), \quad \mathcal{H}^{+*}(\eta) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^+(\eta), \mathbb{C}) \ (\eta \in \mathcal{A}_0^*)),$$

$\mathcal{H}^*$ (resp. $\mathcal{H}^+$) と $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^{+*}$) の自然な complete pairing を $\langle\,|\,\rangle$ と表わす．

$\mathcal{H}^*$ (resp. $\mathcal{H}^{+*}$) は次によって自然に right (resp. left) $\mathcal{A}$-module とみなせる：

$$\langle ux|v\rangle := \langle u|xv\rangle \quad (x \in U(\mathcal{A}),\ u \in \mathcal{H}^*,\ v \in \mathcal{H})$$

$$(\text{resp. } \langle u|xv\rangle := \langle ux|v\rangle \ (x \in U(\mathcal{A}),\ u \in \mathcal{H}^+,\ v \in \mathcal{H}^{+*})).$$

$\langle ux|v\rangle = \langle u|xv\rangle$ のことを $\langle u|x|v\rangle$ と書くことがある．

$\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^+$) は $|\chi\rangle$ (resp. $\langle\chi|$) から生成される highest weight left (resp. right) $\mathcal{A}$-module とする．$\mathcal{H}^*$ (resp. $\mathcal{H}^{+*}$) には weight χ の highest weight vector $\langle\chi|$ (resp. $|\chi\rangle$) で $\langle\chi|\chi\rangle = 1$ をみたすものが唯一存在する．$\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^+$) の weight が χ でない highest weight vector を singular vector と呼ぶことがある

M_χ, M_χ^+ を次のように定める：

$$M_\chi := U(\mathcal{A})/K_\chi, \quad K_\chi := U(\mathcal{A})\mathcal{A}_+ + \sum_{a \in \mathcal{A}_0} U(\mathcal{A})(a - \chi(a))$$

$$(\text{resp. } M_\chi^+ := U(\mathcal{A})/K_\chi^+, \quad K_\chi^+ := \mathcal{A}_- U(\mathcal{A}) + \sum_{a \in \mathcal{A}_0} (a - \chi(a))\, U(\mathcal{A})).$$

M_χ (resp. M_χ^+) は weight χ の highest weight vector $|\chi\rangle = 1 \bmod K_\chi$ (resp. $\langle\chi| = 1 \bmod K_\chi^+$) から生成される highest weight left (resp. right) $\mathcal{A}$-module をなす．M_χ (resp. M_χ^+) を left (resp. right) Verma module と呼ぶ．M_χ^* (resp. M_χ^{+*}) は M_χ (resp. M_χ^+) の dual とする．$|\chi\rangle \in M_\chi$ (resp. $\langle\chi| \in M_\chi^+$) を $|\chi\rangle \in M_\chi^{+*}$ (resp. $\langle\chi| \in M_\chi^*$) にうつす $\mathcal{A}$-homomorphism $M_\chi \to M_\chi^{+*}$

(resp. $M_\chi^+ \to M_\chi^*$) が一意に定まる. M_χ^+ と M_χ の間には以下の性質をもつ (complete とは限らない) pairing $\langle\,|\,\rangle$ が一意に存在する:

$$\langle\chi|\chi\rangle = 1, \quad \langle ux|v\rangle = \langle u|xv\rangle \quad (x \in U(\mathcal{A}),\ u \in M_\chi^+,\ v \in M_\chi).$$

J_χ, J_χ^+ を次のように定める:

$$J_\chi := \{v \in M_\chi \mid \langle M_\chi^+|v\rangle = 0\}, \quad J_\chi^+ := \{u \in M_\chi^+ \mid \langle u|M_\chi\rangle = 0\}.$$

J_χ (resp. J_χ^+) は M_χ (resp. M_χ^+) の唯一の maximal proper $\mathcal{A}$-submodule と一致することがわかるので,

$$L_\chi := M_\chi/J_\chi \quad , \quad L_\chi^+ := M_\chi^+/J_\chi^+$$

とおくと, L_χ (resp. L_χ^+) は highest weight simple left (resp. right) $\mathcal{A}$-module をなし, $\langle\,|\,\rangle$ は L_χ^+ と L_χ の complete pairing を induce する. よって, $L_\chi \subset M_\chi^{+*}$, $L_\chi^+ \subset M_\chi^*$ とみなせ, $L_\chi = L_\chi^{+*} = \mathrm{Image}(M_\chi \to M_\chi^{+*})$, $L_\chi^+ = L_\chi^* = \mathrm{Image}(M_\chi^+ \to M_\chi^*)$ が成立する.

$\mathcal{A} = \mathfrak{g}$ のとき, $\lambda \in \mathcal{A}_0^* = \mathfrak{h}^*$ に対して,

$$V_\lambda := L_\lambda, \quad V_\lambda^+ := L_\lambda^+, \quad M_\lambda := M_\lambda, \quad M_\lambda^+ := M_\lambda^+$$

と書くことにする. V_λ, V_λ^+ が有限次元になるための必要十分条件は, $\lambda \in P_+$ が成立することである.

$\mathcal{A} = \hat{\mathfrak{g}}$ のとき, $\chi \in \mathcal{A}_0^* = (\mathbb{C}\hat{\ell} \oplus \mathfrak{h})^*$ に対して,

$$\ell := \chi(\hat{\ell}) \quad , \quad \lambda(H) := \chi(H) \quad (H \in \mathfrak{h})$$

とおき, χ と $(\ell, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathfrak{h}^*$ を同一視して, 次のように書くことにする:

$$\mathcal{H}_{\ell,\lambda} := L_\chi\,,\ |\ell,\lambda\rangle := |\chi\rangle\,,\ \mathcal{H}^+_{\ell,\lambda} := L^+_\chi\,,\ \langle\ell,\lambda| := \langle\chi|.$$

しかし，$\hat{\mathfrak{g}}$ の Verma modules M_χ, M^+_χ は用いない．そのかわりに，$\hat{\mathfrak{g}}$-modules V_λ, V^+_λ から induce された次の $\hat{\mathfrak{g}}$-modules $\mathcal{M}_{\ell,\lambda}$, $\mathcal{M}^+_{\ell,\lambda}$ を用いる：

$$\mathcal{M}_{\ell,\lambda} := U(\hat{\mathfrak{g}}) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} V_\lambda / K_{\ell,\lambda}\,,\quad K_{\ell,\lambda} := \left(U(\hat{\mathfrak{g}})\hat{\mathfrak{g}}_+ + U(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\ell}-\ell)\right) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} V_\lambda\,,$$

$$\mathcal{M}^+_{\ell,\lambda} := V^+_\lambda \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} U(\hat{\mathfrak{g}}) / K^+_{\ell,\lambda}\,,\quad K^+_{\ell,\lambda} := V^+_\lambda \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} \left(\hat{\mathfrak{g}}_- U(\hat{\mathfrak{g}}) + (\hat{\ell}-\ell) U(\hat{\mathfrak{g}})\right).$$

$\mathcal{M}_{\ell,\lambda}$ (resp. $\mathcal{M}^+_{\ell,\lambda}$) は weight (ℓ,λ) の highest weight vector $|\ell,\lambda\rangle = 1\otimes|\lambda\rangle \bmod K_{\ell,\lambda}$ (resp. $\langle\ell,\lambda| = \langle\lambda|\otimes 1 \bmod K^+_{\ell,\lambda}$) から生成される left (resp. right) $\hat{\mathfrak{g}}$-module である．自然に，$V_\lambda \subset \mathcal{M}_{\ell,\lambda}$, $V^+_\lambda \subset \mathcal{M}^+_{\ell,\lambda}$, $V_\lambda \subset \mathcal{H}_{\ell,\lambda}$, $V^+_\lambda \subset \mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}$ とみなせる．$|\ell,\lambda\rangle \in \mathcal{M}_{\ell,\lambda}$ (resp. $\langle\ell,\lambda| \in \mathcal{M}^+_{\ell,\lambda}$) を $\langle\ell,\lambda| \in \mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ (resp. $\langle\ell,\lambda| \in \mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}$) にうつす surjective $\hat{\mathfrak{g}}$-homomorphism $\mathcal{M}_{\ell,\lambda} \to \mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ (resp. $\mathcal{M}^+_{\ell,\lambda} \to \mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}$) が一意に存在する．

以下，level $\ell \in \mathbb{C}$ を固定して，ℓ を省略して，

$$\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_{\ell,\lambda}\,,\quad \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_{\ell,\lambda}\,,\quad |\lambda\rangle = |\ell,\lambda\rangle$$

と書くことにする．これから，ℓ を固定するときには，このように ℓ を省略して書くことにする．

$\mathcal{M}_\lambda$, $\mathcal{M}^+_\lambda$ に次のように filtration F_n を定める：

$$F_0\mathcal{M}_\lambda := V_\lambda\,,\quad F_{n+1}\mathcal{M}_\lambda := F_n\mathcal{M}_\lambda + \hat{\mathfrak{g}}_- F_n\mathcal{M}_\lambda \quad (n\geq 0)\ ;$$

$$F_0\mathcal{M}^+_\lambda := V^+_\lambda\,,\quad F_{n+1}\mathcal{M}^+_\lambda := F_n\mathcal{M}^+_\lambda + F_n\mathcal{M}^+_\lambda\cdot\hat{\mathfrak{g}}_+ \ (n\geq 0)\,.$$

$n<0$ のときは，$F_n := 0$ とおく．このとき，次が成立する：

$$F_n\mathcal{M}_\lambda \subset F_{n+1}\mathcal{M}_\lambda\,,\quad \bigcup_n F_n\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda\,;$$

$$F_n\mathcal{M}^+_\lambda \subset F_{n+1}\mathcal{M}^+_\lambda\,,\quad \bigcup_n F_n\mathcal{M}^+_\lambda = \mathcal{M}^+_\lambda\,.$$

F_nは自然に$\mathcal{H}_\lambda, \mathcal{H}_\lambda^+$のfiltrationをinduceする(それらもF_nと表わす).

<u>Lemma 1.1</u>

$(\mathfrak{g}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_+)F_n\mathcal{M}_\lambda \subset F_n\mathcal{M}_\lambda$, $F_n\mathcal{M}_\lambda^+(\mathfrak{g}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_-) \subset F_n\mathcal{M}_\lambda^+$が成立する。$F_n\mathcal{H}_\lambda, F_n\mathcal{H}_\lambda^+$に対しても同様のことが成立する.

<u>Proof</u>

$(\mathfrak{g}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_+)F_n\mathcal{M}_\lambda \subset F_n\mathcal{M}_\lambda$を$n$についての帰納法で証明する. $n=0$のとき, $\mathcal{M}_\lambda$の定義より$(\mathfrak{g}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_+)V_\lambda \subset V_\lambda$だから成立することは明らか. $n\geq 0$まで成立すると仮定すると, $(\mathfrak{g}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_+)F_n\mathcal{M}_\lambda \subset F_n\mathcal{M}_\lambda$, $\hat{\mathfrak{g}}F_n\mathcal{M}_\lambda \subset F_{n+1}\mathcal{M}_\lambda$であるから, $(\mathfrak{g}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_+)\hat{\mathfrak{g}}_- \subset \hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{g}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_+)+\hat{\mathfrak{g}}$を使うと,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{g}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_+)F_{n+1}\mathcal{M}_\lambda &\subset (\mathfrak{g}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_+)F_n\mathcal{M}_\lambda + \hat{\mathfrak{g}}_-(\mathfrak{g}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_+)F_n\mathcal{M}_\lambda + \hat{\mathfrak{g}}F_n\mathcal{M}_\lambda \\ &\subset F_n\mathcal{M}_\lambda + \hat{\mathfrak{g}}_-F_n\mathcal{M}_\lambda + F_{n+1}\mathcal{M}_\lambda \\ &= F_{n+1}\mathcal{M}_\lambda.\end{aligned}$$

□

このsubsectionの内容については, 非常に読み易い教科書[KR]が便利である. 次のsubsectionのLemma 1.2は[Kac]のChapter 10に証明が書いてある.

§§1.3. Integrable highest weight $\hat{\mathfrak{g}}$-module について

$\hat{\mathfrak{g}}$-module $\mathcal{H}$ が integrable であるとは，任意の $\alpha\in\Delta$, $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $m\in\mathbb{Z}$, $v\in\mathcal{H}$ に対して，n を十分大きくすると $X_\alpha(m)^n v=0$ が成立することと定める．$\hat{\mathfrak{g}}$ の adjoint representation は integrable である．

Lemma 1.2

$\mathcal{H}$ は highest weight $(\ell,\lambda)\in\mathbb{C}\times\mathfrak{h}^*$ の highest weight left $\hat{\mathfrak{g}}$-module とする．このとき，以下の条件は互いに同値である：

(1.1a) $\mathcal{H}$ は integrable である．

(1.1b) $\mathcal{H}$ は simple $\hat{\mathfrak{g}}$-module でかつ $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\lambda\in P_\ell$.

(1.1c) $\mathcal{H}$ を生成する highest weight vector を v と表わすと，任意の $\alpha\in\Delta$, $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $m\in\mathbb{Z}$ に対して，n を十分大きくすると $X_\alpha(m)^n v=0$.

(1.1d) $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ かつ $\lambda\in P_\ell$ であり，

$$\mathcal{H}\simeq\mathcal{M}_{\ell,\lambda}/U(\hat{\mathfrak{g}})E_\theta(-1)^{\ell-(\theta|\lambda)+1}|\ell,\lambda\rangle.$$

もちろん，right $\hat{\mathfrak{g}}$-module についても同様なことが成立する．$\mathcal{H}^+$ が highest weight (ℓ,λ) の highest weight right $\hat{\mathfrak{g}}$-module のとき，条件 (1.1a, b, c) は全く同様であり，(1.1d) は次のようになる：

(1.1d)' $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ かつ $\lambda\in P_\ell$ であり，

$$\mathcal{H}^+\simeq\mathcal{M}^+_{\ell,\lambda}/\langle\ell,\lambda|F_\theta(1)^{\ell-(\theta|\lambda)+1}U(\hat{\mathfrak{g}})$$

なお，$E_\theta(-1)^{\ell-(\theta|\lambda)+1}|\ell,\lambda\rangle\in\mathcal{M}_{\ell,\lambda}$ (resp. $\langle\ell,\lambda|F_\theta(1)^{\ell-(\theta|\lambda)+1}\in\mathcal{M}^+_{\ell,\lambda}$) は，$\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda\in P_\ell$ のとき $\mathcal{M}_{\ell,\lambda}$ (resp. $\mathcal{M}^+_{\ell,\lambda}$) の singular vector になることを注意しておく。

§§1.4. Vector spaces の位相について

V と W は（無限次元かもしれない）vector spaces とする。$\{f_\lambda\}_{\lambda\in I}$ ($f_\lambda\in\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,W)$) に対して，$\sum_{\lambda\in I}f_\lambda$ が本質的に有限和であるとは，任意の $v\in V$ に対して，有限個の $\lambda\in I$ を除いて $f_\lambda(v)=0$ となることと定める。このとき，$\sum_{\lambda\in I}f_\lambda\in\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,W)$ が自然に定義される。以下に述べる場合以外は，本質的に有限和になるような和 $\sum_{\lambda\in I}f_\lambda$ 以外を考えないことにする。

$\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,\mathbb{C})$ には常に弱位相を入れて考える。つまり，点列 $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ ($\varphi_m\in\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,\mathbb{C})$) が $\varphi\in\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,\mathbb{C})$ に収束するとは，任意の $v\in V$ に対して $\mathbb{C}$ の自然な Euclid 位相について $\lim_{m\to\infty}\varphi_m(v)=\varphi(v)$ が成立することと定める。$\sum_{m=1}^\infty\varphi_m$ についても同様とする。また，$\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,\mathbb{C})$ 値函数 $f(z)$ が holomorphic (meromorphic, etc) であるとは，任意の $v\in V$ に対して $\mathbb{C}$ 値函数 $f(z;v)$ が holomorphic (meromorphic, etc) であることと定める。

$\mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}$ と $\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ の complete pairing により，

$$\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,\mathcal{H}_{\ell,\lambda})\subset\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(\mathcal{H}^+_{\ell,\lambda}\otimes V,\mathbb{C})$$

とみなせる．点列 $\{\Phi_m\}_{m=1}^{\infty}$ $(\Phi_m \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathcal{H}_{\ell,\lambda}))$ の収束は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{+}_{\ell,\lambda}\otimes V, \mathbb{C})$ の中で弱位相によって考える．もちろん $\{\Phi_m\}_{m=1}^{\infty}$ が収束しても収束先が $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathcal{H}_{\ell,\lambda})$ の中に含まれるとは限らない．$\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_m$ についても同様とする．

§§1.5. Virasoro algebra の Segal-Sugawara construction

$X, Y \in \mathfrak{g}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して normal product ${}^{\circ}_{\circ}X(m)Y(n){}^{\circ}_{\circ}$ を

$$
{}^{\circ}_{\circ}X(m)Y(n){}^{\circ}_{\circ} := \begin{cases} X(m)Y(n) & (m<n) \\ \frac{1}{2}\left(X(m)Y(m)+Y(m)X(m)\right) & (m=n) \\ Y(n)X(m) & (n<m) \end{cases}
$$

と定める．$\ell \in \mathbb{C}$, $\ell \neq -g$ とし，$\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^{+}$) は level ℓ の left (resp. right) $\hat{\mathfrak{g}}$-module であるとし次を仮定する：任意の $v \in \mathcal{H}$ (resp. $u \in \mathcal{H}^{+}$) に対して、十分 m を大きくすると，$X \in \mathfrak{g}$ に対して $X(m)v = 0$ (resp. $uX(-m) = 0$) が成立する．このとき，$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して，$\sum_{i\in\mathbb{Z}} {}^{\circ}_{\circ}X(i)Y(m-i){}^{\circ}_{\circ}$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}$ および $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}^{+}$ の中で本質的に有限和である．よって，$L^{\mathfrak{g}}_m \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}$ (resp. $L^{\mathfrak{g}}_m \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}^{+}$) を次のように定めることができる：

$$
L^{\mathfrak{g}}_m := \frac{1}{2(\ell+g)} \sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}} \sum_{i\in\mathbb{Z}} {}^{\circ}_{\circ}J^{p}(i)J^{p}(m-i){}^{\circ}_{\circ} .
$$

このとき,

$$c := \frac{l \dim \mathfrak{g}}{l + g}$$

とおき, $L_m \mapsto L_m^{\mathfrak{g}}$, $\hat{c} \mapsto c \cdot id$ によって $\mathcal{L}$ の $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^+$ への作用を定めることによって, $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^+$) の上に $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$ の left (resp. right) representation を定めることができる. $L_m^{\mathfrak{g}}$ $(m \in \mathbb{Z})$ のことを $(\hat{\mathfrak{g}}, l)$ の Segal-Sugawara operators と呼ぶ. $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^+$) は highest weight (l, λ) の highest weight left (resp. right) $\hat{\mathfrak{g}}$-module であるとする. このとき,

$$\Delta_{l,\lambda} := \frac{(\lambda | \lambda + 2\rho)}{2(l + g)}$$

とおくと, $L_m = L_m^{\mathfrak{g}}$ の $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^+$ への作用は

$$L_m |l, \lambda\rangle = 0 \quad (m > 0), \quad L_0 |l, \lambda\rangle = \Delta_{l,\lambda} |l, \lambda\rangle ;$$

$$\langle l, \lambda | L_m = 0 \quad (m < 0), \quad \langle l, \lambda | \quad = \Delta_{l,\lambda} \langle l, \lambda |$$

をみたすので, $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^+$) は highest weight left (resp. right) $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$-module とみなせる. ここで, $(\lambda | \lambda + 2\rho)$ は $\mathfrak{g}$ の Casimir operator $\sum_{p=1}^{\dim \mathfrak{g}} J^p J^p$ の V_λ 上での固有値に一致することを注意しておく.

以下, level $l \in \mathbb{C}$ $(l \neq -g)$ を固定し, l を省略して書くことにする. また, $L_m = L_m^{\mathfrak{g}}$ と書くことにする.

$\mathcal{H}_\lambda$ と $\mathcal{H}_\lambda^+$ は L_0 について固有分解される. つまり,

$$\mathcal{H}_\lambda(n) := \{ v \in \mathcal{H}_\lambda \mid L_0 v = (\Delta_\lambda + n) v \},$$

$$\mathcal{H}_\lambda^+(n) := \{ v \in \mathcal{H}_\lambda^+ \mid v L_0 = (\Delta_\lambda + n) v \} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくと次が成立する:

$$\mathcal{H}_\lambda(0) = V_\lambda, \quad \mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_\lambda(n),$$

$$\mathcal{H}_\lambda^+(0) = V_\lambda^+, \quad \mathcal{H}_\lambda^+ = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_\lambda^+(n).$$

$\mathcal{M}_\lambda$, $\mathcal{M}_\lambda^+$についても同様である．$\mathcal{H}_\lambda$と$\mathcal{H}_\lambda^+$の complete pairing $\langle | \rangle$は，$\mathcal{H}_\lambda(n)$と$\mathcal{H}_\lambda^+(n)$の complete pairingを induceする．特に，$\lambda \in P_+$のとき，$\mathcal{H}_\lambda(n)$と$\mathcal{H}_\lambda^+(n)$は有限次元になるので$\mathcal{H}_\lambda(n)$と$\mathcal{H}_\lambda^+(n)$は互いに相手の dual vector spaceと同一視できる．

$X \in \mathfrak{g}$に対する$X(\zeta)$と$T(\zeta)$を次のように定める：

$$X(\zeta) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \zeta^{-m-1} X(m), \quad T(\zeta) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \zeta^{-m-2} L_m.$$

$X(\zeta)$ $(X \in \mathfrak{g})$は current と呼ばれ，$T(\zeta)$は energy-momentum tensorと呼ばれる．$L_m = L_m^{\mathfrak{g}}$の定義式は形式的には次と同値である：

$$T(\zeta) = \frac{1}{2(\ell+g)} \sum_{p=1}^{\dim \mathfrak{g}} {}^\circ_\circ J^p(\zeta) J^p(\zeta) {}^\circ_\circ .$$

$X(\zeta)$ $(X \in \mathfrak{g})$, $T(\zeta)$のζは形式的に不定元と考えるかもしくは以下のように考える．まず，$u \in \mathcal{H}_\lambda^+$, $v \in \mathcal{H}_\lambda$に対して，

$$\langle u | X(\zeta) | v \rangle := \sum_m \zeta^{-m-1} \langle u | X(m) | v \rangle \quad (X \in \mathfrak{g})$$

は有限和になるから，$X(\zeta)$は$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\lambda^+ \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathbb{C})$-値の$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$上の holomorphic functionとみなせる．$T(\zeta)$についても同様である．$\mathcal{H}_\lambda$, $\mathcal{H}_\lambda^+$のかわりに$\mathcal{M}_\lambda$, $\mathcal{M}_\lambda^+$などでも同様である．また，$X, Y \in \mathfrak{g}$に対して，

$$\langle u | {}^\circ_\circ X(z) Y(\zeta) {}^\circ_\circ | v \rangle := \sum_{m,n} z^{-m-1} \zeta^{-n-1} \langle u | {}^\circ_\circ X(m) Y(n) {}^\circ_\circ | v \rangle$$

は有限和になるので，${}^\circ_\circ X(z) Y(\zeta) {}^\circ_\circ$は$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$上の$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\lambda^+ \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathbb{C})$-値正則函数とみなせる．さらに次の結果がその証明の考え方とともに§3で用いられる．

Lemma 1.3

$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上の $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\lambda^+ \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathbb{C})$ 値正則函数として次が成立する：

$$T(\zeta) = \frac{1}{2(l+g)} \lim_{z \searrow \zeta} \left\{ \sum_{p=1}^{\dim \mathfrak{g}} J^p(z) J^p(\zeta) - \frac{l \dim \mathfrak{g}}{(z-\zeta)^2} \right\}.$$

ここで，$z \searrow \zeta$ は ζ が z に $|z|>|\zeta|$ の条件のもとで近づくことを意味している．

Proof

$|z|>|\zeta|>0$ で $J^p(z)J^p(\zeta) := \sum_{m,n} z^{-m-1}\zeta^{-n-1} J^p(m)J^p(n)$ が $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\lambda^+ \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathbb{C})$ の中で収束し，次が成立することを示せば十分である：

$$J^p(z)J^p(\zeta) = {}^\circ_\circ J^p(z)J^p(\zeta){}^\circ_\circ + \frac{l}{(z-\zeta)^2} \quad (|z|>|\zeta|>0).$$

$u \in \mathcal{H}_\lambda^+$，$v \in \mathcal{H}_\lambda$ をとる．$[J^p(m), J^p(n)] = m\,\delta_{m+n,0}\, l$ より，$|\zeta|>|z|>0$ のとき，

$$\sum_{-M<m,n<M} z^{-m-1}\zeta^{-n-1} \langle u | J^p(m) J^p(n) | v \rangle$$

$$= \sum_{-M<m,n<M} z^{-m-1}\zeta^{-n-1} \langle u | {}^\circ_\circ J^p(m)J^p(n){}^\circ_\circ | v \rangle + \sum_{-M<n<m<M} z^{-m-1}\zeta^{-n-1} \langle u | m\,\delta_{m+n,0}\, \hat{l} | v \rangle$$

$$= \sum_{-M<m,n<M} z^{-m-1}\zeta^{-n-1} \langle u | {}^\circ_\circ J^p(m)J^p(n){}^\circ_\circ | v \rangle + \sum_{0<m<M} z^{-m-1} m \zeta^{m-1} l \langle u | v \rangle.$$

よって，$M \to \infty$ のとき，

$$\longrightarrow \langle u | {}^\circ_\circ J^p(z)J^p(\zeta){}^\circ_\circ | v \rangle + \frac{l}{(z-\zeta)^2} \langle u | v \rangle.$$

これで示すべきことが示せた．　$\square$.

§§1.6. その他の記号や述語について

複素平面上の閉曲線 $C=\{\zeta(t)\,|\,a\le t\le b\}$, $\zeta(a)=\zeta(b)$ に対して,

$$\oint_C d\zeta\, f(\zeta) \;:=\; \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_a^b dt\,\frac{d\zeta(t)}{dt}\,f(\zeta(t))$$

とおく. すなわち, contour integral $\oint_C$ は $(2\pi\sqrt{-1})^{-1}$ で正規化しておく.

また, $z\in\mathbb{C}$ に対して C_z は z を中心とする十分小さな半径をもつ円上を正の向きに1回転する径路とする;

$$C_z \;:=\{z+r\exp(\sqrt{-1}\,t)\,|\,0\le t\le 2\pi\} \quad (0<r<<\infty).$$

複素多様体 M 上の多価正則函数とは, M の universal covering $\widetilde{M}$ 上の(大域的)正則函数のこととする.

$\mathcal{A}$ は任意の algebra とし, V (resp. U) は left (resp. right) $\mathcal{A}$-module とする. $\Phi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U\otimes V,\mathbb{C})$, $u\in U$, $v\in V$ に対して,

$$\langle u|\Phi|v\rangle := \Phi(u\otimes v)\in\mathbb{C}$$

と書く. $a\in\mathcal{A}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U\otimes V,\mathbb{C})$ に右と左から自然に作用する. その作用は上の記号を用いると次のように書ける:

$$\Phi\mapsto\Phi a\;,\quad \langle u|\Phi a|v\rangle := \langle u|\Phi|av\rangle = \Phi(u\otimes(av))\;;$$

$$\Phi\mapsto a\Phi\;,\quad \langle u|a\Phi|v\rangle := \langle ua|\Phi v\rangle = \Phi((ua)\otimes v).$$

さらに, left $\mathcal{A}$-module $\mathcal{H}$ と right $\mathcal{A}$-module $\mathcal{H}^\dagger$ の間に,

$$\langle ua|v\rangle = \langle u|av\rangle \quad (u\in\mathcal{H}^\dagger,\, v\in\mathcal{H},\, a\in\mathcal{A})$$

をみたす pairing が定められているとき, $\Psi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathcal{H})$ に対して,

$$\langle u|\Psi|v\rangle := \langle u|\Psi v\rangle \quad (u\in\mathcal{H}^\dagger,\, v\in V,\ \text{よって}\ \Psi v\in\mathcal{H})$$

と書いて，$\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{+} \otimes V, \mathbb{C})$ とみなしたりする．このとき，

$$\langle ua|\Psi|v\rangle = \langle ua|\Psi v\rangle = \langle u|a\Psi v\rangle = \langle u|a\Psi|v\rangle$$

が成立するので，このように書いても矛盾が生じないことを注意しておく．

§2. Conformal block と chiral vertex operator の定義と基本性質

§§2.1. Conformal block の定義

以下, level ℓ は $-g$ 以外の任意の複素数とし固定する.

$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_N, \lambda_\infty \in \mathfrak{h}^*$ をとり, $z := (z_1, \cdots, z_N)$, $z_0 := 0$ とおく.

$\bigotimes_{a=0}^{N} \mathcal{H}_{\lambda_a}$ の中の第 a 成分 $\mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0 \le a \le N)$ への $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$ の作用を ρ_a と表わす. すなわち, $x \in U(\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L})$, $v_b \in \mathcal{H}_{\lambda_b}$ $(0 \le b \le N)$, $0 \le a \le N$ に対して,

$$\rho_a(x)\, v_N \otimes \cdots \otimes v_1 \otimes v_0 := v_N \otimes \cdots \otimes v_{a+1} \otimes (x v_a) \otimes v_{a-1} \otimes \cdots \otimes v_0 ,$$

$\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty}$ への $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$ の右作用を ρ_∞ と表わす. $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} \mathcal{H}_{\lambda_a}, \mathbb{C})$ と $v_\infty \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} v_a \in \mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} \mathcal{H}_{\lambda_a}$ に対して, 次のように表わす:

$$\langle v_\infty | \Phi | \bigotimes_{a=0}^{N} v_a \rangle = \langle v_\infty | \Phi | v_N \rangle \cdots | v_1 \rangle | v_0 \rangle := \Phi(v_\infty \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} v_a).$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} \mathcal{H}_{\lambda_a}, \mathbb{C})$ には, $x \in U(\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L})$ に対する $\rho_a(x)$ $(0 \le a \le N)$ が右から作用し, $\rho_\infty(x)$ が左から作用する. この作用を上の記号を使って表わすと次のようになる:

$$\Phi \mapsto \Phi \rho_a(x) \quad , \quad \langle v_\infty | \Phi \rho_a(x) | \bigotimes_{b=0}^{N} v_b \rangle := \langle v_\infty | \Phi | \rho_b(x) \bigotimes_{b=0}^{N} v_b \rangle ,$$

$$\Phi \mapsto \rho_\infty(x) \Phi \quad , \quad \langle v_\infty | \rho_\infty(x) \Phi | \bigotimes_{b=0}^{N} v_b \rangle := \langle v_\infty \rho_\infty(x) | \Phi | \bigotimes_{b=0}^{N} v_b \rangle .$$

$A(\zeta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \zeta^{-m-h} A_m$ は $X(\zeta)$ $(X \in \mathfrak{g})$ または $T(\zeta)$ とする. $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{b=0}^{N} \mathcal{H}_{\lambda_b}, \mathbb{C})$ に対して, $\rho_\infty(A(\zeta))\Phi$, $\Phi \rho_a(A(\zeta - z_a))$ $(0 \le a \le N)$ を次のように定める:

$$\rho_\infty(A(\zeta))\Phi := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \zeta^{-m-h} \rho_\infty(A_m) \Phi ,$$

$$\Phi \rho_a(A(\zeta-z_a)) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\zeta-z_a)^{-m-h}\, \Phi \rho_a(A_m) \quad (0\le a\le N).$$

もちろん，これらのLaurent級数の収束は弱収束として定義するが，収束するとは限らないことを注意しておく．

$M\subset\mathbb{C}^N$を次のように定める：

$$M := \{ z=(z_1,\cdots,z_N)\in\mathbb{C}^N \mid z_0=0,\ z_1,\cdots,z_N \text{ は互いに異なる} \}.$$

Definition 2.1

以上の記号のもとで，$\Phi(z)$がtype $(\lambda_\infty;\lambda_N\cdots\lambda_0)$のconformal blockであるとは以下が成立することと定める：

(2.1) $\Phi(z)$はM上の$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^+_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^N\mathcal{H}_{\lambda_a},\mathbb{C})$-値多価正則函数である．

(2.2) $A(\zeta)$は$X(\zeta)$ $(X\in\mathfrak{g})$または$T(\zeta)$であるとし，$z\in M$を固定する．このとき，$\rho_\infty(A(\zeta))\Phi(z)$は$|\zeta|$が十分大きいとき収束し，$\Phi(z)\rho_a(A(\zeta-z_a))$ $(0\le a\le N)$は$|\zeta-z_a|>0$が十分小さいとき収束する．さらに，$\rho_\infty(A(\zeta))\Phi(z)$，$\Phi(z)\rho_a(A(\zeta-z_a))$ $(0\le a\le N)$は$\{\zeta\in\mathbb{C} \mid \zeta\ne z_0,z_1,\cdots,z_N\}$の上の同一の$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^+_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^N\mathcal{H}_{\lambda_a},\mathbb{C})$-値(1価)正則函数に解析接続される．

(2.3) $1\le a\le N$に対して，$\Phi(z)\rho_a(L_{-1}) = \dfrac{\partial}{\partial z_a}\Phi(z)$.

条件(2.2)は少し使い難いので言い換えをしよう．

次が成立する：

条件(2.1)の仮定のもとで条件(2.2)と次の条件(2.4)は同値である．

(2.4) $(\{A_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, e)$ は $(\{X(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}, 0)$ $(X\in\mathfrak{g})$ または $(\{L_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, 1)$ であるとする。このとき，$z\in M$, $0\le a\le N$ に対して以下が成立する：

(2.4α) $$\rho_\infty(A_m)\Phi(z) = \Phi(z)\rho_0(A_m) + \sum_{1\le b\le N}\Phi(z)\left[\sum_{i\ge -e}\binom{m+e}{i+e}z_b^{m-i}\rho_b(A_i)\right],$$

(2.4β) $$\Phi(z)\rho_a(A_m) = \sum_{i\le m}\binom{m+e}{m-i}(-z_a)^{m-i}\rho_\infty(A_i)\Phi(z) - \sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}}\Phi(z)\left[\sum_{i\ge -e}\binom{m+e}{i+e}z_{ba}^{m-i}\rho_b(A_i)\right].$$

ここで，$z_0 := 0$, $z_{ba} := z_b - z_a$ であり，$\binom{T}{n}$ は2項係数である：

$$\binom{T}{n} := \frac{T(T-1)\cdots(T-n+1)}{n!}.$$

また，任意の $v\in\mathcal{H}_\lambda$, $u\in\mathcal{H}_\lambda^+$, $C_i\in\mathbb{C}$ $(i\in\mathbb{Z})$ に対して，$\sum_{i\ge -e}C_iA_iv$ および $\sum_{i\le m}vA_iC_i$ は有限和になるので (2.4α, β) の右辺は well-defined である.

<u>Proof of (2.2) ⇒ (2.4)</u>

$\rho_\infty(A(\zeta))\Phi(z)$, $\Phi(z)\rho_a(A(\zeta-z_a))$ $(0\le a\le N)$ を解析接続することによって定まる $\{\zeta\in\mathbb{C}\mid\zeta\ne z_a\ (0\le a\le N)\}$ 上の正則函数を $\alpha(\zeta)$ と表わすと，

$$\begin{aligned}\rho_\infty(A_m)\Phi(z) &= \oint_{C_\infty}d\zeta\,\zeta^{m+e}\alpha(\zeta) = \sum_{0\le b\le N}\oint_{C_b}d\zeta\,\zeta^{m+e}\alpha(\zeta)\\ &= \Phi(z)\rho_0(A_m) + \sum_{1\le b\le N}\oint_{C_b}d\zeta\sum_{i\ge -e}\binom{m+e}{i+e}(\zeta-z_b)^{i+e}z_b^{m-i}\Phi(z)\rho_b(A(\zeta-z_b))\\ &= \Phi(z)\rho_0(A_m) + \sum_{1\le b\le N}\sum_{i\ge -e}\binom{m+e}{i+e}z_b^{m-i}\Phi(z)\rho_b(A_i).\end{aligned}$$

ここで，$C_\infty := \{Re^{\sqrt{-1}\theta}\mid 0\le\theta\le 2\pi\}$ $(R>|z_a|, 0\le a\le N)$ であり，C_b $(0\le b\le N)$ は z_b を中心とする十分小さな円を正の向きに1回転する径路とする。上の計算には基本的に留数定理と $\alpha(\zeta)$ の定義以外は用いていない。これで，(2.4α) が示せた。以下のように，(2.4β) も同様にして示せる：

$$\Phi(z)\rho_a(A_m) = \oint_{C_a} d\zeta\,(\zeta-z_a)^{m+e}\alpha(\zeta) = \oint_{C_\infty} d\zeta\,(\zeta-z_a)^{m+e}\alpha(\zeta) - \sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}} \oint_{C_b} d\zeta\,(\zeta-z_b)^{m+e}\alpha(\zeta)$$

$$= \oint_{C_\infty} d\zeta \sum_{i\le m} \binom{m+e}{m-i} \zeta^{i+e}(-z_a)^{m-i}\rho_\infty(A(\zeta))\Phi(z)$$

$$- \sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}} \oint_{C_b} d\zeta \sum_{i\ge -e} \binom{m+e}{i+e}(\zeta-z_b)^{i+e} z_{ba}^{m-i}\,\Phi(z)\rho_b(A(\zeta-z_b))$$

$$= (2.4\beta)\text{の右辺}. \qquad \square.$$

Proof of $(2.4) \Rightarrow (2.2)$

(2.4α) より次が成立する：

$$\sum_{|m|<M} \zeta^{-m-e-1}\rho_\infty(A_m)\Phi(z) = \sum_{-M<m<-e} \zeta^{-m-e-1}\rho_\infty(A_m)\Phi(z) + \Phi(z)\sum_{-e\le m<M}\zeta^{-m-e-1}\rho_0(A_m)$$

$$+ \sum_{1\le b\le N}\Phi(z)\left[\sum_{i\ge -e}\left\{\sum_{-e\le m<M}\binom{m+e}{i+e}\zeta^{-m-e-1}z_b^{m-i}\right\}\rho_b(A_i)\right].$$

そして，$|\zeta|>|w|$ のとき，

$$\sum_{m\ge -e}\binom{m+e}{i+e}\zeta^{-m-e-1}w^{m-i} = \frac{1}{(i+e)!}\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^{i+e}\sum_{n\ge 0}\zeta^{-n-1}w^n = (\zeta-w)^{-i-e-1}$$

が成立するので，上の式の右辺は $|\zeta|>|z_b|$ $(1\le b\le N)$ のとき，$M\to\infty$ で

$$(2.5)\qquad \sum_{m<-e}\zeta^{-m-e-1}\rho_\infty(A_m)\Phi(z) + \sum_{0\le b\le N}\Phi(z)\left[\sum_{m\ge -e}(\zeta-z_b)^{-m-e-1}\rho_b(A_m)\right]$$

に収束する．(2.5) は $\{\zeta\in\mathbb{C}\,|\,\zeta\ne z_a\ (0\le a\le N)\}$ 上で正則である．また，(2.4β) より，

$$\sum_{|m|<M}(\zeta-z_a)^{-m-e-1}\Phi(z)\rho_a(A_m)$$

$$= \Phi(z)\sum_{-e\le m<M}(\zeta-z_a)^{-m-e-1}\rho_a(A_m) + \sum_{i<-e}\left\{\sum_{\substack{i\le m<-e\\ |m|<M}}\binom{m+e}{m-i}(\zeta-z_a)^{-m-e-1}(-z_a)^{m-i}\right\}\rho_\infty(A_i)\Phi(z)$$

$$- \sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}}\Phi(z)\left[\sum_{i\ge -e}\left\{\sum_{-M<m<-e}\binom{m+e}{i+e}(\zeta-z_a)^{-m-e-1}z_{ba}^{m-i}\right\}\rho_b(A_i)\right]$$

が成立する．$i<-e$ のとき，

$$\sum_{i\le m<-e}\binom{m+e}{m-i}(\zeta-z_a)^{-m-e-1}(-z_a)^{m-i}=\sum_{0\le n\le -i-e-1}\frac{z_a^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n(\zeta-z_a)^{-i-e-1}=\zeta^{-i-e-1}$$

であり，$i\geq -e$ かつ $0<|\zeta-z_a|<|z_{ba}|$ $(b\neq a)$ のとき，

$$\sum_{m<-e}\binom{m+e}{i+e}(\zeta-z_a)^{-m-e-1}z_{ba}^{m-i}=\frac{1}{(i+e)!}\left(\frac{\partial}{\partial z_b}\right)^{i+e}\sum_{n<0}(\zeta-z_a)^{-n-1}z_{ba}^{n}=(\zeta-z_b)^{-i-e-1}$$

であるから，$0<|\zeta-z_a|<|z_{ba}|$ $(b\neq a)$ のとき上の式の右辺も $M\to\infty$ で (2.5) に収束する． 以上によって (2.2) が示せた． □.

この証明より，$\Phi(z)$ が conformal block のとき，$A(\zeta)$ を $X(\zeta)$ $(X\in\mathfrak{g})$ または $T(\zeta)$ とすると $z\in M$ に対して，$\rho_\infty(A(\zeta))\Phi(z)$ は $\{\zeta\in\mathbb{C}\mid|\zeta|>|z_a|\ (1\le a\le N)\}$ 上で (2.5) に収束し，$\Phi(z)\rho_a(A(\zeta))$ は $\{\zeta\in\mathbb{C}\mid 0<|\zeta-z_a|<|z_{ba}|\ (0\le b\le N,\ b\neq a)\}$ 上で (2.5) に収束することがわかる．

§§2.2. Conformal block の $V_{\lambda_\infty}^{+}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}V_{\lambda_a}$ の上への制限

以下，$\Phi(z)$ は type $(\lambda_\infty;\lambda_N\cdots\lambda_0)$ の conformal block であるとし，$\Phi(z)$ の $V_{\lambda_\infty}^{+}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}V_{\lambda_a}$ の上への制限を $F(z)$ と表わす：

$$F(z):=\Phi(z)\Big|_{V_{\lambda_\infty}^{+}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}V_{\lambda_a}}.$$

この subsection では $\Phi(z)$ が $F(z)$ から一意に決定されることと，$F(z)$ のみたす

“基本的な”方程式について説明する。

Lemma 2.2

$\Phi(z)$ は $F(z)=\Phi(z)\big|_{\mathcal{V}^{+}_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}\mathcal{V}_a}$ から一意に決定される。

Proof

§§1.2 で定めた $\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty}$, $\mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0\le a\le N)$ の filtration F_n についての帰納法を用いる。(2.4) より, $X\in\mathfrak{g}$, $m\in\mathbb{Z}$, $v_\infty\in F^{(\infty)}_{n_\infty}:=F_{n_\infty}\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty}$, $v_a\in F^{(a)}_{n_a}:=F_{n_a}\mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0\le a\le N)$ に対して，以下が成立する：

$$(\alpha)\quad \langle v_\infty X(m)|\Phi(z)|\bigotimes_{a=0}^{N}v_a\rangle=\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|v_1\rangle|X(m)v_0\rangle$$
$$+\sum_{1\le b\le N}\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots\Big|\sum_{i\ge 0}\binom{m}{i}z_b^{m-i}X(i)v_b\rangle\cdots|v_1\rangle|v_0\rangle,$$

$$(\beta)\quad \langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|v_{a+1}\rangle|X(m)v_a\rangle|v_{a-1}\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$=\Big\langle\sum_{i\le m}\binom{m}{m-i}(-z_a)^{m-i}v_\infty X(i)\Big|\Phi(z)\Big|\bigotimes_{a=0}^{N}v_a\Big\rangle$$
$$-\sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}}\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots\Big|\sum_{i\ge 0}\binom{m}{i}z_{ba}^{m-i}X(i)v_b\rangle\cdots|v_0\rangle.$$

$m>0$ の場合の (α) と Lemma 1.1 より, $\Phi(z)\big|_{F^{(\infty)}_{n_\infty+1}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}F^{(a)}_{n_a}}$ は $\Phi(z)\big|_{F^{(\infty)}_{n_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}F^{(a)}_{n_a}}$ から一意に決まることがわかる。また，$m<0$ の場合の (β) と Lemma 1.1 より, $\Phi(z)\big|_{F^{(\infty)}_{n_\infty}\otimes F^{(N)}_{n_N}\otimes\cdots\otimes F^{(a)}_{n_a+1}\otimes\cdots\otimes F^{(0)}_{n_0}}$ は $\Phi(z)\big|_{F^{(\infty)}_{n_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}F^{(a)}_{n_a}}$ から一意に決まることがわかる。したがって，$F(z)$ から $\Phi(z)$ が一意に決定されることがわかる。 $\square$

この証明より, $\langle v_\infty|\Phi(z)|\bigotimes_{a=0}^{\infty}v_a\rangle$ $(v_\infty\in\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty}, v_a\in\mathcal{H}_{\lambda_a})$ は (α), (β) を有限回用いることによって $F(z)$ から具体的に計算されることを注意しておく。

$F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{+}_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, \mathbb{C})$ が $\mathfrak{g}$-invariant であるとは，

$$\rho_\infty(X) F = \sum_{a=0}^{N} F \rho_a(X) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

が成立することと定め，その全体を $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^{+}_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, \mathbb{C})$ と表わす．$V^{+}_{\lambda_\infty}$ と V_{λ_∞} の自然な pairing によって，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^{+}_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty})$ とみなせる．

$z_0 := 0$，$z_{ab} := z_a - z_b$ とおき，Ω_{ab} を次のように定める：

$$\Omega_{ab} := \frac{1}{\ell + g} \sum_{p=1}^{\dim \mathfrak{g}} \rho_a(J^p) \rho_b(J^p) \quad (0 \le a, b \le N),$$

この Ω_{ab} は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty})$ に自然に右から作用する．

<u>Lemma 2.3</u> ([KZ], [GW], [TK1])

$F(z) = \Phi(z)|_{V^{+}_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}}$ は以下の (2.6), (2.7) をみたし，さらに，level ℓ が $\ell \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，$\ell \ne -g$ をみたし $\lambda_0, \cdots, \lambda_N, \lambda_\infty \in P_\ell$ ならば (2.8) もみたす：

(2.6) $F(z)$ は M 上の $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^{+}_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, \mathbb{C})$-値多価正則函数である．

(2.7) $F(z)$ は次の微分方程式をみたす：

$$\frac{\partial}{\partial z_a} F(z) = F(z) \left[\sum_{\substack{0 \le b \le N \\ b \ne a}} \frac{\Omega_{ab}}{z_{ab}} \right] \quad (1 \le a \le N).$$

この方程式は Knizhnik-Zamolodchikov equation (略して KZ equation) と呼ばれる．

(2.8) $L_a := \ell - (\theta|\lambda_a) + 1 \ (a = 0, \cdots, N, \infty)$ とおくと，$v_b \in V_{\lambda_b} (0 \le b \le N)$，$v_\infty \in V^{+}_{\lambda_\infty}$ に対して，

$$\langle v_\infty | F(z) \left(\sum_{\substack{0 \le b \le N \\ b \ne a}} \frac{\rho_b(E_\theta)}{z_{ab}} \right)^{L_a} |v_N\rangle \cdots |v_{a+1}\rangle |\lambda_a\rangle |v_{a-1}\rangle \cdots |v_0\rangle = 0 \quad (0 \le a \le N),$$

$$\langle \lambda_\infty | F(z) \left(\sum_{1 \le b \le N} z_b \rho_b(F_\theta) \right)^{L_\infty} |v_N\rangle \cdots |v_1\rangle |v_0\rangle = 0.$$

もちろん，ここで $|\lambda_a\rangle$ は V_{λ_a} の highest weight vector であり，$\langle \lambda_\infty|$ は $V^{+}_{\lambda_\infty}$ の highest weight vector である．

Proof

(2.6)： $X\in\mathfrak{g}$ に対して $X=X(0)$ であり，(2.4α) より $\rho_\infty(X(0))\Phi(z)=\sum_{0\le b\le N}\Phi(z)\rho_b(X(0))$

であるから，$\Phi(z)$ 自身が $\mathfrak{g}$-invariant である．よって，(2.6) が成立する．

(2.7)： (2.3) より，$\Phi(z)\rho_a(L_{-1})=\frac{\partial}{\partial z_a}\Phi(z)$．$v_\infty\in V^{+}_{\lambda_\infty}$, $v_a\in V_{\lambda_a}$ $(0\le a\le N)$ をとる．

このとき，$L_{-1}=L^{\mathfrak{g}}_{-1}$ の定義より，

$$L_{-1}v_a=\frac{1}{\ell+g}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}}J^p(-1)J^p v_a \quad (0\le a\le N).$$

(2.4β) より，$X\in\mathfrak{g}$ に対して，

$$(*)\qquad \langle v_\infty|\Phi(z)\rho_a(X(-1))|\bigotimes_{b=0}^{N}v_b\rangle=\sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}}z_{ab}^{-1}\langle v_\infty|\Phi(z)\rho_b(X)|\bigotimes_{d=0}^{N}v_d\rangle \quad (X\in\mathfrak{g}).$$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_a}\langle v_\infty|\Phi(z)|\bigotimes_{b=0}^{N}v_b\rangle&=\frac{1}{\ell+g}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}}\langle v_\infty|\Phi(z)\rho_a(J^p(-1))\rho_a(J^p)|\bigotimes_{b=0}^{N}v_b\rangle\\&=\frac{1}{\ell+g}\sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}}z_{ab}^{-1}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}}\langle v_\infty|\Phi(z)\rho_b(J^p)\rho_a(J^p)|\bigotimes_{d=0}^{N}v_d\rangle.\end{aligned}$$

これを，$F(z)$, Ω_{ab} を使って書き直すと (2.7) が出る．

(2.8)： $\ell\in\mathbb{Z}_{\ge0}$, $\lambda_a\in P_\ell$ $(0\le a\le N)$, $\lambda_\infty\in P_\ell$ であるから，Lemma 1.2 より，

$\mathcal{H}_{\lambda_a}$ の中で $E_\theta(-1)^{L_a}|\lambda_a\rangle=0$，$\mathcal{H}^{+}_{\lambda_\infty}$ の中で $\langle\lambda_\infty|F_\theta(1)^{L_\infty}=0$．よって，(*)

より，$v_\infty\in V^{+}_{\lambda_\infty}$, $v_a\in V_{\lambda_a}$ $(0\le a\le N)$ に対して，

$$\begin{aligned}0&=\langle v_\infty|\Phi(z)\rho_a(E_\theta(-1))^{L_a}|v_N\rangle\cdots|v_{a+1}\rangle|\lambda_a\rangle|v_{a-1}\rangle\cdots|v_0\rangle\\&=\langle v_\infty|\Phi(z)\Big(\sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}}z_{ab}^{-1}\rho_b(E_\theta)\Big)^{L_a}|v_N\rangle\cdots|v_{a+1}\rangle|\lambda_a\rangle|v_{a-1}\rangle\cdots|v_0\rangle.\end{aligned}$$

これで，(2.8) のはじめの式は示せた．後者の式も次を使えば同様にして示せる：

$$(**)\qquad \langle v_\infty|\rho_\infty(X(1))\Phi(z)|\bigotimes_{b=0}^{N}v_b\rangle=\sum_{1\le b\le N}z_b\langle v_\infty|\Phi(z)\rho_b(X)|\bigotimes_{d=0}^{N}v_d\rangle \quad (X\in\mathfrak{g}).\ \square.$$

Ω_{ab} は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty})$ に右から作用するので，KZ equation (2.6) は M上の trivial vector bundle $M \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty})$ の connection ω を定める．ω の具体的な形は，$\Omega_{ab} = \Omega_{ba}$ に注意すると，

$$\omega = \sum_{\substack{0 \le a, b \le N \\ a \ne b}} \frac{\Omega_{ab}}{z_{ab}} dz_a = \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \le a, b \le N \\ a \ne b}} \Omega_{ab} \, d\log z_{ab} \tag{2.9}$$

となり，KZ equation (2.7) は次の方程式と同値である：

$$dF(z) = F(z)\omega . \tag{2.10}$$

上の ω のような形の connection が integrable (i.e. $d\omega + \omega \wedge \omega = \omega \wedge \omega = 0$) になるための必要十分条件は，次の infinitesimal pure braid relation が成立することである：

$$\begin{aligned} &[\Omega_{ab}, \Omega_{ac} + \Omega_{bc}] = 0 \quad &(a, b, c \text{ が互いに異なるとき}), \\ &[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = 0 \quad &(a, b, c, d \text{ が互いに異なるとき}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

KZ equation における Ω_{ab} は この条件(2.11) をみたすので，KZ equation は completely integrable である．以上のことを Lemma としてまとめておく．

Lemma 2.4

KZ equation (2.7) は completely integrable であり，trivial vector bundle $M \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty})$ の integrable connection を定める．

KZ equation における Ω_{ab} が (2.11) をみたすことを示すには，以下のようにすればよい．まず，Ω_{ab} の定義より (2.11) の後者が成立することは明らか

である．$C\in U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の Casimir element とし，$T\in U(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ を次のようにおく：

$$C := \sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}} J^p J^p \ , \quad T := \sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}} J^p \otimes J^p .$$

$[C, U(\mathfrak{g})]=0$ が成立する．$\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ は $U(\mathfrak{g})$ の coproduct とする．すなわち，Δ は $\Delta(X)=X\otimes 1+1\otimes X$ $(X\in\mathfrak{g})$ によって一意に特徴づけられる $U(\mathfrak{g})$ から $U(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ への algebra homomorphism とする．このとき，$\Delta(C)=\sum_p (J^p\otimes 1+1\otimes J^p)^2$ が成立することより，

$$T=\frac{1}{2}\{\Delta(C)-C\otimes 1-1\otimes C\} \tag{2.12}$$

が成立することがわかる．よって，$X\in\mathfrak{g}$ に対して，

$$\begin{aligned}[T,\Delta(X)] &= \frac{1}{2}[\Delta(C),\Delta(X)]-\frac{1}{2}[C\otimes 1+1\otimes C, X\otimes 1+1\otimes X] \\ &= \frac{1}{2}\Delta([C,X])-\frac{1}{2}[C,X]\otimes 1-\frac{1}{2}1\otimes[C,X] \\ &= 0 .\end{aligned}$$

したがって，$T_{12}:=T\otimes 1$，$T_{23}:=1\otimes T$，$T_{13}:=\sum_p J^p\otimes 1\otimes J^p$ とおくと，

$$[T_{12}, T_{13}+T_{23}] = [T\otimes 1, \sum_p \Delta(J^p)\otimes J^p] = \sum_p [T,\Delta(J^p)]\otimes J^p = 0 .$$

これより，(2.11) の前者の式が証明される．

§§2.3. Chiral vertex operator の定義と基本性質

$\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{h}^*$ とする.

Definition 2.5

$\Phi(z)$ が type $(\nu; \mu\lambda)$ の conformal block のとき, $\Phi(z)$ は chiral vertex operator と呼ばれる. このとき, $z = z_1$ である.

以下, $\Phi(z)$ は type $(\nu; \mu\lambda)$ の chiral vertex operator とする. このとき, $v_\infty \in \mathcal{H}^\dagger_{\lambda_\infty}$, $v_a \in \mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(a = 0, 1)$ に対して,

$$\langle v_\infty | \Phi(z; v_1) | v_0 \rangle := \langle v_\infty | \Phi(z) | v_1 \rangle | v_0 \rangle$$

と書いて, $\Phi(z; v_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^\dagger_{\lambda_\infty} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_0}, \mathbb{C})$ とみなすことがある. さらに, $x \in U(\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L})$ に対して, $x\Phi(z; v_1)$, $\Phi(z; v_1)x$, $[x, \Phi(z; v_1)] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^\dagger_{\lambda_\infty} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_0}, \mathbb{C})$ を

$$\langle v_\infty | x \Phi(z; v_1) | v_0 \rangle := \langle v_\infty x | \Phi(z; v_1) | v_0 \rangle,$$

$$\langle v_\infty | \Phi(z; v_1) x | v_0 \rangle := \langle v_\infty | \Phi(z; v_1) | x v_0 \rangle,$$

$$[x, \Phi(z; v_1)] := x\Phi(z; v_1) - \Phi(z; v_1) x$$

と定める. これらの記号は次の section (§3) で多用される.

$F(z) := \Phi(z)|_{V^\dagger_\nu \otimes V_\mu \otimes V_\lambda}$ とおく. Lemma 2.2 より, $\Phi(z)$ は $F(z)$ から一意に決定される. さらに, chiral vertex operator に対しては Lemma 2.3 より次が成立する.

<u>Lemma 2.6</u>

以上の記号のもとで以下が成立する：

(2.12) $\varphi^{k}_{ji} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{H}^{+}_{\nu}(k)\otimes\mathcal{H}_{\mu}(j)\otimes\mathcal{H}_{\lambda}(i),\mathbb{C})$ $(i,j,k\geq 0)$ が存在して，

$$\Phi(z)\big|_{\mathcal{H}^{+}_{\nu}(k)\otimes\mathcal{H}_{\mu}(j)\otimes\mathcal{H}_{\lambda}(i)} = z^{(\Delta_\nu+k)-(\Delta_\mu+j)-(\Delta_\lambda+i)}\,\varphi^{k}_{ji}\ .$$

特に，$\varphi := \varphi^{0}_{00} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^{+}_{\nu}\otimes V_{\mu}\otimes V_{\lambda},\mathbb{C})$ とおくと，

$$F(z) = z^{\Delta_\nu-\Delta_\mu-\Delta_\lambda}\,\varphi\ .$$

(2.13) level ℓ は $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\ell\neq -g$ をみたし，$\lambda,\mu,\nu\in P_{\ell}$ とする．このとき，上の φ は以下をみたす：

$$\varphi\,\big|\,V^{+}_{\nu}\otimes(E_{\theta}^{\ell-(\theta|\lambda)+1}V_{\mu})\otimes|\lambda\rangle = 0\,,$$

$$\varphi\,\big|\,V^{+}_{\nu}\otimes|\mu\rangle\otimes(E_{\theta}^{\ell-(\theta|\mu)+1}V_{\lambda}) = 0\,,$$

$$\varphi\,\big|\,\langle\nu|\otimes(F_{\theta}^{\ell-(\theta|\nu)+1}V_{\mu})\otimes V_{\lambda} = 0\,.$$

<u>Proof</u>

(2.12)：　(2.6)の証明より $\Phi(z)$ は $\mathfrak{g}$-invariant である．(2.3)と(2.4)より

$$z\frac{d}{dz}\Phi(z) = \rho_{\infty}(L_0)\Phi(z) - \Phi(z)\rho_1(L_0) - \Phi(z)\rho_0(L_0)$$

が成立することがわかる．よって，$\mathcal{H}_{\lambda}(i)$, $\mathcal{H}_{\mu}(j)$, $\mathcal{H}^{+}_{\nu}(k)$ の定義より，(2.12) が成立することがすぐわかる．

(2.13)：　(2.8)よりすぐ出る．　$\square$.

Remark 2.7

$k \geq 0$, $\sigma \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $\mathcal{H}_\nu(k,\sigma) := \{v \in \mathcal{H}_\lambda(k) \mid Hv = \sigma(H)v \ (H \in \mathfrak{h})\}$, $\mathcal{H}_\nu^+(k,\sigma) := \{v \in \mathcal{H}_\nu^+(k) \mid vH = \sigma(H)v \ (H \in \mathfrak{h})\}$ とおくと,

$$\mathcal{H}_\nu(k) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{h}^*} \mathcal{H}_\nu(k,\sigma), \quad \dim \mathcal{H}_\nu(k,\sigma) < \infty \quad (\sigma \in \mathfrak{h}^*),$$
$$\mathcal{H}_\nu^+(k) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{h}^*} \mathcal{H}_\nu^+(k,\sigma), \quad \dim \mathcal{H}_\nu^+(k,\sigma) < \infty \quad (\sigma \in \mathfrak{h}^*)$$

が成立する. $\mathcal{H}_\nu^+$ と $\mathcal{H}_\nu$ の complete pairing $\langle \mid \rangle$ によって $\mathcal{H}_\nu^+(k,\sigma)$ は $\mathcal{H}_\nu(k,\sigma)$ の dual vector space と同一視される. したがって, 自然に

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{H}_\nu^+(k) \otimes \mathcal{H}_\mu(j) \otimes \mathcal{H}_\lambda(i), \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{H}_\mu(j) \otimes \mathcal{H}_\lambda(i), \mathcal{H}_\nu(k))$$

とみなせる. よって, (2.12) の記号において,

$$\Phi_m := \bigoplus_{i+j-k=m} \varphi_{ji}^{k} \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

とおくと, $\Phi_m \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{H}_\mu \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathcal{H}_\nu)$ とみなせ 以下が成立する:

(2.14) $$\Phi(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-\Delta_\lambda-\Delta_\mu-\Delta_\nu} \Phi_m,$$

(2.15) $$\Phi_m(\mathcal{H}_\mu(j) \otimes \mathcal{H}_\lambda(i)) \subset \mathcal{H}_\nu(i+j-m).$$

§3. Chiral vertex operator の構成

§§3.1. $\mathcal{M}_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda$ 上での構成

以下，level ℓ は $-g$ 以外の任意の複素数として固定する．$\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{h}^*$ とする．

$\Phi(z)$ が type $(\nu;\mu\lambda)$ の chiral vertex operator のとき，$v \in V_\mu$ に対して，
$\Phi(z;v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\nu^+ \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathbb{C})$ $(z \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\})$ は (2.4) より以下をみたす：

(3.1) $\quad [X(m), \Phi(z;v)] = \Phi(z; z^m X v) \quad (X \in \mathfrak{g},\ m \in \mathbb{Z},\ v \in V_\mu),$

(3.2) $\quad [L_m, \Phi(z;v)] = z^m\left(z\dfrac{d}{dz} + (m+1)\Delta_\mu\right)\Phi(z;v) \quad (m \in \mathbb{Z},\ v \in V_\mu).$

そして，(2.12) より，ある $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes V_\lambda, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu \otimes V_\lambda, V_\nu)$ があって

(3.3) $\quad \Phi(z)\big|_{V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes V_\lambda} = z^{-\Delta_\lambda - \Delta_\mu + \Delta_\nu}\varphi$

が成立する．

<u>Lemma 3.1</u>

任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes V_\lambda, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu \otimes V_\lambda, V_\nu)$ に対して，
$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上の $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$-値多価正則函数 $\Psi(z)$ で，
(3.1), (3.2), (3.3) をみたすものが唯一存在する．

<u>Proof</u>

段階に分けて証明しよう．

Step 1: $G(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$ が 以下の (1), (2) および

$$G(z)|_{V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes V_\lambda} = 0$$

をみたすとき $G(z)=0$ となることを示す:

(1) $X \in \mathfrak{g}$, $m<0$, $u \in \mathcal{M}_\lambda$, $v \in V_\mu$, $w \in V_\nu^+$ に対して 以下の (*) が成立する.

(2) $X \in \mathfrak{g}$, $m>0$, $u \in \mathcal{M}_\lambda$, $v \in V_\mu$, $w \in \mathcal{M}_\nu^+$ に対して 以下の (*) が成立する.

(*) $$\langle w| [X(m), G(z;v)] |u\rangle = \langle w| G(z; z^m Xv) |u\rangle .$$

まず, Nについての帰納法によって, $G(z)|_{V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes F_N \mathcal{M}_\lambda} = 0$ を示す. $N=0$ のときは $F_0\mathcal{M}_\lambda = V_\lambda$ より明らか. Nまで成立すると仮定すると, $X \in \mathfrak{g}$, $m<0$, $u \in F_N\mathcal{M}_\lambda$, $v \in V_\mu$, $w \in V_\nu^+$ に対して, (1) と $wX(m)=0$ より,

$$\langle w| G(z;v) X(m) |u\rangle = -\langle w| G(z; z^m Xv) |u\rangle = 0.$$

よって, $N+1$ の場合も成立する. したがって, $G(z)|_{V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda} = 0$ である. 次に, Nについての帰納法によって, $G(z)|_{F_N\mathcal{M}^+ \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda} = 0$ を示す. $N=0$ の場合はすでに示した. Nまで成立すると仮定すると, $X \in \mathfrak{g}$, $m>0$, $u \in \mathcal{M}_\lambda$, $v \in V_\mu$, $w \in F_N\mathcal{M}_\nu^+$ に対して, (2) と $X(m)u \in \mathcal{M}_\lambda$ より,

$$\langle w| X(m) G(z;v) |u\rangle = \langle w| G(z;v) X(m) |u\rangle + \langle w| G(z; z^m Xv) |u\rangle = 0.$$

よって, $N+1$ の場合も成立する. これで, $G(z)=0$ が示せたことになる.

この Step 1 より $\Phi(z)$ の一意性は明らか. 以下, 存在を示す.

Step 2: $T_\pm := T(\hat{\mathfrak{g}}_\pm)$ は $\hat{\mathfrak{g}}_\pm$ から生成される tensor algebra とする. $x, y \in T_\pm$ に対して, $[x \overset{\otimes}{,} y] := x \otimes y - y \otimes x$ とおく. $T_\pm$ に filtration F_n を次のように入れる:

$$F_N \mathcal{T}_\pm := \bigoplus_{k=0}^{N} (\hat{\mathfrak{g}}_\pm)^{\otimes k} \quad (N=0,1,2,\cdots).$$

このとき，自然な surjective algebra homomorphism $\mathcal{T}_\pm \to U(\hat{\mathfrak{g}}_\pm)$ が存在して，$\mathcal{T}_+ \to U(\hat{\mathfrak{g}}_+)$ (resp. $\mathcal{T}_- \to U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$) の kernel は $\mathcal{T}_+$ (resp. $\mathcal{T}_-$) の two-sided idealとして，

$$[X(m) \underset{,}{\otimes} Y(n)] - [X,Y](m+n) \quad , \; X, Y \in \mathfrak{g} \; , \; m, n > 0 \quad (\text{resp. } m, n < 0)$$

から生成される．$\mathcal{T}_\pm \to U(\hat{\mathfrak{g}}_\pm)$ は自然な surjection $\mathcal{T}_- \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V_\lambda \to \mathcal{M}_\lambda$，$V_\nu^+ \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{T}_+ \to \mathcal{M}_\nu^+$ を induce する．$\mathcal{T}_\pm$ の filtration F_N が induce する $\mathcal{T}_- \otimes V_\lambda$，$V_\nu^+ \otimes \mathcal{T}_+$ の filtration も F_N と表わし，$\mathcal{T}_\pm$ の filtration F_N が induce する $\mathcal{M}_\lambda$，$\mathcal{M}_\nu^+$ の filtration は §§1.2 で定めた filtration F_N に一致する．

Step 3: $\mathbb{C}^\times$ 上の $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$-値多価正則函数 $\Psi(z)$ で，(3.3), (1), (2) をみたすものが存在することを示す．

まず，$\tilde{\Psi}_1(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes (\mathcal{T}_- \otimes V_\lambda), \mathbb{C})$ を $\mathcal{T}_-$ の filtration による帰納法によって次のように定める：$V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes V_\lambda = V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes (F_0 \mathcal{T}_- \otimes V_\lambda)$ 上において，

$$\langle w | \tilde{\Psi}_1(z; v) | u \rangle := z^{-\Delta_\lambda - \Delta_\mu + \Delta_\nu} \varphi(w \otimes v \otimes u) \quad (u \in V_\lambda, v \in V_\mu, w \in V_\nu^+)$$

と定め，$V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes (F_N \mathcal{T}_- \otimes V_\lambda)$ 上まで定まったとき，$V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes (F_{N+1} \mathcal{T}_- \otimes V_\lambda)$ 上の値を

$$\langle w | \tilde{\Psi}_1(z; v) | X(m) \otimes u \rangle := -\langle w | \tilde{\Psi}_1(z; z^m X v) | u \rangle$$
$$(u \in F_N \mathcal{T}_- \otimes V_\lambda, \; X \in \mathfrak{g}, \; m < 0, \; v \in V_\mu, \; w \in V_\nu^+)$$

と定める．このとき，$u \in \mathcal{T}_- \otimes V_\lambda$，$v \in V_\mu$，$w \in V_\nu^+$，$X, Y \in \mathfrak{g}$，$m, n < 0$ に対して，

$$\langle w | \tilde{\Psi}_1(z; v) | [X(m) \underset{,}{\otimes} Y(n)] \otimes u \rangle - \langle w | \tilde{\Psi}_1(z; v) | [X,Y](m+n) \otimes u \rangle$$
$$= \langle w | \tilde{\Psi}_1(z; z^{m+n} [Y,X] v) | u \rangle + \langle w | \tilde{\Psi}_1(z; z^{m+n} [X,Y] v) | u \rangle = 0$$

が成立する．さらに，filtrationによる帰納法により，$a \in \mathfrak{J}_-$ に対して，

$$\langle w | \tilde{\Psi}_1(z;v) | a \otimes ([X(m) \underset{,}{\otimes} Y(n)] - [X,Y](m+n)) \otimes u \rangle = 0$$

が成立することがわかる．よって，$\tilde{\Psi}_1(z)$ は $\Psi_1(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$ をinduceする．この $\Psi_1(z)$ は(3.3)と(1)をみたす．

次に，$\tilde{\Psi}_2(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((V_\nu^+ \otimes \mathfrak{J}_+) \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$ を $\mathfrak{J}_+$ のfiltrationについての帰納法で次のように定める：$V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda = (V_\nu^+ \otimes F_0\mathfrak{J}_+) \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda$ 上において，

$$\langle w | \tilde{\Psi}_2(z;v) | u \rangle := \langle w | \Psi_1(z;v) | u \rangle \quad (u \in \mathcal{M}_\lambda,\ v \in V_\mu,\ w \in V_\nu^+)$$

と定め，$(V_\nu^+ \otimes F_N\mathfrak{J}_+) \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda$ まで定まったとき $(V_\nu^+ \otimes F_{N+1}\mathfrak{J}_+) \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda$ 上の値を

$$\langle w \otimes X(m) | \tilde{\Psi}_2(z;v) | u \rangle := \langle w | \tilde{\Psi}_2(z;v) | X(m)u \rangle + \langle w | \tilde{\Psi}_2(z; z^m Xv) | u \rangle$$
$$(u \in \mathcal{M}_\lambda,\ v \in V_\mu,\ w \in V_\nu^+ \otimes F_N\mathfrak{J}_+,\ X \in \mathfrak{g},\ m > 0)$$

と定める．このとき，$u \in \mathcal{M}_\lambda$，$v \in V_\mu$，$w \in V_\nu^+ \otimes \mathfrak{J}_+$，$X, Y \in \mathfrak{g}$，$m, n > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle w \otimes X(m) \otimes Y(n) | \tilde{\Psi}_2(z;v) | u \rangle &= \langle w | \tilde{\Psi}_2(z;v) | X(m)Y(n)u \rangle + \langle w | \tilde{\Psi}_2(z; z^m Xv) | Y(n)u \rangle \\ &\quad + \langle w | \tilde{\Psi}_2(z; z^n Yv) | X(m)u \rangle + \langle w | \tilde{\Psi}_2(z; z^{m+n} XYv) | u \rangle\end{aligned}$$

より，次が成立する：

$$\begin{aligned}\langle w \otimes [X(m) \underset{,}{\otimes} Y(n)] | \tilde{\Psi}_2(z;v) | u \rangle &= \langle w | \tilde{\Psi}_2(z;v) | [X,Y](m+n)u \rangle + \langle w | \tilde{\Psi}_2(z; z^{m+n}[X,Y]v) | u \rangle \\ &= \langle w \otimes [X,Y](m+n) | \tilde{\Psi}_2(z;v) | u \rangle.\end{aligned}$$

よって，$\tilde{\Psi}_1(z)$ の場合と同様にして，$\tilde{\Psi}_2(z)$ が $\Psi(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$ をinduceすることがわかる．$\Psi(z)$ は $\mathbb{C}^\times$ 上多価正則で(3.3)，(1)，(2)をみたすことは，その定め方より明らか．

Step 4: $\Psi(z)$ が (3.3), (1), (2) をみたすことから, $\Psi(z)$ が (3.1) をみたすことが出ることを示す. そのためには, (1), (2) より, $m=0$ の場合の (*) と $m<0$ でかつ $w\in\mathcal{M}_\nu^+$ の場合の (*) が成立することを示せばよい.

$m=0$ の場合: $X\in\mathfrak{g}$ に対して, $G(z;v):=[X,\Psi(z;v)]-\Psi(z;Xv)$ $(v\in V_\mu)$ とおく. $\Psi(z)$ が (3.3) をみたすことと, φ の $\mathfrak{g}$-invariance より, $u\in V_\lambda$, $v\in V_\mu$, $w\in V_\nu^+$ に対して, 次が成立する:

$$\langle w|G(z;v)|u\rangle = z^{-\Delta_\lambda-\Delta_\mu+\Delta_\nu}\{\varphi((wX)\otimes v\otimes u)-\varphi(w\otimes(Xv)\otimes u)-\varphi(w\otimes v\otimes(Xu))\}=0.$$

$Y\in\mathfrak{g}$, $u\in\mathcal{M}_\nu$, $v\in V_\mu$ をとり, $n<0$ のとき $w\in V_\nu^+$ とし $n>0$ のとき $w\in\mathcal{M}_\nu^+$ とすると, $\Psi(z)$ が (1), (2) をみたすことより, 次が成立する:

$$\begin{aligned}\langle w|[Y(n),G(z;v)]|u\rangle &= \langle w|\{[[Y,X](n),\Psi(z;v)]+[X,[Y(n),\Psi(z;v)]]-\Psi(z;z^nYXv)\}|u\rangle\\ &=\langle w|\{\Psi(z;z^n[Y,X]v)+[X,\Psi(z;z^nYv)]-\Psi(z;z^nYXv)\}|u\rangle\\ &=\langle w|\{[X,\Psi(z;z^nYv)]-\Psi(z;z^nXYv)\}|u\rangle\\ &=\langle w|G(z;z^nYv)|u\rangle.\end{aligned}$$

すなわち, $G(z)$ は (1), (2) をみたす. したがって, Step 1 より $G(z)=0$. これで, 次が示せた:

(3) $$[X,\Psi(z;v)]=-\Psi(z;Xv)\quad(v\in V_\mu).$$

$m<0$ かつ $w\in\mathcal{M}_\nu^+$ の場合: $X\in\mathfrak{g}$, $m<0$ に対して,

$$G(z;v):=[X(m),\Psi(z;v)]-\Psi(z;z^mXv)\quad(v\in V_\mu)$$

とおく. N についての帰納法で $G(z)|_{F_N\mathcal{M}_\nu^+\otimes V_\mu\otimes\mathcal{M}_\lambda}=0$ を示せばよい. $N=0$ のときは $\Psi(z)$ が (1) をみたすことより明らか. N まで示せたと仮定する. このとき, $u\in\mathcal{M}_\lambda$, $v\in V_\mu$, $w\in F_N\mathcal{M}_\nu^+$, $Y\in\mathfrak{g}$, $n>0$ に対して, $\Psi(z)$ が (2) をみたすことより,

$$\langle w|[Y(n), G(z;v)]|u\rangle$$
$$=\langle w|\{[[Y,X](n+m)+(Y|X)n\delta_{n+m,0}\hat{\ell}, \Psi(z;v)]+[X(m),\Psi(z;z^nYv)]-\Psi(z;z^{n+m}YXv)\}|u\rangle,$$

さらに，帰納法の仮定と $\Psi(z)$ が (2), (3) をみたすことを使うと

$$=\langle w|\{\Psi(z;z^{n+m}[Y,X]v)+\Psi(z;z^{n+m}XYv)-\Psi(z;z^{n+m}YXv)\}|u\rangle=0.$$

よって，帰納法の仮定より，

$$\langle wY(n)|G(z;v)|u\rangle=\langle w|G(z;v)|Y(n)u\rangle=0.$$

したがって，$N+1$ のときも成立する．以上によって示すべきことが示せた．

Step 5: $\Psi(z)$ が (3.1), (3.3) をみたすことより，$\Psi(z)$ が (3.3) をみたすことを示す．これを示せば，Lemma 3.1 の証明が終了する．

$m\in\mathbb{Z}$ に対して，$G(z;v):=[L_m,\Psi(z;v)]-z^m\left(z\frac{d}{dz}+(m+1)\Delta_\mu\right)\Psi(z;v)$ $(v\in V_\mu)$ とおく．$X\in\mathfrak{g}$, $n\in\mathbb{Z}$ に対して，(3.1) より，

$$[X(n), G(z;v)]$$
$$=[nX(n+m),\Psi(z;v)]+[L_m,\Psi(z;z^nXv)]-z^m\left(z\frac{d}{dz}+(m+1)\Delta_\mu\right)\left(z^n\Psi(z;Xv)\right)$$
$$=nz^{n+m}\Psi(z;Xv)+z^n[L_m,\Psi(z;Xv)]-z^{n+m}\left(z\frac{d}{dz}+(m+1)\Delta_\mu+n\right)\Psi(z;Xv)$$
$$=z^nG(z;v).$$

よって，Step 1 より $G(z)=0$ を示すためには $G(z)|_{V_\nu^\dagger\otimes V_\mu\otimes V_\lambda}=0$ を示せばよい．ところが，(3.3) より，$u\in V_\lambda$, $v\in V_\mu$, $w\in V_\nu^\dagger$ に対して，

$$z^m\left(z\frac{d}{dz}+\Delta_\mu(m+1)\right)\langle w|\Psi(z;v)|u\rangle=z^m(\Delta_\nu+m\Delta_\mu-\Delta_\lambda)\langle w|\Psi(z;v)|u\rangle$$

が成立するので，

(5) $\langle w|[L_m,\Psi(z;v)]|u\rangle=z^m(\Delta_\nu+m\Delta_\mu-\Delta_\lambda)\langle w|\Psi(z;v)|u\rangle\quad(u\in V_\lambda, v\in V_\mu, w\in V_\nu^\dagger)$

を示せばよい．以下，この (5) を $m=0$, $m>0$, $m<0$ に場合分けして証明する．

以下，$u\in V_\lambda$, $v\in V_\mu$, $w\in V_\nu^+$ とする．

$m=0$ のとき： $L_0 u=\Delta_\lambda u$, $w L_0=\Delta_\nu w$ より，

$$\langle w|[L_0, \Psi(z;v)]|u\rangle = (\Delta_\nu-\Delta_\lambda)\langle w|\Psi(z;v)|u\rangle.$$

よって，$m=0$ のとき (5) は成立する．

$m>0$ のとき： $k:=\ell+g$, $C:=\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}} J^p J^p$ とおくと，C は $U(\mathfrak{g})$ の Casimir element であり，$L_0 u=\frac{1}{2k}Cu=\Delta_\lambda u$, etc が成立することを注意しておく．

$m>0$ とすると，Segal-Sugawara operators $L_m=L_m^{\mathfrak{g}}$ の定義より，

$$w L_m = \frac{1}{2k}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{j=0}^{m} w J^p(j) J^p(m-j).$$

よって，以下の計算が成立する：

$$\langle w|[L_m,\Psi(z;v)]|u\rangle = \langle w L_m|\Psi(z;v)|u\rangle$$

$$=\frac{1}{2k}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{j=0}^{m}\langle w J^p(j) J^p(m-j)|\Psi(z;v)|u\rangle$$

$$=\frac{1}{2k}\sum_{p}\left\{(m+1)z^m\langle w|\Psi(z;J^pJ^pv)|u\rangle + 2z^m\langle w|\Psi(z;J^pv)|J^pu\rangle\right\}$$

ここで，(2.12) を使うと，

$$=\frac{1}{2k}z^m\Big\{(m+1)\langle w|\Psi(z;Cv)|u\rangle+\langle wC|\Psi(z;v)|u\rangle$$
$$-\langle w|\Psi(z;Cv)|u\rangle-\langle w|\Psi(z;v)|Cu\rangle\Big\}$$

$$= z^m(\Delta_\nu+m\Delta_\mu-\Delta_\lambda)\langle w|\Psi(z;v)|u\rangle.$$

よって，$m>0$ のとき (5) は成立する．

$m<0$ のとき： $m>0$ の場合と全く同様にして示せる． $\square$

§§3.2. $\mathcal{M}_\nu^+ \otimes \mathcal{M}_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda$ 上での構成

以下, $\Psi(z)$ は Lemma 3.1 における $\Psi(z)$ とする.

$A(\zeta) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \zeta^{-m-e-1} A_m$ とおき, $(A(\zeta), e)$ は $(X(\zeta), 0)$ $(X\in\mathfrak{g})$ または $(T(\zeta), 1)$ とする. $(A(\zeta), e)$ に対して,

$$A(\zeta)_+ := \sum_{m\geq -e} \zeta^{-m-e-1} A_m \ , \ A(\zeta)_- := \sum_{m<-e} \zeta^{-m-e-1} A_m$$

とおく. $u\in\mathcal{M}_\lambda$ (resp. $w\in\mathcal{M}_\nu^+$) に対して, $A(\zeta)_+ u$ (resp. $wA(\zeta)_-$) は m について有限和になる. $A(\zeta) = X(\zeta), T(\zeta)$, $B(z) = Y(z), T(z), \Psi(z;v)$ $(X, Y\in\mathfrak{g},\ v\in V_\mu)$ に対する $S[A(\zeta)B(z)]$ を以下のように定める:

$$S[X(\zeta)Y(z)] := \frac{[X,Y](z)}{\zeta - z} + \frac{(X|Y)\ell}{(\zeta - z)^2},$$

$$S[X(\zeta)T(z)] := \frac{X(z)}{(\zeta - z)^2},$$

$$S[X(\zeta)\Psi(z;v)] := \frac{\Psi(z;Xv)}{\zeta - z},$$

$$S[T(\zeta)X(z)] := \left(\frac{1}{\zeta - z}\frac{d}{dz} + \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right) X(z),$$

$$S[T(\zeta)T(z)] := \left(\frac{1}{\zeta - z}\frac{d}{dz} + \frac{2}{(\zeta - z)^2}\right) T(z) + \frac{c/2}{(\zeta - z)^4},$$

$$S[T(\zeta)\Psi(z;v)] := \left(\frac{1}{\zeta - z}\frac{d}{dz} + \frac{\Delta_\mu}{(\zeta - z)^2}\right)\Psi(z;v).$$

ここで, $S[A(\zeta)B(z)]$ は $A(\zeta)B(z)$ の $\zeta\to z$ での "singular part" である. その意味は, 以下の議論により明らかになる.

次の Lemma の証明中に現われる計算の仕方がその後で使われる.

Lemma 3.2

$A(\zeta) = X(\zeta), T(\zeta)$, $B(z) = Y(z), T(z), \Phi(z;v)$ $(X, Y \in \mathfrak{g},\ v \in V_\mu)$ に対して,

$$A(\zeta)B(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \zeta^{-m-e-1} A_m B(z)$$

は, $|\zeta| > |z| > 0$ で収束し,

$$B(z)A(\zeta) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \zeta^{-m-e-1} B(z) A_m$$

は, $|z| > |\zeta| > 0$ で収束し, これらの収束先はともに

$$S[A(\zeta)B(z)] + A(\zeta)_- B(z) + B(z) A(\zeta)_+$$

である. ただし, 収束は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+ \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$ または $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\lambda^+ \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$ の中における弱収束で考える.

Proof

$A(\zeta) = X(\zeta)$, $B(z) = Y(z)$ の場合のみを証明する. 他も同様にしてできる.

まず, 直接計算によって次が成立することがわかる:

$$[X(m), Y(z)] = z^m [X, Y](z) + m z^{m-1} (X|Y)\ell.$$

よって, $u \in \mathcal{H}_\lambda$, $w \in \mathcal{H}_\lambda^+$ に対して,

$$\sum_{-M<m<M} \zeta^{-m-1} \langle w | X(m) Y(z) | u \rangle$$

$$= \sum_{-M<m<0} \zeta^{-m-1} \langle w | X(m) Y(z) | u \rangle + \sum_{0\le m<M} \zeta^{-m-1} \langle w | Y(z) X(m) | u \rangle$$

$$+ \sum_{0\le m<M} \left\{ \zeta^{-m-1} z^m \langle w | [X, Y](z) | u \rangle + \zeta^{-m-1} m z^{m-1} (X|Y)\ell \langle w | u \rangle \right\}.$$

$|\zeta| > |z| > 0$ のとき, $M \to \infty$ とすると, 右辺の第1の和と第2の和はそれぞれ

$\langle w|X(\zeta)_-Y(z)|u\rangle$, $\langle w|Y(z)X(\zeta)_+|u\rangle$ に収束し，第3の和は $\langle w|S[X(\zeta)Y(z)]|u\rangle$ に収束することがわかる．これで $X(\zeta)Y(z)$ の場合は示せた．$Y(z)X(\zeta)$ の場合は

$$\begin{aligned}&\sum_{-M<m<M}\zeta^{-m-1}\langle w|Y(z)X(m)|u\rangle\\&=\sum_{-M<m<0}\zeta^{-m-1}\langle w|X(m)Y(z)|u\rangle+\sum_{0\le m<M}\zeta^{-m-1}\langle w|Y(z)X(m)|u\rangle\\&+\sum_{-M<m<0}\left\{-\zeta^{-m-1}z^m\langle w|[X,Y](z)|u\rangle-\zeta^{-m-1}mz^{m-1}(X|Y)\ell\langle w|u\rangle\right\}\end{aligned}$$

より，$|z|>|\zeta|>0$ のとき $Y(z)X(\zeta)$ が $S[X(\zeta)Y(z)]+X(\zeta)_-Y(z)+Y(z)X(\zeta)_+$ に収束することがわかる． □

上の証明は，形式的には次の式にまとめることができる：

$$[A(\zeta)_+, B(z)] = S[A(\zeta)B(z)] \quad (|\zeta|>|z|>0),$$

$$[B(z), A(\zeta)_-] = S[A(\zeta)B(z)] \quad (|z|>|\zeta|>0).$$

以下，$A_a(\zeta_a) := \sum_{m\in\mathbb{Z}}\zeta^{-m-h_a}A_m^{(a)}$ $(1\le a\le N)$ とおき，$(A(\zeta_a), h_a)$ は $(X_a(\zeta_a), 1)$ $(X_a\in\mathfrak{g})$ または $(T(\zeta_a), 2)$ とする．$\zeta := (\zeta_1, \cdots, \zeta_N)$ とおく．そして，$v\in V_\mu$，$0\le n\le N$ に対して，

$$(3.4)\qquad \begin{aligned}G(z,\zeta) &:= A_1(\zeta_1)\cdots A_n(\zeta_n)\Psi(z;v)A_{n+1}(\zeta_{n+1})\cdots A_N(\zeta_N)\\&:= \sum_{m_1,\cdots,m_N\in\mathbb{Z}}\zeta_1^{-m_1-h_1}\cdots\zeta_N^{-m_N-h_N}A_{m_1}^{(1)}\cdots A_{m_n}^{(n)}\Psi(z;v)A_{m_{n+1}}^{(n+1)}\cdots A_{m_N}^{(N)}\end{aligned}$$

とおく．$G(z,\zeta)$ の収束性について次が成立する．

Lemma 3.3

$G(z,\zeta)$ は $|\zeta_1|>\cdots>|\zeta_n|>|z|>|\zeta_{n+1}|>\cdots>|\zeta_N|>0$ で収束し，$1\le a\le N$ に対して，

$$(3.5)\quad G(z,\zeta)=G_{\Psi}(z,\zeta)+\sum_{\substack{1\le b\le N\\ b\ne a}}G_b(z,\zeta)+A_a(\zeta_a)_-F(z,\zeta')+F(z,\zeta')A_a(\zeta_a)_+,$$

ここで，$\zeta':=(\zeta_1,\cdots,\zeta_{a-1},\zeta_{a+1},\cdots,\zeta_N)$ とし，$F(z,\zeta')$ は $G(z,\zeta)$ の中の $A_a(\zeta_a)$ を取り除いたものとし，$G_{\Psi}(z,\zeta)$，$G_b(z,\zeta)$ はそれぞれ $F(z,\zeta')$ の中の $\Psi(z;v)$，$A_b(\zeta_b)$ を $S[A_a(\zeta_a)\Psi(z;v)]$，$S[A_a(\zeta_a)A_b(\zeta_b)]$ で置き換えたものとする．例えば，$0\le a\le n<b\le N$ のとき，$A_a:=A_a(\zeta_a)$，etc と省略して書くと，

$$F(z,\zeta')=A_1\cdots A_{a-1}A_{a+1}\cdots A_n\Psi(z;v)A_{n+1}\cdots A_N,$$

$$G_{\Psi}(z,\zeta)=A_1\cdots A_{a-1}A_{a+1}\cdots A_n S[A_a(\zeta_a)\Psi(z;v)]A_{n+1}\cdots A_N,$$

$$G_b(z,\zeta)=A_1\cdots A_{a-1}A_{a+1}\cdots A_n\Psi(z;v)A_{n+1}\cdots A_{b-1}S[A_a(\zeta_a)A_b(\zeta_b)]A_{b+1}\cdots A_N.$$

Proof

N についての帰納法で証明する．$N=0$ の場合は明らか．$N-1$ まで示せたと仮定する．$0\le a\le n$ とする．$n<a\le N$ の場合も同様である．このとき，Lemma 3.5の証明と同様にして，$e:=h_a-1$ とおくと，

$$\sum_{-M<m<M}\zeta_a^{-m-e-1}A_1(\zeta_1)\cdots A_{a-1}(\zeta_{a-1})A^{(a)}_m A_{a+1}(\zeta_{a+1})\cdots A_n(\zeta_n)\Psi(z;v)A_{n+1}(\zeta_{n+1})\cdots A_N(\zeta_N)$$

$$=\sum_{-M<m<-e}\zeta_a^{-m-e-1}A^{(a)}_m F(z,\zeta')+\sum_{-e\le m<M}\zeta_a^{-m-e-1}F(z,\zeta')A^{(a)}_m$$

$$+\sum_{-e\le m<M}\zeta_a^{-m-e-1}F_{\Psi,m}(z,\zeta')+\sum_{b=1}^{a-1}\sum_{-M<m<M}\zeta_a^{-m-e-1}F_{b,m}(z,\zeta')$$

$$+\sum_{b=a+1}^{N}\sum_{-e\le m<M}\zeta_a^{-m-e-1}F_{b,m}(z,\zeta')$$

が成立する。ただし，$F_{\Psi,m}(z,\zeta')$ は $F(z,\zeta')$ の中の $\Psi(z;v)$ を $[A_m^{(a)},\Psi(z;v)]$ で置き換えたものであり，$1\le b<a$ に対して $F_{b,m}(z,\zeta')$ は $F(z,\zeta')$ の中の $A_b(\zeta_b)$ を $[A_b(\zeta_b),A_m^{(a)}]$ で置き換えたものであり，$a<b\le N$ に対して $F_{b,m}(z,\zeta')$ は $F(z,\zeta')$ の中の $A_b(\zeta_b)$ を $[A_m^{(a)},A_b(\zeta_b)]$ で置き換えたものである．上の式の右辺は $|\zeta_1|>\cdots>|\zeta_n|>|z|>|\zeta_{n+1}|>\cdots>|\zeta_N|>0$ において，$M\to\infty$ で (3.5) の右辺に収束することが Lemma 3.2 の証明と同様にしてわかる．したがって，N に対しても成立することがわかった．　$\square$.

上の証明の中の計算を $N=3$ の特別な場合に省略せずに書くと以下のようになる．以下は m_1,m_2 の級数として $|\zeta_3|>|z|>|\zeta_1|$ で収束する：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{-M<m<M}\zeta_2^{-m-1}T(\zeta_1)X_2(m)\Psi(z;v)T(\zeta_3)\\
&:=\sum_{-M<m<M}\zeta_2^{-m-1}\sum_{m_1,m_3\in\mathbb{Z}}\zeta_1^{-m_1-1}\zeta_3^{-m_3-2}X_1(m_1)X_2(m)\Psi(z;v)L_{m_3}\\
&=\sum_{-M<m<0}\zeta_2^{-m-1}\sum_{m_1,m_3}\zeta_1^{-m_1-1}\zeta_3^{-m_3-2}\Big\{\big(X_2(m)X_1(m_1)+[X_1(m_1),X_2(m)]\big)\Psi(z;v)L_{m_3}\Big\}\\
&\quad+\sum_{0\le m<M}\zeta_2^{-m-1}\sum_{m_1,m_3}\zeta_1^{-m_1-1}\zeta_3^{-m_3-2}\Big\{X_1(m_1)\Psi(z;v)L_{m_3}X_2(m)+X_1(m_1)[X_2(m),\Psi(z;v)]L_{m_3}\\
&\qquad\qquad+X_1(m_1)\Psi(z;v)[X_2(m),L_{m_3}]\Big\}\\
&=\sum_{-M<m<0}\zeta_2^{-m-1}X_2(m)X_1(\zeta_1)\Psi(z;v)T(\zeta_3)-\sum_{-M<m<0}\zeta_2^{-m-1}\zeta_1^{m}[X_2,X_1](\zeta_1)\Psi(z;v)T(\zeta_3)\\
&\quad-\sum_{-M<m<0}\zeta_2^{-m-1}m\zeta_1^{m}(X_2|X_1)\ell\,\Psi(z;v)T(\zeta_3)+\sum_{0\le m<M}\zeta_2^{-m-1}X_1(\zeta_1)\Psi(z;v)T(\zeta_3)X_2(m)\\
&\quad+\sum_{0\le m<M}\zeta_2^{-m-1}z^m X_1(\zeta_1)\Psi(z;Xv)T(\zeta_3)+\sum_{0\le m<M}\zeta_2^{-m-1}m\zeta_3^{m-1}X_1(\zeta_1)\Psi(z;Xv)X_2(\zeta_3).
\end{aligned}
$$

$|\zeta_1|>|\zeta_2|>|z|>|\zeta_3|>0$ とすると，この式は $M\to\infty$ で次の式に収束する：

$$X_2(\zeta_2)_- X_1(\zeta_1)\Psi(z;v)T(\zeta_3) + \frac{1}{\zeta_2-\zeta_1}[X_2,X_1](\zeta_1)\Psi(z;v)T(\zeta_3)$$
$$+\frac{(X_2|X_1)\ell}{(\zeta_2-\zeta_1)^2}\Psi(z;v)T(\zeta_3) + X_1(\zeta_1)\Psi(z;v)T(\zeta_3)X_2(\zeta_2)$$
$$+\frac{1}{\zeta_2-z}X_1(\zeta_1)\Psi(z;Xv)T(\zeta_3) + \frac{1}{(\zeta_2-\zeta_3)^2}X_1(\zeta_1)\Psi(z;Xv)X_2(\zeta_3).$$

<u>Lemma 3.4</u>

$z\in\mathbb{C}^\times=\{z\neq 0\}$ を固定すると，$G(z,\zeta)$ は ζ の函数として，

$$Z:=\{\zeta\in\mathbb{C}^N \mid 0, z, \zeta_1,\cdots,\zeta_N \text{ は互いに異なる}\}$$

の上に解析接続される．解析接続によって得られる Z 上の函数を $R[G(z,\zeta)]$ と表わす．このとき，以下が成立する：

(3.6) $\mathfrak{S}_N$ はN次の対称群とする．このとき，$\sigma\in\mathfrak{S}_N$ と $0\leq n\leq N$ に対する

$$R[A_{\sigma(1)}(\zeta_{\sigma(1)})\cdots A_{\sigma(n)}(\zeta_{\sigma(n)})\Psi(z;v)A_{\sigma(n+1)}(\zeta_{\sigma(n+1)})\cdots A_{\sigma(N)}(\zeta_{\sigma(N)})]$$

は互いに等しい．つまり，$R[G(z,\zeta)]$ は $A_a(\zeta_a)$, $\Psi(z;v)$ を並べる順序によらない．

(3.7) $\zeta_2,\cdots,\zeta_N$ を固定するとき，$R[G(z,\zeta)]$ は ζ_1 の函数として以下の特異性をもつ：

(3.7a) $\zeta_1\to\zeta_2$ のとき，

$$R[G(z,\zeta)] = R[S[A_1(\zeta_1)A_2(\zeta_2)]A_3(\zeta_3)\cdots A_N(\zeta_N)\Psi(z;v)] + \text{regular}.$$

(3.7b) $\zeta_1\to z$ のとき，

$$R[G(z,\zeta)] = R[S[A_1(\zeta_1)\Psi(z;v)]A_2(\zeta_2)\cdots A_N(\zeta_N)] + \text{regular}.$$

Proof

Nについての帰納法で証明する．$N=0$の場合は明らかなので，Nまで証明できたと仮定する．$A(\xi)$は$X(\xi)$ $(X\in\mathfrak{g})$または$T(\xi)$とし，$G'(z,\zeta,\xi)$は$G(z,\zeta)$の中のどこかに$A(\xi)$を挿入したものとする．Lemma 3.3より，$G'(z,\zeta,\xi)$は$A(\xi)$を挿入した場所に応じたある領域で収束し，

$$G'(z,\zeta,\xi)=G'_{\Psi}(z,\zeta,\xi)+\sum_{1\le a\le N}G'_a(z,\zeta,\xi)+A(\xi)_-G(z,\zeta)+G(z,\zeta)A(\xi)_+$$

が成立する．ここで，$G'_{\Psi}(z,\zeta,\xi)$は$G(z,\zeta)$の中の$\Psi(z,v)$を$S[A(\xi)\Psi(z;v)]$で置き換えたものであり，$G'_a(z,\zeta,\xi)$は$G(z,\zeta)$の中の$A_a(\zeta_a)$を$S[A(\xi)A_a(\zeta_a)]$で置き換えたものである．したがって，帰納法の仮定より，$G'(z,\zeta,\xi)$は$\{(\zeta,\xi)\in\mathbb{C}^{N+1}\mid 0,z,\zeta_1,\cdots,\zeta_N,\xi$は互いに異なる$\}$の上に解析接続されて(3.7)が成立することがわかる．(3.6)が成立することもNについての帰納法によってわかる． $\square$

Lemma 3.4の結果を簡単に，operator product expansions (OPE's)

$$A_1(\zeta_1)A_2(\zeta_2)\sim S[A_1(\zeta_1)A_2(\zeta_2)]\quad(\zeta_1\to\zeta_2),$$

$$A_1(\zeta_1)\Psi(z;v)\sim S[A_1(\zeta_1)\Psi(z;v)]\quad(\zeta_1\to z)$$

が成立すると言うことがある．また，$R[G(z,\zeta)]$のことを$A_a(\zeta_a)$ $(1\le a\le N)$と$\Psi(z;v)$のradial ordered productと呼ぶことがある．以下，$R[G(z,\zeta)]$という記号は多用される．

Lemma 3.5

$$(3.7\mathrm{c})\quad R[T(\xi)G(z,\zeta)] = \frac{1}{2(l+g)}\lim_{\eta\to\xi}\left\{\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}} R[J^p(\eta)J^p(\xi)G(z,\zeta)] - \frac{l\dim\mathfrak{g}}{(\eta-\xi)^2}R[G(z,\zeta)]\right\}.$$

Proof

Lemma 3.4 より，η の函数として，$\eta\to\xi$ のとき，

$$R[J^p(\eta)J^p(\xi)G(z,\zeta)] = \frac{l}{(\eta-\xi)^2}R[G(z,\xi)] + \text{regular}$$

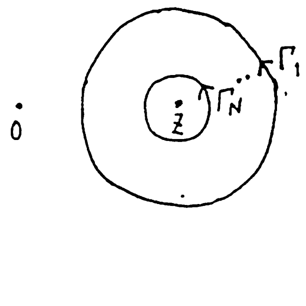
が成立する．したがって，(3.7c) の右辺は $\{(\zeta,\xi)\in\mathbb{C}^{N+1}\,|\,0,z,\zeta_1,\cdots,\zeta_N,\xi$ は互いに異なる$\}$ の上における正則函数を定める（z は固定してある）．あとは，Lemma 1.3 と同様にして証明できる． $\square$

$\mathcal{J}$ は $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L_m$ から生成される tensor algebra とする．

$\Psi(z)\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+\otimes V_\mu\otimes\mathcal{M}_\lambda,\mathbb{C})$ を $\tilde{\Psi}(z)\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+\otimes(\mathcal{J}\otimes V_\mu)\otimes\mathcal{M}_\lambda,\mathbb{C})$ に以下のようにして拡張する．$A_a(\zeta_a):=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\zeta_a^{-m-e_a-1}A_m^{(a)}$ $(1\leq a\leq N)$ とおく．$(A_a(\zeta_a),e_a)$ は $(X_a(\zeta_a),0)$ $(X_a\in\mathfrak{g})$ または $(T(\zeta_a),1)$ とする．$u\in\mathcal{M}_\lambda$，$w\in\mathcal{M}_\nu^+$，$v_0\in V_\mu$ に対して，

$$(3.8)\quad \begin{aligned}&\langle w|\tilde{\Psi}(z;A_{m_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes A_{m_N}^{(N)}\otimes v_0)|u\rangle\\ &:=\oint_{\Gamma_1}d\zeta_1\cdots\oint_{\Gamma_N}d\zeta_N\,(\zeta_1-z)^{m_1+e_1}\cdots(\zeta_N-z)^{m_N+e_N}\langle w|R[A_1(\zeta_1)\cdots A_N(\zeta_N)\Psi(z;v_0)]|u\rangle.\end{aligned}$$

ここで，$|z|>r_1>\cdots>r_N>0$ とし，$\Gamma_a:=\{z+r_ae^{\sqrt{-1}t}\,|\,0\leq t\leq 2\pi\}$ $(1\leq a\leq N)$ とする（下図）：



Lemma 3.6

$\widetilde{\Psi}(z)$ は $\widetilde{\Phi}(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+ \otimes \mathcal{M}_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$ を induce する.

Proof

$x, y \in \mathcal{J}$, $v_0 \in V_\mu$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して以下を示せば十分である:

(1) $\widetilde{\Psi}(z; X \otimes v_0) = \widetilde{\Psi}(z; Xv_0)$, $\widetilde{\Psi}(z; X(m) \otimes v_0) = 0$ $(m>0)$.

(2) $\widetilde{\Psi}(z; L_0 \otimes v_0) = \widetilde{\Psi}(z; \Delta_\mu v_0)$, $\widetilde{\Psi}(z; L_m \otimes v_0) = 0$ $(m>0)$.

(3) $\widetilde{\Psi}(z; x \otimes \{[X(m) \overset{\otimes}{,} Y(n)] - [X,Y](m+n) - \ell(X|Y)\, m\delta_{m+n,0}\} \otimes y \otimes v_0) = 0$.

(4) $\widetilde{\Psi}(z; x \otimes \{[L_m, X(n)] + nX(m+n)\} \otimes y \otimes v_0) = 0$,

(5) $\widetilde{\Psi}(z; x \otimes \{[L_m \overset{\otimes}{,} L_n] - (m-n)L_{m+n} - \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}\} \otimes y \otimes v_0) = 0$.

(6) $\displaystyle \widetilde{\Psi}(z; x \otimes L_m \otimes y \otimes v_0) = \frac{1}{2(\ell+g)} \sum_{p=1}^{\dim \mathfrak{g}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \widetilde{\Psi}(z; x \otimes {}^{\circ}_{\circ} J^p(i) \otimes J^p(m-i) {}^{\circ}_{\circ} \otimes y \otimes v_0)$.

ここで, $[a \overset{\otimes}{,} b] := a \otimes b - b \otimes a$ とおき, ${}^{\circ}_{\circ} X(i) \otimes Y(j) {}^{\circ}_{\circ}$ は $i<j$ のとき $X(i) \otimes Y(j)$, $i=j$ のとき $\frac{1}{2}\{X(i) \otimes Y(i) + Y(i) \otimes X(i)\}$, $i>j$ のとき $Y(j) \otimes X(i)$ とおく. また, (1) から (5) までが成立すれば (6) の右辺は有限和になることを注意しておく.

(1) を示そう. Lemma 3.4 より, operator product expansion (OPE)

$$X(\zeta)\Psi(z; v_0) \sim \frac{1}{\zeta - z} \Psi(z; Xv) \qquad (\zeta \to z)$$

が成立するので, $m \geq 0$ のとき, $C_z := \{z + re^{\sqrt{-1}t} \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ $(0<r<|z|)$ とおくと,

$$\Psi(z; X(m) \otimes v_0) = \oint_{C_z} d\zeta (\zeta - z)^m R[X(\zeta)\Psi(z; v)] = \oint_{C_z} d\zeta (\zeta - z)^{m-1} \Psi(z; Xv)$$

が成立する. よって, (1) が成立することは明らか.

(2) は, Lemma 3.4 より, OPE

$$T(\zeta)\Psi(z; v_0) \sim \frac{1}{\zeta - z} \frac{d}{dz} \Psi(z; v_0) + \frac{\Delta_\mu}{(\zeta - z)^2} \Psi(z; v_0) \quad (\zeta \to z)$$

が成立することを使えば, (1) と同様にして示せる.

(3) を示そう。$A_a(\zeta_a) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \zeta_a^{-m-e_a-1} A_m^{(a)}$ $(1\le a\le N)$ とおき，$(A_a(\zeta_a), e_a)$ は $(X_a(\zeta_a), 0)$ $(X_a \in \mathfrak{g})$ または $(T(\zeta_a), 1)$ とする．$0\le n\le N$ に対して，

$$x := A_{k_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes A_{k_n}^{(n)}, \quad y := A_{k_{n+1}}^{(n+1)} \otimes \cdots \otimes A_{k_N}^{(N)}$$

とおき，$|z| > r_1 > \cdots > r_n > R_1 > R_2 > r_{n+1} > \cdots > r_N > 0$ とし，

$$Z(\zeta) := A_1(\zeta_1)\cdots A_N(\zeta_N), \quad (\zeta-z)^{k+e} := (\zeta_1-z)^{k_1+e_1}\cdots(\zeta_N-z)^{k_N+e_N},$$

$$\Gamma_a := \{ z + r_a e^{\sqrt{-1}t} \mid 0\le t\le 2\pi \} \quad (1\le a\le N),$$

$$\gamma_b := \{ z + R_b e^{\sqrt{-1}t} \mid 0\le t\le 2\pi \} \quad (b=1,2),$$

$$\oint_\Gamma d\zeta := \oint_{\Gamma_1} d\zeta_1 \cdots \oint_{\Gamma_N} d\zeta_N$$

と表わす．また十分小さな r に対して，$C_\eta := \{ z + re^{\sqrt{-1}t} \mid 0\le t\le 2\pi \}$ とおく．このとき，Lemma 3.4 より次の OPE

$$X(\xi)Y(\eta) \sim \frac{[X,Y](\eta)}{\xi-\eta} + \frac{\ell(X|Y)}{(\xi-\eta)^2} \quad (\xi\to\eta)$$

が成立するので以下が成立する：

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Psi}(z; x\otimes[X(m)\otimes Y(n)]\otimes y\otimes v_0) \\
&= \oint_\Gamma d\zeta(\zeta-z)^{k+e}\Big\{ \oint_{\gamma_1} d\xi \oint_{\gamma_2} d\eta\, (\xi-z)^m(\eta-z)^n R[X(\xi)Y(\eta)Z(\zeta)\Psi(z;v_0)] \\
&\qquad - \oint_{\gamma_2} d\xi \oint_{\gamma_1} d\eta\, (\xi-z)^m(\eta-z)^n R[X(\xi)Y(\eta)Z(\zeta)\Psi(z;v_0)]\Big\} \\
&= \oint_\Gamma d\zeta(\zeta-z)^{k+e} \oint_{\gamma_1} d\eta\, (\eta-z)^n \oint_{C_\eta} d\xi\, (\xi-z)^m \\
&\qquad \times\Big\{ \frac{1}{\xi-\eta} R[[X,Y](\eta)Z(\zeta)\Psi(z;v_0)] + \frac{\ell(X|Y)}{(\xi-\eta)^2} R[Z(\zeta)\Psi(z;v_0)]\Big\} \\
&= \oint_\Gamma d\zeta(\zeta-z)^{k+e} \oint_{\gamma_1} d\eta \Big\{ (\eta-z)^{m+n} R[[X,Y](\eta)Z(\zeta)\Psi(z;v_0)] \\
&\qquad + \ell(X|Y)\, m\, (\eta-z)^{m+n-1} R[Z(\zeta)\Psi(z;v_0)]\Big\} \\
&= \widetilde{\Psi}(z; x\otimes[X,Y](m+n)\otimes y\otimes v_0) + \ell(X|Y)\, m\, \delta_{m+n,0}\, \Psi(z; x\otimes y\otimes v_0).
\end{aligned}$$

これで(3)が示された。(4), (5)も Lemma 3.4 による以下の OPE's

$$X(\xi)T(\eta) \sim \frac{X(\eta)}{(\xi-\eta)^2} \qquad (\xi\to\eta),$$

$$T(\xi)T(\eta) \sim \frac{1}{\xi-\eta}\frac{d}{d\eta}T(\eta) + \frac{2}{(\xi-\eta)^2}T(\eta) + \frac{c/2}{(\xi-\eta)^4} \quad (\xi\to\eta)$$

より, (3)と同様にして示される.

(6)を示そう。ζ_a $(1\le a\le N)$ は Γ_a 上にあるとし, ξ, η はそれぞれ γ_1, γ_2 上にあるとする. このとき, $\theta(m)$ は $m\geq 0$ のとき1, $m<0$ のとき0 とおくと,

$$
\begin{aligned}
& R[J^p(\xi)J^p(\eta)Z(\zeta)\Psi(z;v_0)] - \frac{\ell}{(\xi-\eta)^2}R[Z(\zeta)\Psi(z;v_0)] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^N}(\zeta-z)^{-k-e-1}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}(\xi-z)^{-i-1}(\eta-z)^{-j-1} \\
&\qquad \times\left\{\tilde{\Psi}(z;x\otimes J^p(i)\otimes J^p(j)\otimes y\otimes v_0) - \ell\theta(i)\,i\,\delta_{i+j,0}\tilde{\Psi}(z;x\otimes y\otimes v_0)\right\} \\
&= \sum_{k}(\zeta-z)^{-k-e-1}\sum_{i,j}(\xi-z)^{-i-1}(\eta-z)^{-j-1}\tilde{\Psi}(z;x\otimes {:}J^p(i)\otimes J^p(j){:}\otimes y\otimes v_0)
\end{aligned}
$$

が成立する. よって, Lemma 3.5 を使うと,

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\Psi}(z;x\otimes L_m\otimes y\otimes v_0) \\
&= \frac{1}{2(\ell+g)}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}}\oint_{\Gamma}d\zeta(\zeta-z)^{k+e}\oint_{\gamma_2}d\eta(\eta-z)^{m+1} \\
&\qquad \times\lim_{\xi\to\eta}\left\{R[J^p(\xi)J^p(\eta)Z(\zeta)\Psi(z;v_0)] - \frac{\ell}{(\xi-\eta)^2}R[Z(\zeta)\Psi(z;v_0)]\right\} \\
&= \frac{1}{2(\ell+g)}\sum_{p=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i+j=m}}\tilde{\Psi}(z;x\otimes {:}J^p(i)\otimes J^p(j){:}\otimes y\otimes v_0).
\end{aligned}
$$

これで, (6)が示された. $\square$

Proposition 3.7

固定された level は $\ell\in\mathbb{C}$ $(\ell\neq -g)$ とし, $\lambda,\mu,\nu\in\mathfrak{h}^*$ をとる. このとき,
任意の $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\nu^\dagger\otimes V_\mu\otimes V_\lambda,\mathbb{C})=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu\otimes V_\lambda,V_\nu)$ に対して,
以下の性質をもつ $\widetilde{\Phi}(z)$ が唯一存在する:

(3.8) $\widetilde{\Phi}(z)$ は $\mathbb{C}^\times=\{z\neq 0\}$ 上の $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^\dagger\otimes\mathcal{M}_\mu\otimes\mathcal{M}_\lambda,\mathbb{C})$-値多価正則函数である.

(3.9) $A(\zeta):=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\zeta^{-m-h}A_m$ とおき, $(A(\zeta),h)$ は $(X(\zeta),1)$ $(X\in\mathfrak{g})$ または $(T(\zeta),2)$ とする. このとき, $z\in\mathbb{C}^\times$, $u\in\mathcal{M}_\lambda$, $v\in\mathcal{M}_\mu$, $w\in\mathcal{M}_\nu^\dagger$ に対して,

$$\langle w|\widetilde{\Phi}(z;v)A(\zeta)|u\rangle:=\sum_m\zeta^{-m-h}\langle w|\widetilde{\Phi}(z;v)A_m|u\rangle,$$
$$\langle w|\widetilde{\Phi}(z;A(\zeta-z)v)|u\rangle:=\sum_m(\zeta-z)^{-m-h}\langle w|\widetilde{\Phi}(z;A_mv)|u\rangle,$$
$$\langle w|A(\zeta)\widetilde{\Phi}(z;v)|u\rangle:=\sum_m\zeta^{-m-h}\langle w|A_m\widetilde{\Phi}(z;v)|u\rangle$$

とおくと, これらはそれぞれ, $0<|\zeta|<|z|$, $0<|\zeta-z|<|z|$, $|z|<|\zeta|$ で収束して, すべてが $\{\zeta\in\mathbb{C}\,|\,\zeta\neq 0,z\}$ 上の同一の正則函数に解析接続される.

(3.10) $\widetilde{\Phi}(z;L_{-1}v)=\dfrac{d}{dz}\widetilde{\Phi}(z;v)\quad(v\in\mathcal{M}_\mu)$.

(3.11) $\widetilde{\Phi}(z)\big|_{V_\nu^\dagger\otimes V_\mu\otimes V_\lambda}=z^{-\Delta_\lambda-\Delta_\mu+\Delta_\nu}\varphi$.

Proof

Lemma 3.6 における $\widetilde{\Phi}(z)$ が目的のものであることを示す (一意性は Lemma 2.2 と同様にして示される). $\widetilde{\Phi}(z)$ の定め方より, (3.8) と (3.11) が成立することは明らかである. よって, (3.9) と (3.10) を示せばよい.

(3.9) を示そう. $X_a\in\mathfrak{g}$ $(1\leq a\leq N)$, $u\in\mathcal{M}_\lambda$, $v_0\in V_\mu$, $w\in\mathcal{M}_\nu$ をとる. $\widetilde{\Phi}$ の定め方より, $\langle w|R[A(\zeta)X_1(\zeta_1)\cdots X_N(\zeta_N)\Psi(z;v_0)]|u\rangle$ は, $|z|>|\zeta-z|>|\zeta_1-z|>\cdots>|\zeta_N-z|>0$ において

$$\sum_{m,k_1,\cdots,k_N} (\zeta-z)^{-m-h}(\zeta_1-z)^{-k_1-1}\cdots(\zeta_N-z)^{-k_N-1}\langle w|\widetilde{\Phi}(z;A_m X_1(k_1)\cdots X_N(k_N)v_0)|u\rangle$$

と Laurent 展開され，$|\zeta|>|z|+|z-\zeta_1|>|z|>|z-\zeta_1|>\cdots>|z-\zeta_N|>0$ で

$$\sum_{m,k_1,\cdots,k_N} \zeta^{-m-h}(\zeta_1-z)^{-k_1-1}\cdots(\zeta_N-z)^{-k_N-1}\langle w|A_m\widetilde{\Phi}(z;X_1(k_1)\cdots X_N(k_N)v_0)|u\rangle$$

と Laurent 展開され，$|z|>|\zeta_1-z|>\cdots>|\zeta_N-z|>0$，$|z|-|z-\zeta_1|>|\zeta|>0$ で

$$\sum_{m,k_1,\cdots,k_N} \zeta^{-m-h}(\zeta_1-z)^{-k_1-1}\cdots(\zeta_N-z)^{-k_N-1}\langle w|\widetilde{\Phi}(z;X_1(k_1)\cdots X_N(k_N)v_0)A_m|u\rangle$$

と Laurent 展開される．よって，ζ_1 は z にいくらでも近づけるので，

$$v:=X_1(k_1)\cdots X_N(k_N)v_0$$

とおくと $\langle w|\widetilde{\Phi}(z;A(\zeta)v)|u\rangle$，$\langle w|A(\zeta)\widetilde{\Phi}(z;v)|u\rangle$，$\langle w|\widetilde{\Phi}(z;v)A(\zeta)|u\rangle$ は

それぞれ $|z|>|\zeta-z|>0$，$|\zeta|>|z|>0$，$|z|>|\zeta|>0$ で収束し，これらはすべて

$\{\zeta\neq 0,z\}$ 上の同一の正則函数

$$\oint_{\Gamma_1}d\zeta_1\cdots\oint_{\Gamma_N}d\zeta_N\,(\zeta_1-z)^{k_1}\cdots(\zeta_N-z)^{k_N}\langle w|R[A(\zeta)X_1(\zeta_1)\cdots X_N(\zeta_N)\Phi(z;v_0)]|u\rangle$$

に解析接続される．ここで，$|z|,|\zeta-z|>r_1>\cdots>r_N>0$ とし，

$$\Gamma_a:=\{z+r_a e^{\sqrt{-1}t}\mid 0\leq t\leq 2\pi\}\quad(1\leq a\leq N)$$

とおいた．これで，(3.9) が示せた．

(3.10) を示そう．$X_a\in\mathfrak{g}$ $(1\leq a\leq N)$ をとり，$|z|>|\xi-z|>|\zeta_1-z|>\cdots>|\zeta_N-z|>0$ とする．C_η は $\eta\in\mathbb{C}$ と十分小さな $r>0$ に対する $C_\eta:=\{z+re^{\sqrt{-1}t}\mid 0\leq t\leq 2\pi\}$ とし，$|z|>R>|\zeta_1-z|$ となる R をとり $\Gamma:=\{z+Re^{\sqrt{-1}t}\mid 0\leq t\leq 2\pi\}$ とおく．このとき，$v_0\in V_\mu$ に対して，次の Laurent 展開が成立する：

$$R[T(\xi)X_1(\zeta_1)\cdots X_N(\zeta_N)\Psi(z;v_0)]$$
$$= \sum_{m,k_1,\cdots,k_N} (\xi-z)^{-m-2}(\zeta_1-z)^{-k_1-1}\cdots(\zeta_N-z)^{-k_N-1}\,\tilde{\Phi}(z;L_m X_1(k_1)\cdots X_N(k_1)v_0).$$

また, Lemma 3.4 より, 以下の operator product expansions

$$T(\xi)X_a(\zeta_a)\sim\left(\frac{1}{\xi-\zeta_a}\frac{d}{d\zeta_a}+\frac{1}{(\xi-\zeta_a)^2}\right)X_a(\zeta_a)\quad(\xi\to\zeta_a),$$
$$T(\xi)\Psi(z;v_0)\sim\left(\frac{1}{\xi-z}\frac{d}{dz}+\frac{\Delta_\mu}{(\xi-z)^2}\right)\Psi(z;v_0)\quad(\xi\to z)$$

が成立するから,

$$\oint_\Gamma d\xi\, R[T(\xi)X_1(\zeta_1)\cdots X_N(\zeta_N)\Psi(z;v_0)]$$
$$=\oint_{C_z}d\xi\left(\frac{1}{\xi-z}\frac{\partial}{\partial z}\right)R[X_1(\zeta_1)\cdots X_N(\zeta_N)\Psi(z;v_0)]$$
$$+\sum_{a=1}^N\oint_{C_{\zeta_a}}d\xi\left(\frac{1}{\xi-\zeta_a}\frac{\partial}{\partial\zeta_a}\right)R[X_1(\zeta_1)\cdots X_N(\zeta_N)\Psi(z;v_0)]$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{a=1}^N\frac{\partial}{\partial\zeta_a}\right)\sum_{k_1,\cdots,k_N}(\zeta_1-z)^{-k_1-1}\cdots(\zeta_N-z)^{-k_N-1}\,\tilde{\Phi}(z;X_1(k_1)\cdots X_N(k_N)v_0)$$
$$=\sum_{k_1,\cdots,k_N}(\zeta_1-z)^{-k_1-1}\cdots(\zeta_N-z)^{-k_N-1}\frac{d}{dz}\tilde{\Phi}(z;X_1(k_1)\cdots X_N(k_N)v_0).$$

以上のことより次が出る:

$$\tilde{\Phi}(z;L_{-1}X_1(k_1)\cdots X_N(k_1)v_0)=\frac{d}{dz}\tilde{\Phi}(z;X_1(k_1)\cdots X_N(k_N)v_0).$$

これで, (3.10)が示せた. □

Remark 3.8

(1) Proposition 3.7 における $\tilde{\Phi}(z)$ が $\Phi(z)\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\nu^\dagger\otimes\mathcal{H}_\mu\otimes\mathcal{H}_\lambda,\mathbb{C})$ を induce するとき, $\Phi(z)$ は type $(\nu;\mu\lambda)$ の chiral vertex operator をなす.

(2) Proposition 3.7 における $\tilde{\Phi}(z)$ は以下をみたす. $v\in V_\mu$, $X\in\mathfrak{g}$, $m\in\mathbb{Z}$

に対して，以下が成立する：

(3.12a) $\quad [X(m), \widetilde{\Phi}(z;v)] = \widetilde{\Phi}\left(z; \sum_{i\geq 0} \binom{m}{i} z^{m-i} X(i) v\right),$

(3.12b) $\quad \widetilde{\Phi}(z; X(m)v) = \sum_{i\leq m} \binom{m}{m-i} (-z)^{m-i} X(i)\, \widetilde{\Phi}(z;v)$

$$- \widetilde{\Phi}(z;v) \sum_{i\geq 0} \binom{m}{i} (-z)^{m-i} X(i),$$

(3.12c) $\quad [L_m, \widetilde{\Phi}(z;v)] = \widetilde{\Phi}\left(z; \sum_{i\geq -1} \binom{m+1}{i+1} z^{m-i} L_i v\right)$

$$= z^{m+1}\frac{d}{dz}\widetilde{\Phi}(z;v) + \widetilde{\Phi}\left(z; \sum_{i\geq 0} \binom{m+1}{i+1} z^{m-i} L_i v\right),$$

(3.12d) $\quad \Phi(z; L_m v) = \sum_{i\leq m} \binom{m+1}{m-i} (-z)^{m-i} L_i\, \widetilde{\Phi}(z;v)$

$$- \widetilde{\Phi}(z;v) \sum_{i\geq -1} \binom{m+1}{i+1} (-z)^{m-i} L_i.$$

証明は (2.2) ⇒ (2.4) の証明と全く同様である.

§§3.3. $sl_2(\mathbb{C})$ についてのある Lemma

$sl_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}F$, $[E,F]=H$, $[H,E]=2E$, $[H,F]=-2E$ と表わす. $i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, U_i (resp. $U_i^{\dagger}$) は $(2i+1)$ 次元の left (resp. right) simple $sl_2(\mathbb{C})$-module とする. U_i (resp. $U_i^{\dagger}$) の highest weight vector を $|i\rangle$ (resp. $\langle i|$) と表わす. さらに, H が作用する vector space U に対して,

$$P(U) := \{m \in \mathbb{C} \mid \text{ある } u \in U \text{ があって}, u \neq 0 \text{ かつ } \tfrac{1}{2}Hu = mu\}$$

とおく. 特に, $i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$P(U_i) = P(U_i^+) = \{ m \in i + \mathbb{Z} \mid -i \leq m \leq i \}$$

である. $P(U)$のことを Uの weight 全体と呼ぶ.

<u>Lemma 3.9</u> ([TK1])

$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i, j, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i, j, k \leq \frac{1}{2}\ell$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{sl_2(\mathbb{C})}(U_k^+ \otimes U_j \otimes U_i, \mathbb{C})$ に対して以下の条件は互いに同値である:

(3.13a) $i + j + k \leq \ell$ または $\varphi = 0$.

(3.13b) $\varphi|_{U_k^+ \otimes (E^{\ell - 2i + 1} U_j) \otimes |i\rangle} = 0$.

(3.13c) $\varphi|_{U_k^+ \otimes |j\rangle \otimes (E^{\ell - 2j + 1} U_i)} = 0$.

(3.13d) $\varphi|_{\langle k| \otimes (F^{\ell - 2k + 1} U_j) \otimes U_i} = 0$.

<u>Lemma 3.10</u> ([TK1])

$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i, j, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{sl_2(\mathbb{C})}(U_k^+ \otimes U_j \otimes U_i, \mathbb{C})$ に対して, 以下が成立する:

(3.14b) $i \leq \frac{1}{2}\ell$ かつ $\varphi \neq 0$ かつ (3.13b) ならば $j, k \leq \frac{1}{2}\ell$.

(3.14c) $j \leq \frac{1}{2}\ell$ かつ $\varphi \neq 0$ かつ (3.13c) ならば $i, k \leq \frac{1}{2}\ell$.

(3.14d) $k \leq \frac{1}{2}\ell$ かつ $\varphi \neq 0$ かつ (3.13d) ならば $i, j \leq \frac{1}{2}\ell$.

以上のLemmaの証明をまとめて行なう.

Proof of Lemma 3.9 and 3.10

ここでは次を示す:

(3.15) $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i,j,k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i\leq\frac{1}{2}\ell$, $\varphi\in\mathrm{Hom}_{sl_2(\mathbb{C})}(U_k^+\otimes U_j\otimes U_i,\mathbb{C})$ に対して (3.12a) と (3.12b) は同値である.

これから (3.14b) が出ることは明らかである. また, 他も同様に示せる.

$\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i,j,k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i\leq\frac{1}{2}\ell$, $\varphi\in\mathrm{Hom}_{sl_2(\mathbb{C})}(U_k^+\otimes U_j\otimes U_i,\mathbb{C})$ とする. $\mathrm{Hom}_{sl_2(\mathbb{C})}(U_k^+\otimes U_j\otimes U_i,\mathbb{C})=\mathrm{Hom}_{sl_2(\mathbb{C})}(U_j\otimes U_i,U_k)$ の次元は1以下であり, 次元が1になるための必要十分条件は 次の Clebsch-Gordan 条件が成立することであることがよく知られている:

(CG) $\quad i+j+k\in\mathbb{Z}$, $k\leq i+j$, $j\leq i+k$, $i\leq j+k$.

$u\in U_i$, $v\in U_j$, $w\in U_k^+$, $m_a\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ $(a=0,1,\infty)$ が $\frac{1}{2}Hu=m_0u$, $\frac{1}{2}Hv=m_1v$, $\frac{1}{2}wH=m_\infty w$ をみたすとき,

$$\begin{aligned}0&=\varphi((wH)\otimes v\otimes u)-\varphi(w\otimes(Hv)\otimes u)-\varphi(w\otimes v\otimes(Hu))\\&=(m_\infty-m_1-m_0)\,\varphi(w\otimes v\otimes u)\end{aligned}$$

が成立するので, $m_0+m_1=m_\infty$ のとき以外は $\varphi(w\otimes v\otimes u)=0$ である.

(3.12a) $\Rightarrow$ (3.12b) を示そう. すべての $m_\infty\in P(U_k^+)$ は k 以下であり, すべての $m\in P((E^{\ell-2i+1}U_j)\otimes|i\rangle)$ は $\ell-2i+1-j-i=\ell-i-j+1$ 以上である. よって, $i+j+k\leq\ell$ と仮定すると, $k<\ell-i-j-1$ だから $P(U_k^+)\cap P((E^{\ell-2i+1}U_j)\otimes|i\rangle)$ は空集合になる. したがって, $\varphi|U_k^+\otimes(E^{\ell-2i+1}U_j)\otimes|i\rangle=0$.

(3.12b) $\Rightarrow$ (3.12a) を示そう. $\varphi\neq 0$, $i+j+k>\ell$ を仮定して, (3.12b) が成立しないことを示せばよい. $\varphi\neq 0$ より条件 (CG) が成立する. $R\subset U_k^+\otimes U_j$ を

$$R := \mathbb{C}\text{-span of } \left\{ w \otimes v \in U_k^{+} \otimes U_j \,\middle|\, \left(\tfrac{1}{2} wH\right) \otimes v - w \otimes \left(\tfrac{1}{2} Hv\right) = i\, w \otimes v \right\}$$

と定める. $|-j\rangle$ を U_j の lowest weight vector とし,

$$r_a := (\langle k| E^{k+j-i-a}) \otimes (E^a |-j\rangle) \quad (0 \le a \le k+j-i)$$

とおくと, $R = \bigoplus_{0 \le a \le k+j-i} \mathbb{C} r_a$ が成立する. $\varphi \neq 0$ と φ の $\mathfrak{g}$-invariance より

ある $x \in R$ が存在して $\varphi(x \otimes |i\rangle) \neq 0$ となる. 一方 r_a の定義より,

$$\varphi(r_a \otimes |i\rangle) = \varphi(r_{a+1} \otimes |i\rangle) \qquad (0 \le a \le k+j-i-1)$$

が成立する. したがって, すべての $0 \le a \le k+j-i$ に対して $\varphi(r_a \otimes |i\rangle) \neq 0$.

$i+j+k > \ell$ と $i \le \frac{1}{2}\ell$ より $0 \le \ell - 2i + 1 \le k + j - i$ となるので, $\varphi(r_{\ell-2i+1} \otimes |i\rangle) \neq 0$.

よって, (3.12b) が成立しない. □

§§3.4. §3の主結果

以下, $\mathfrak{g}$ の highest root θ に対する $s\ell_2$-triplet $(E_\theta, H_\theta, F_\theta)$ を用いて

$s\ell_2(\mathbb{C})$ を $\mathfrak{g}$ の中に,

$$s\ell_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}E_\theta \oplus \mathbb{C}H_\theta \oplus \mathbb{C}F_\theta \subset \mathfrak{g}$$

と埋め込んで考える. $\lambda \in P_+$, $i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して, $W_{\lambda,i}$ (resp. $W^{+}_{\lambda,i}$)

は V_λ (resp. V_λ^{+}) の $(2i+1)$ 次元 simple $s\ell_2(\mathbb{C})$-submodules 全体の合併

を表わすことにする. このとき,

$$V_\lambda = \bigoplus_{0 \le i \le \frac{1}{2}(\theta|\lambda)} W_{\lambda,i} \quad , \quad V_\lambda^{+} = \bigoplus_{0 \le i \le \frac{1}{2}(\theta|\lambda)} W^{+}_{\lambda,i}$$

が成立する.

Theorem 3.11

固定されたlevelは $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\ell \neq -g)$ とし，$\lambda, \mu, \nu \in P_\ell$ とする．このとき，$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes V_\lambda, \mathbb{C})$ に対して以下の条件は互いに同値である：

(3.16a) type $(\nu; \mu\lambda)$ の chiral vertex operator $\Phi(z)$ で

$$\Phi(z)|V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes V_\lambda = z^{-\Delta_\lambda - \Delta_\mu + \Delta_\nu} \varphi$$

をみたすものが唯一存在する．

(3.16b) $\varphi | V_\nu^+ \otimes (E_\theta^{\ell - (\theta|\lambda) + 1} V_\mu) \otimes |\lambda\rangle = 0.$

(3.16c) $\varphi | V_\nu^+ \otimes |\mu\rangle \otimes (E_\theta^{\ell - (\theta|\mu) + 1} V_\lambda) = 0.$

(3.16d) $\varphi | \langle\nu| \otimes (F_\theta^{\ell - (\theta|\nu) + 1} V_\mu) \otimes V_\lambda = 0.$

(3.16e) $i, j, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$，$i + j + k > \ell$ ならば $\varphi | W_{\nu,k}^+ \otimes W_{\mu,j} \otimes W_{\lambda,i} = 0.$

Lemma 3.12

固定されたlevelは $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\ell \neq -g)$ とし，Proposition 3.7 における $\widetilde{\Phi}(z)$ をとる．このとき，以下が成立する：

(i) $\lambda \in P_\ell$ のとき $\widetilde{\Phi}(z)$ が $\Phi(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+ \otimes \mathcal{M}_\mu \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathbb{C})$ をinduceするための必要十分条件は (3.16b) が成立することである．

(ii) $\mu \in P_\ell$ のとき $\widetilde{\Phi}(z)$ が $\Phi(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+ \otimes \mathcal{H}_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$ を induce するための必要十分条件は (3.16c) が成立することである．

(iii) $\nu \in P_\ell$ のとき $\widetilde{\Phi}(z)$ が $\Phi(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\nu^+ \otimes \mathcal{M}_\mu \otimes \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{C})$ を induce するための必要十分条件は (3.16d) が成立するたとである．

Proof of Lemma 3.12

(i)のみを示す. 他も同様である. $L := \ell - (\theta|\lambda) + 1$, $u_0 := E_\theta(-1)^L|\lambda\rangle \in \mathcal{M}_\lambda$ とおくと, $\lambda \in P_\ell$ と Lemma 1.2 より, $\mathcal{H}_\lambda \simeq \mathcal{M}_\lambda / U(\hat{\mathfrak{g}})u_0$ が成立する. よって, Proposition 3.7 における $\tilde{\Phi}(z)$ が $\Phi(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_\nu^+ \otimes \mathcal{M}_\mu \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathbb{C})$ を induce するための必要十分条件は, 次が成立することである:

$$(*) \qquad \langle w|\tilde{\Phi}(z;v)|xu_0\rangle = 0 \qquad (x \in U(\hat{\mathfrak{g}}), v \in \mathcal{M}_\mu, w \in \mathcal{M}_\nu^+).$$

$(*) \Rightarrow$ (3.16b) を示そう. (3.11) と (3.12a) より, $v \in V_\mu$, $w \in \mathcal{M}_\nu^+$ に対して,

$$\langle w|\tilde{\Phi}(z;v)|u_0\rangle = (-1)^L z^{-\Delta_\lambda - \Delta_\mu + \Delta_\nu} \varphi(w \otimes (E_\theta^L v) \otimes |\lambda\rangle).$$

よって, $(*)$ から (3.16b) が出ることは明らか.

(3.16b) $\Rightarrow (*)$ を示そう. 上の式より, (3.16b) と $\tilde{\Phi}(z)|_{V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes u_0} = 0$ は同値である. N についての帰納法で $\tilde{\Phi}(z)|_{F_N\mathcal{M}_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes u_0} = 0$ を示そう. $N=0$ の場合は (3.16b) と同値である. N まで正しいと仮定すると, u_0 が $\mathcal{M}_\lambda$ の singular vector (i.e. $(\hat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \mathfrak{n}_+)u_0 = 0$) であることより (3.12a) を使うと, $v \in V_\mu$, $w \in F_N\mathcal{M}_\nu^+$, $X \in \mathfrak{g}$, $m > 0$ に対して,

$$\langle wX(m)|\tilde{\Phi}(z;v)|u_0\rangle = \langle w|\tilde{\Phi}(z; z^m Xv)|u_0\rangle = 0.$$

よって, $N+1$ のときも成立する. これで, $\tilde{\Phi}(z)|_{\mathcal{M}_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes u_0} = 0$ が出た. 同様にして, N についての帰納法で $\tilde{\Phi}(z)|_{\mathcal{M}^+ \otimes F_N\mathcal{M}_\mu \otimes u_0} = 0$ を示せる. よって, $\tilde{\Phi}(z)|_{\mathcal{M}_\nu^+ \otimes \mathcal{M}_\mu \otimes u_0} = 0$ である. これから, $(*)$ が出ることが (3.12a) よりわかる. $\square$.

Proof of Theorem 3.11

(3.16a), (3.16b), (3.16e) が同値であることを示す。他も同様である。

(3.16a) から (3.16b) (および (3.16c), (3.16d)) が出ることは Lemma 2.6 (2.13) より明らか。

(3.16e) から (3.16a) が出ることを示そう。(3.16e) より、$j, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が $\frac{1}{2}(\theta|\lambda) + j + k > \ell$ をみたすとき、$\varphi|W^+_{\nu,k} \otimes (E_\theta^{\ell-(\theta|\lambda)+1} W_{\mu,j}) \otimes |\lambda\rangle = 0$ である。また、Lemma 3.9 の (3.13a) ⇒ (3.13b) より、$\frac{1}{2}(\theta|\lambda) + j + k \leq \ell$ のときも、$\varphi|W^+_{\nu,k} \otimes (E_\theta^{\ell-(\theta|\lambda)+1} W_{\mu,j}) \otimes |\lambda\rangle = 0$ である。よって、(3.16b) が成立することがわかった。同様にして、(3.16e) から (3.16c), (3.16d) が出ることがわかる。したがって、Lemma 3.12 より、Proposition 3.7 における $\widetilde{\Phi}(z)$ が type $(\nu; \mu\lambda)$ の chiral vertex operator を induce することがわかる。これより、(3.16a) が成立することがわかる。

(3.16b) から (3.16e) が出ることを示そう。Lemma 3.12 より Proposition 3.7 における $\widetilde{\Phi}(z)$ は $\Phi'(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}^+_\nu \otimes \mathcal{M}_\mu \otimes \mathcal{H}_\lambda, \mathbb{C})$ を induce する。$i, j, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $i + j + k > \ell$ をみたすものをとる。V_λ (resp. V_μ, V^+_ν) の $(2i+1)$ (resp. $(2j+1), (2k+1)$) dimensional simple $sl_2(\mathbb{C})$-submodule U_i (resp. U_j, U_k) をとり、U_i の highest weight vector を $|i\rangle$ と表わす。もちろん、ここで、$sl_2(\mathbb{C})$ は $\mathfrak{g}$ の中に $sl_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}E_\theta \oplus \mathbb{C}H_\theta \oplus \mathbb{C}F_\theta$ によって埋め込んで考えている。$e_0 := F_\theta(1)$, $h_0 := \hat{\ell} - H_\theta$, $f_0 := E_\theta(-1)$ とおくと、$[h_0, e_0] = 2e_0$, $[h_0, f_0] = -2f_0$, $[e_0, f_0] = h_0$ が成立する。そして、$e_0|i\rangle = F_\theta(1)|i\rangle = 0$, $h_0|i\rangle = (\ell - 2i)|i\rangle$ が成立し、$\mathcal{H}_\lambda$ は Lemma 1.2 より integrable なので十分大きな n に対して $f_0^n|i\rangle = 0$

となる．このことより，$L := \ell - 2i + 1$ とおくと，$E_\theta(-1)^L|i\rangle = f_0^L|i\rangle = 0$ となることがわかる．よって，$v \in U_j$，$w \in U_k^+$ に対して，(3.12a) を用いると，

$$0 = \langle w|\Phi'(z;v)|E_\theta(-1)^L|i\rangle = (-1)^L z^{-\Delta_\lambda - \Delta_\mu + \Delta_\nu}\varphi(w \otimes (E_\theta^L v) \otimes |i\rangle)$$

したがって，Lemma 3.9 の (3.13b) ⇒ (3.13a) より，$\varphi|U_k^+ \otimes U_j \otimes U_i = 0$ である．これで (3.16e) が成立することがわかった． □.

次の Lemma は §4 で重要な役目をはたす．

Lemma 3.13

固定された level は $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\ell \neq -g)$ とし，$\lambda, \mu, \nu \in P_+$ をとる．このとき，0 でない $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\nu^+ \otimes V_\mu \otimes V_\lambda, \mathbb{C})$ に対して以下が成立する：

(3.17b)　$\lambda \in P_\ell$ と条件 (3.16b) より，$\mu, \nu \in P_\ell$ かつ (3.16a) が出る．

(3.17c)　$\mu \in P_\ell$ と条件 (3.16c) より，$\lambda, \nu \in P_\ell$ かつ (3.16a) が出る．

(3.18d)　$\nu \in P_\ell$ と条件 (3.16d) より，$\lambda, \mu \in P_\ell$ かつ (3.16a) が出る．

Proof

(3.17b) のみを示す．他も同様である．$\varphi \neq 0$ と φ の $\mathfrak{g}$-invariance より，$\varphi|V_\nu^+ \otimes |\mu\rangle \otimes V_\lambda \neq 0$ かつ $\varphi|\langle\nu| \otimes V_\mu \otimes V_\lambda \neq 0$ である．$\varphi|V_\nu^+ \otimes |\mu\rangle \otimes V_\lambda \neq 0$ より，ある $i, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $\varphi|W_{\nu,k}^+ \otimes |\mu\rangle \otimes W_{\lambda,i} \neq 0$ となる．$\lambda \in P_\ell$ より，$i \leq \frac{1}{2}(\theta|\lambda) \leq \frac{1}{2}\ell$ である．よって，Lemma 3.10 の (3.14b) より，$k \leq \frac{1}{2}\ell$ かつ $\frac{1}{2}(\theta|\mu) \leq \frac{1}{2}\ell$ である．よって，$\mu \in P_\ell$．$\nu \in P_\ell$ も同様にして示せる．(3.16a) が出ることは Theorem 3.11 よりわかる． □

以上の Theorem 3.11 と Lemma 3.13 は level が $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\ell \neq -g$) の場合に対する §3 の主結果である. §4 を読むためには, この2つの結果を知っていれば十分である. Proposition 3.7 より, level が $\ell \notin \mathbb{Q}$ の場合の結果は次のように簡単に出る.

<u>Theorem 3.14</u>

固定された level は $\ell \notin \mathbb{Q}$ とし, 任意に $\lambda, \mu, \nu \in P_+$ をとる. このとき, 任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\nu^\dagger \otimes V_\mu \otimes V_\lambda, \mathbb{C})$ に対して, type $(\nu; \mu\lambda)$ の chiral vertex operator $\Phi(z)$ で $\Phi(z)|V_\nu^\dagger \otimes V_\mu \otimes V_\lambda = z^{-\Delta_\lambda - \Delta_\mu + \Delta_\nu}\varphi$ をみたすものが唯一存在する.

<u>Proof</u>

$\ell \notin \mathbb{Q}$ のとき, $\mathcal{H}_{\ell,\lambda} \simeq \mathcal{M}_{\ell,\lambda}$, $\mathcal{H}_{\ell,\mu} \simeq \mathcal{M}_{\ell,\mu}$, $\mathcal{H}_{\ell,\nu}^\dagger \simeq \mathcal{M}_{\ell,\nu}^\dagger$ となる. よって, このとき, Proposition 3.7 における $\widetilde{\Phi}(z)$ 自身が chiral vertex operator をなす. □

<u>Example 3.15</u>

$\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ とし, 固定された level は $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, U_i は $(2i+1)$ 次元の simple $sl_2(\mathbb{C})$-module とする. $U_i^\dagger := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U_i, \mathbb{C})$ とおくと, $U_i^\dagger$ は $(2i+1)$ 次元の right simple $sl_2(\mathbb{C})$-module をなす. $i, j, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ とする. $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U_k^\dagger \otimes U_j \otimes U_i, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U_j \otimes U_i, U_k)$ は $\mathbb{C}$ または 0 に同型であり, $\mathbb{C}$ に同型になるための必要十分条件は, 次の Clebsch-Gordan 条件が成立することであることがよく知られている;

(CG) $\quad i+j+k \in \mathbb{Z}, \quad i \leq j+k, \quad j \leq i+k, \quad k \leq i+j.$

したがって，$i, j, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$，$i, j, k \leq \frac{1}{2}\ell$ に対して，type $(k; j\,i)$ の chiral vertex operators 全体を $\mathcal{V}_{j\,i}^{\,k}$ と表わすと次が成立する：

$$\mathcal{V}_{j\,i}^{\,k} \simeq \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U_j \otimes U_i, U_k) \simeq \mathbb{C} & (\text{(CG) かつ } i+j+k \leq \ell \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}.$$

Example 3.16

固定された level は $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\ell \neq -g$) とし，$\lambda, \mu, \nu \in P_\ell$ とする．λ, μ, ν のうちどれかが 0 になる場合について述べよう．$V_0 \simeq \mathbb{C}|0\rangle$, $V_0^\dagger \simeq \langle 0|\mathbb{C}$ より，

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\nu^\dagger \otimes V_0 \otimes V_\lambda, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\nu^\dagger \otimes V_\lambda, \mathbb{C}) \simeq \delta_\lambda^\nu \mathbb{C},$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\nu^\dagger \otimes V_\mu \otimes V_0, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\nu^\dagger \otimes V_\mu, \mathbb{C}) \simeq \delta_\mu^\nu \mathbb{C}$$

が成立する．ここで，δ_λ^ν は $\nu = \lambda$ のとき 1 で他のとき 0 となる Kronecker の delta である．$\mathfrak{g}$ の Weyl 群の最長元を w_0 と表わし，$\lambda \in P_\ell$ に対して

$$\lambda^\dagger := -w_0(\lambda) \in P_\ell$$

とおく．$\lambda^{\dagger\dagger} = \lambda$ である．$V_{\lambda^\dagger}$ は lowest weight $-\lambda$ をもつので，$V_{\lambda^\dagger}$ に

$$vX := -Xv \qquad (v \in V_{\lambda^\dagger})$$

によって right $\mathfrak{g}$-module の構造を入れると，right $\mathfrak{g}$-module として，

$$V_{\lambda^\dagger} \simeq V_\lambda^\dagger$$

が成立する．したがって，次が成立する：

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_0^\dagger \otimes V_\mu \otimes V_\lambda, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda, V_{\mu^\dagger}) \simeq \delta_{\mu, \lambda^\dagger} \mathbb{C}.$$

φ が $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda^\dagger \otimes V_0 \otimes V_\lambda, \mathbb{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu^\dagger \otimes V_\mu \otimes V_0, \mathbb{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_0^\dagger \otimes V_{\lambda^\dagger} V_\lambda, \mathbb{C})$ のどれかに属すとき，(3.15 b〜d) が成立するので，φ に対して，chiral vertex operator $\Phi(z)$ で,

$$\Phi(z)\big|_{V_\lambda^+\otimes V_0\otimes V_\lambda}=\varphi,\quad \Phi(z)\big|_{V_\mu^+\otimes V_\mu\otimes V_0}=\varphi \quad もしくは\quad \Phi(z)\big|_{V_0^+\otimes V_{\lambda^+}\otimes V_\lambda}=z^{-2\Delta_\lambda}\varphi$$

をみたすものが唯一存在する. したがって, type $(\nu;0\lambda)$ (resp. $(\nu;\mu 0)$, $(0;\mu\lambda)$) の 0 でない chiral vertex operator は $\nu=\lambda$ (resp. $\nu=\mu$, $\mu=\lambda^+$) のときにのみ存在して定数倍を除いて一意に定まる. 具体的には以下のようになる.

$\mathbb{1}\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda^+\otimes V_0\otimes V_\lambda,\mathbb{C})$ を $\mathbb{1}(u\otimes|0\rangle\otimes v):=\langle u|v\rangle$ $(u\in V_\lambda^+, v\in V_\lambda)$ と定め, $\mathbb{1}$ に対する type $(\lambda;0\lambda)$ の chiral vertex operator を $\mathbb{1}(z)$ と書くと,

$$\langle u|\mathbb{1}(z;|0\rangle)|v\rangle=\langle u|v\rangle \quad (u\in \mathcal{H}_\lambda^+,\ v\in\mathcal{H}_\lambda)$$

が成立する. すなわち, $\mathbb{1}(z;|0\rangle)=id_{\mathcal{H}_\lambda}$ である. 特に次が成立することを注意しておく: $C_z=\{z+re^{\sqrt{-1}t}\,|\,0\le t\le 2\pi\}$ $(0<r<|z|)$ とおくと,

$$\mathbb{1}(z;X(-1)|0\rangle)=\oint_{C_z}d\zeta\,\zeta^{-1}R[X(\zeta)\mathbb{1}(z;|0\rangle)]=\oint_{C_z}d\zeta\,\zeta^{-1}X(\zeta)=X(z),$$

$$\mathbb{1}(z;L_{-2}|0\rangle)=\oint_{C_z}d\zeta\,\zeta^{-1}R[T(\zeta)\mathbb{1}(z;|0\rangle)]=\oint_{C_z}d\zeta\,\zeta^{-1}T(\zeta)=T(z).$$

$\tilde{\mathbb{1}}\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu^+\otimes V_\mu\otimes V_0,\mathbb{C})$ を $\tilde{\mathbb{1}}(u\otimes v\otimes|0\rangle):=\langle u|v\rangle$ $(u\in V_\mu^+, v\in V_\mu)$ と定めると $\tilde{\mathbb{1}}$ に対する type $(\mu;\mu 0)$ の chiral vertex operator $\tilde{\mathbb{1}}(z)$ に対して次が成立する:

$$\lim_{z\to 0}\langle u|\tilde{\mathbb{1}}(z;v)|0\rangle=\langle u|v\rangle \quad (u\in\mathcal{H}_\mu^+,\ v\in\mathcal{H}_\mu).$$

<u>Remark 3.17</u>

この節では conformal block の $N=1$ の場合である chiral vertex operator について調べてきた. 実は, この節の結果の大部分は conformal block に対して一般化される. 例えば, 以下が成立する.

Proposition 3.7 の一般化: 固定された level は $\ell\in\mathbb{C}$ $(\ell\neq -g)$ とし,

$\lambda_0, \cdots, \lambda_N, \lambda_\infty \in \mathfrak{g}^*$とすると，(2.6), (2.7)をみたす任意の$F(z)$に対して，M上の$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} \mathcal{H}_{\lambda_a}, \mathbb{C})$-値多価正則函数$\Phi(z)$で(2.2), (2.3)および

$$(*) \qquad \Phi(z) \big| V_{\lambda_\infty}^{+} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a} = F(z)$$

をみたすものが唯一存在する．証明はProposition 3.7と全く同様であるがLemma 3.1の証明におけるStep 5はKZ equation (2.7)を使った少し複雑な議論で置き換えられることになる．

Theorem 3.11の一般化：固定されたlevelは$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\ell \neq -g$)とし，$\lambda_0, \cdots, \lambda_N, \lambda_\infty \in P_\ell$とすると，(2.6~8)をみたす任意の$F(z)$に対して，type $(\lambda_\infty; \lambda_N \cdots \lambda_0)$のchiral vertex operator $\Phi(z)$で$(*)$をみたすものが唯一存在する．証明は，Proposition 3.7の一般化をみとめれば，Theorem 3.11の証明と全く同様である．これについては§4で別証明を与える．

§4. Conformal blockの chiral vertex operatorsへの factorization

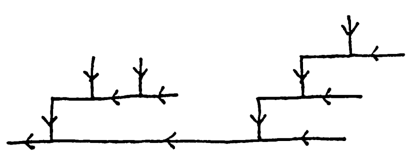
§§4.1 座標系τと chiral vertex operatorsの合成の定義

以下では，(tree-level ϕ^3)diagramに対して，座標系τと chiral vertex operatorsの合成を定義する.

まず，(tree-level ϕ^3) diagramを定義しよう. 以下の図のように1点に左向きの矢線の先と下向きの矢線の先と左向きの矢線の根を集めた図形を ϕ^3 vertex もしくは単に vertex (頂点)と呼ぶ:

ϕ^3 vertex (頂点).

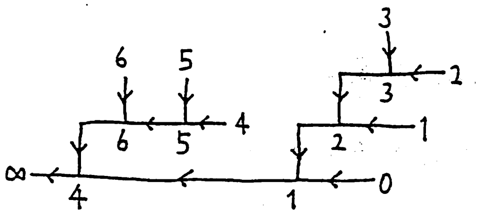
有限個の verticesの矢線をつないでできる図形がループを持たないとき，それを tree-level ϕ^3 diagram もしくは単に diagramと呼ぶ. 例えば，以下の図形は (tree-level ϕ^3) diagramである:



diagramの例.

このような diagramの中の矢線に次のように名前をつける: 矢線の根および先の両方に頂点があるとき，それを内線と呼び，それ以外を外線と呼ぶ. diagramの中には，その最下段の1番左側にその diagramから出る方向の外線が唯一存在し，それを外線∞と呼ぶ. diagramの中にある頂点の個数はN個であるとする. このとき，diagramの中に入る方向の外線が(N+1)個存在

する．それらには便宜上次のように番号をつけておく：diagramの最下段の1番右側にあるdiagramに入る方向の外線には0と番号をつけ，他には外線0から左回り（反時計回り）に1,2,…,Nと番号をつける．N個の頂点と外線1,…,Nを次のように対応させる：外線a $(1\leq a\leq N)$から矢線の向きに進み最初に出会う下向きの矢線の先の頂点を頂点aと呼び，外線aには頂点aを対応させる．以上の番号付けを上のdiagramの例で図示すると以下の図のようになる：



番号付けの例．

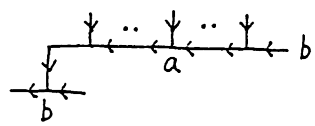
以下，N個の頂点を持つdiagram Γを固定し，その内線全体をIと表わす．このようなdiagram Γに対して，

(4.1) $\quad M := \{z=(z_1,\cdots,z_N)\in\mathbb{C}^N \mid 0, z_1,\cdots,z_N$ は互いに異なる$\}$

のlocal coordinate $\tau=(\tau_\infty, \tau_i\ (i\in I))$を定義しよう．まず，次のようにおく：

$$z_0 := 0 \quad , \quad z_{ab} := z_a - z_b \quad (0\leq a,b\leq N).$$

頂点a $(1\leq a\leq N)$から左向きの矢線の逆をたどって右に進み最後にたどりつく外線の番号がb $(0\leq b\leq N)$のとき，$\delta(a) := b$とおく．図で表わせば以下のようになる：

$\delta(a) = b \quad \Leftrightarrow$ 

.

例えば，上のdiagramの例に対しては，次のようになる：

$$\delta(1)=\delta(4)=0\ ,\quad \delta(2)=1\ ,\quad \delta(3)=2\ ,\quad \delta(5)=\delta(6)=4\ .$$

頂点 a には $z_{a,\delta(a)} = z_a - z_{\delta(a)}$ を対応させる. $\tau = (\tau_\infty, \tau_i\ (i \in I))$ を定めよう. 内線 $i \in I$ の根が頂点 a で先が頂点 b のとき,

$$\tau_i := \tau_{ba} := \frac{z_{a,\delta(a)}}{z_{b,\delta(b)}} = \frac{z_a - z_{\delta(a)}}{z_b - z_{\delta(b)}}$$

とおき, diagram Γ の最下段の1番左側にある頂点の番号が a のとき,

$$\tau_\infty := z_a$$

とおく. 上の diagram の例においては次のようになる:

$$\tau_\infty = z_4,\ \tau_{41} = \frac{z_1}{z_4},\ \tau_{46} = \frac{z_{64}}{z_4},\ \tau_{65} = \frac{z_{54}}{z_{64}},\ \tau_{12} = \frac{z_{21}}{z_1},\ \tau_{23} = \frac{z_{32}}{z_{21}}.$$

逆に $z_{a,\delta(a)}$ を τ で表わす式は次のようになる:

$$(4.2) \qquad z_{a,\delta(a)} = \tau_\infty \prod_{\substack{i \in I \\ i \leftarrow a}} \tau_i \qquad (1 \le a \le N).$$

ここで, $i \leftarrow a$ は頂点 a から矢線の向きに沿って進み内線 i にたどりつけることを意味する. 例えば, 上の例においては次のようになる:

$$z_4 = \tau_\infty,\ z_1 = \tau_\infty \tau_{41},\ z_{64} = \tau_\infty \tau_{46},\ z_{54} = \tau_\infty \tau_{46} \tau_{65},$$

$$z_{21} = \tau_\infty \tau_{41} \tau_{12},\ z_{32} = \tau_\infty \tau_{41} \tau_{12} \tau_{23}.$$

さらに, z_a $(1 \le a \le N)$ を τ で表わす式は次のようになる:

$$(4.3) \qquad z_a = \sum_{\substack{m \ge 0 \\ \delta^m(a) \ne 0}} z_{\delta^m(a), \delta^{m+1}(a)} = \sum_{\substack{m \ge 0 \\ \delta^m(a) \ne 0}} \tau_\infty \prod_{\substack{i \in I \\ i \leftarrow a}} \tau_i \quad (1 \le a \le N).$$

ここで, $\delta^m(a) := \delta(\delta(\cdots(\delta(a))\cdots))$ (m 個の δ の合成) である. $\mathbb{C}[\tau]$ によって, $\tau_\infty, \tau_i\,(i \in I)$ から生成される多項式環を表わすと, $z_a \in \mathbb{C}[\tau]$ $(1 \le a \le N)$ である.

十分小さな $r > 0$ をとり,

(4.4) $\quad U := \{\tau = (\tau_\infty, \tau_i (i\in I)) \in \mathbb{C}^N \mid |\tau_i| < r \ (i \in I)\}$ （$r>0$は十分小さい），

(4.5) $\quad Y := \{\tau \in U \mid \tau_\infty \prod_{i\in I} \tau_i = 0\}$

とおくと，(4.3)より $U\setminus Y \subset M$ とみなせ τ は M の開集合 $U\setminus Y$ 上の local coordinate をなすことがわかる．$\tau' := (\tau_i)_{i\in I}$ とおく．

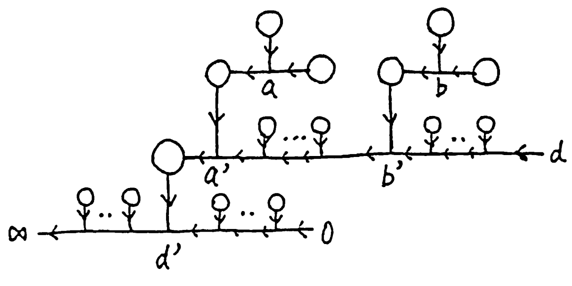
Lemma 4.1

$1\le a, b\le N$, $a\ne b$ に対して，ある頂点 A $(1\le A\le N)$ と $\tau' = (\tau_i)_{i\in I}$ の多項式 $f(\tau')$ が存在して以下が成立する：

$$z_{ab} = z_a - z_b = f(\tau')\tau^\infty \prod_{\substack{i\in I \\ i\leftarrow A}} \tau_i \ , \quad f(0) = \pm 1 .$$

Proof

$\delta^{m+1}(a) = \delta^{n+1}(b)$ となる最小の $m, n\ge 0$ をとり，$a' := \delta^m(a)$, $b' := \delta^n(b)$, $d := \delta(a') = \delta(b')$ とおく．頂点 a' と頂点 b' は同じ段にあるが，頂点 a' が頂点 b' の左側にあるとしてよい．さらに，$\delta^k(d) = 0$ となる最小の $k\ge 0$ をとり，$k\ge 1$ ならば $d' := \delta^{k-1}(d)$ とおく．図で表わすと下図のようになる：



このとき，(4.3)より，

$$z_a = \tau_\infty \Big(\prod_{i\leftarrow a} \tau_i + \cdots + \prod_{i\leftarrow a'} \tau_i + \prod_{i\leftarrow d} \tau_i + \cdots + \prod_{i\leftarrow d'} \tau_i \Big),$$

$$z_b = \tau_\infty \Big(\prod_{i\leftarrow b} \tau_i + \cdots + \prod_{i\leftarrow b'} \tau_i + \prod_{i\leftarrow d} \tau_i + \cdots + \prod_{i\leftarrow d'} \tau_i \Big).$$

したがって，

$$z_{ab} = z_a - z_b = \tau_\infty \prod_{i \leftarrow a'} \tau_i \Big(\prod_{a' \leftarrow i \leftarrow a} \tau_i + \cdots + \prod_{a' \leftarrow i \leftarrow \delta^{m-1}(a)} \tau_i + 1 - \prod_{a' \leftarrow i \leftarrow b} \tau_i + \cdots + \prod_{a' \leftarrow i \leftarrow b'} \tau_i \Big).$$

ここで，$a' \leftarrow i \leftarrow e$ $(e = a, \cdots, \delta^{m-1}(a), b, \cdots, b')$ は頂点 から矢線の向きに進み内線iを通って頂点a'にたどりつけることを意味する．よって，$A := a'$とおきこの式の括弧の中を$f(\tau')$とおけば Lemma が成立することがわかる． □

以下，固定された level は$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\ell \neq -g)$とし，$\vec{\lambda}$を次のようにおく：

$$\vec{\lambda} := (\lambda_\infty ; \lambda_N \cdots \lambda_1 \lambda_0) \quad , \quad \lambda_a \in P_\ell \ (a = 0, 1, \cdots, N, \infty).$$

ΓはN個の頂点を持つ diagram とし，$(\Gamma, \vec{\lambda})$に対する chiral vertex operators の合成を定義しよう．まず，外線a $(a = 0, \cdots, N, \infty)$に対して$\lambda_a$を対応させ，内線$i \in I$に対して任意に$\mu_i \in P_\ell$を対応させ，$\vec{\mu} := (\mu_i)_{i \in I} \in P_\ell^{N-1}$とおく．これで diagram Γの中のすべての矢線に対してP_ℓに属す weight が対応することになる．頂点a $(1 \leq a \leq N)$の右にある左向きの矢線，上にある下向きの矢線，左にある左向きの矢線に対応する weight をそれぞれ$\lambda(a) = \lambda(\vec{\mu}, a)$, $\mu(\vec{\mu}, a)$, $\nu(\vec{\mu}, a)$と表わす．次に，頂点a $(1 \leq a \leq N)$に対して，type $(\nu(a) ; \mu(a) \lambda(a))$の chiral vertex operator $\Phi_a(z_{a,\delta(a)})$をとり，頂点aに$\Phi_a(z_{a,\delta(a)})$に対応させる．頂点aには$z_{a,\delta(a)}$を対応させたことに注意せよ．Remark 2.7 より，$\Phi_a(z_{a,\delta(a)})$は次のように展開される：

(4.6a) $$\Phi_a(z_{a,\delta(a)}) = \sum_{m_a \in \mathbb{Z}} z_{a,\delta(a)}^{-m_a - \Delta_{\lambda(a)} - \Delta_{\mu(a)} + \Delta_{\nu(a)}} \Phi^{(a)}_{m_a} ,$$

(4.6b) $$\Phi^{(a)}_{m_a} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mu(a)} \otimes \mathcal{H}_{\lambda(a)}, \mathcal{H}_{\nu(a)}),$$

(4.6c) $$\Phi^{(a)}_{m_a}(\mathcal{H}_{\mu(a)}(n_1) \otimes \mathcal{H}_{\lambda(a)}(n_0)) \subset \mathcal{H}_{\nu(a)}(n_0 + n_1 - m) \quad (1 \leq a \leq N).$$

次に，各 $m=(m_1,\cdots,m_N)\in\mathbb{Z}^N$ に対して，$\Phi^{(a)}_{m_a}$ $(1\le a\le N)$ を diagram Γ にしたがって合成してできた $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\bigotimes_{a=0}^{N}\mathcal{H}_{\lambda_a},\mathcal{H}_{\lambda_\infty})$ の元を $\Phi_{m_1\cdots m_N}$ と表わす．そして，次の形式的な級数を考える：

$$(4.7)\qquad \Phi(z):=\sum_{m\in\mathbb{Z}^N}\left(\prod_{a=1}^{N} z_{a,\delta(a)}^{-m_a-\Delta_{\lambda(a)}-\Delta_{\mu(a)}+\Delta_{\nu(a)}}\right)\Phi_{m_1\cdots m_N}.$$

この $\Phi(z)$ を $(\Gamma,\vec{\lambda})$ に対する chiral vertex operators の（形式的な）合成と呼ぶ．例については Introduction を見よ．この $\Phi(z)$ に対しても conformal block に対して使った記号を用いる．実際に後で $\Phi(z)$ は $U\setminus Y\subset M$ 上で収束して M 上に解析接続され type $\vec{\lambda}$ の conformal block を定めることを示す．

以下，$\Phi(z)$ は $(\Gamma,\vec{\lambda})$ に対する chiral vertex operators の形式的合成であるとする．$m=(m_1,\cdots,m_N)\in\mathbb{Z}^N$ と $k=(k_\infty,k_i\,(i\in I))\in\mathbb{Z}^N$ の1対1対応を次のように定める：

$$(4.8)\qquad k_\infty:=-\sum_{a=1}^{N}m_a,\quad k_i:=-\sum_{\substack{a:\text{頂点}\\ i\leftarrow a}}m_a\quad(i\in I).$$

ここで，$\sum_{\substack{a:\text{頂点}\\ i\leftarrow a}}$ は内線 $i\in I$ から矢線を逆向きに進んでたどりつける頂点 a 全体にわたる和を表わす．$\varepsilon=(\varepsilon_\infty,\varepsilon_i\,(i\in I))$ を次のようにおく：

$$(4.9)\qquad \begin{aligned}\varepsilon_\infty&:=\sum_{a=1}^{N}(-\Delta_{\lambda(a)}-\Delta_{\mu(a)}+\Delta_{\nu(a)})=\Delta_{\lambda_\infty}-\sum_{b=0}^{N}\Delta_{\lambda_b},\\ \varepsilon_i&:=\sum_{\substack{a:\text{頂点}\\ i\leftarrow a}}(-\Delta_{\lambda(a)}-\Delta_{\mu(a)}+\Delta_{\nu(a)})=\Delta_{\mu_i}-\sum_{\substack{b:\text{外線}\\ i\leftarrow b}}\Delta_{\lambda_b}\quad(i\in I).\end{aligned}$$

ここで，$\sum_{\substack{b:\text{外線}\\ i\leftarrow b}}$ は内線 $i\in I$ から矢線を逆向きに進んでたどりつける外線 b

全体にわたる和を表わす．(4.8) のもとで，$k=k(m)$ と書き，

$$\Phi_k = \Phi_{k(m)} := \Phi_{m_1 \cdots m_N}$$

とおく．このとき，次が成立する．

Lemma 4.2

$\Phi(z)$ を $(\Gamma, \mathfrak{X})$ に対する chiral vertex operators の形式的合成とすると，$v_b \in \mathcal{H}_{\lambda_b}(n_b)$ $(0 \le b \le N)$，$v_\infty \in \mathcal{H}^+_{\lambda_\infty}(n_\infty)$ に対して，形式的に

$$\langle v_\infty | \Phi(z) | \bigotimes_{b=0}^{N} v_b \rangle = \sum_k{}^{*} \left(\tau_\infty^{\varepsilon_\infty + k_\infty} \prod_{i \in I} \tau_i^{\varepsilon_i + k_i} \right) \langle v_\infty | \Phi_k | \bigotimes_{b=0}^{N} v_b \rangle$$

が成立する．ここで，$\sum_k^{*}$ は次の条件をみたす $k = (k_\infty, k_i (i \in I)) \in \mathbb{Z}^N$ 全体にわたる和を表わす：

$$k_\infty + \sum_{b=0}^{N} n_b = n_\infty \quad , \quad k_i + \sum_{\substack{b:\text{外線} \\ i \leftarrow b}} n_b \ge 0 \quad (i \in I).$$

Proof

(4.2) を (4.7) に代入して (4.8),(4.9) を使って整理すると

$$\Phi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\tau_\infty^{\varepsilon_\infty + k_\infty} \prod_{i \in I} \tau_i^{\varepsilon_i + k_i} \right) \Phi_k$$

となる．よって，$\langle v_\infty | \Phi_{m_1 \cdots m_N} | \bigotimes_{b=0}^{N} v_b \rangle \neq 0$ ならば

$$-\sum_{a=1}^{N} m_a + \sum_{b=0}^{N} n_b = n_\infty \quad , \quad -\sum_{\substack{a:\text{頂点} \\ i \leftarrow a}} m_a + \sum_{\substack{b:\text{外線} \\ i \leftarrow b}} n_b \ge 0$$

となることを示せばよい．ところがこれは (4.6c) より，

$$\Phi_{m_1 \cdots m_N} \left(\bigotimes_{b=0}^{N} \mathcal{H}_\lambda (n_b) \right) \subset \mathcal{H}_{\lambda_\infty} \left(-\sum_{a=1}^{N} m_a + \sum_{b=0}^{N} n_b \right)$$

が成立することがわかるので，$\mathcal{H}_\lambda(n)=0$ $(n<0)$ より明らかである． $\square$

$\mathbb{C}[[\tau]]$ (resp. $\mathbb{C}[[\tau']]$) によって $\tau=(\tau_\infty, \tau_i\ (i\in I))$ (resp. $\tau'=(\tau_i)_{i\in I}$) から生成される形式的巾級数環を表わし，その商体を $\mathbb{C}((\tau))$ (resp. $\mathbb{C}((\tau'))$) と表わす．$\alpha=(\alpha_\infty, \alpha_i\ (i\in I))$ に対して τ^α を次のようにおく：

$$\tau^\alpha := \tau_\infty^{\alpha_\infty}\prod_{i\in I}\tau_i^{\alpha_i}.$$

Lemma 4.2 より，$(\Gamma, \vec{\chi})$ に対する chiral vertex operators の形式的合成 $\Phi(z)$ は以下のようにみなせる：

$$\Phi(z)\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\Big(\mathcal{H}^+_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}\mathcal{H}_{\lambda_a},\ \tau^\varepsilon\,\mathbb{C}((\tau))\Big).$$

$\Phi_a(z_{a,\delta(a)})$ $(1\le a\le N)$ に対して，$\varphi_a\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\mu(a)}\otimes V_{\lambda(a)}, V_{\nu(a)})$ を

$$(4.10)\qquad \Phi_a(z_{a,\delta(a)})\big|V^+_{\nu(a)}\otimes V_{\mu(a)}\otimes V_{\lambda(a)} = z^{-\Delta_{\lambda(a)}-\Delta_{\mu(a)}+\Delta_{\nu(a)}}\varphi_a$$

によって定める．$\Phi^{(a)}_0\big|V^+_{\nu(a)}\otimes V_{\mu(a)}\otimes V_{\lambda(a)}=\varphi_a$ である．

<u>Lemma 4.3</u>

$\Phi(z)$ は $(\Gamma, \vec{\chi})$ に対する chiral vertex operators $\Phi_a(z_{a,\delta(a)})$ $(1\le a\le N)$ の形式的合成とし，$F(z):=\Phi(z)\big|V^+_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{b=0}^{N}V_{\lambda_b}$ とおく．$k':=(k_i)_{i\in I}$ とおく．$F(z)$ は次のように展開される：

$$F(z)=\sum_{k'\in\mathbb{Z}^{N-1}_{\ge 0}}\Big(\tau_\infty^{\varepsilon_\infty}\prod_{i\in I}\tau_i^{\varepsilon_i+k_i}\Big)F_{k'},\quad F_{k'}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\Big(\bigotimes_{b=0}^{N}V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty}\Big).$$

そして，特に F_0 は φ_a $(1\le a\le N)$ を diagram Γ にしたがって合成してできる $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\big(\bigotimes_{b=0}^{N}V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty}\big)$ 元に等しい．

Proof

Lemma 4.2 を $n_b=0$ $(0\le b\le N)$, $n_\infty=0$ の場合に適用すると上のように展開されることがわかる. そして, $F_0=\Phi_{0\cdots0}\Big|_{V^+_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{b=0}^{N}V_{\lambda_b}}$ であり, $\Phi_{0\cdots0}$ は $\Phi^{(a)}_0$ $(1\le a\le N)$ を diagram Γ にしたがって合成したものになるから, 最後の主張も明らか. □

§§4.2. Chiral vertex operators の合成が conformal block をなすこと

Lemma 4.4

$\Phi(z)$ は $(\Gamma,\vec{\lambda})$ に対する chiral vertex operators の形式的合成とする. このとき, $\Phi(z)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{H}^+_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}\mathcal{H}_{\lambda_a},\ \tau^{\xi}\mathbb{C}((\tau))\right)$ の中で (2.3) と (2.4) をみたす.

:

これより, Lemma 2.3 の証明と同様にして次が出ることがわかる.

Corollary 4.5

$\Phi(z)$ は $(\Gamma,\vec{\lambda})$ に対する chiral vertex operators の形式的合成とし,

$$F(z):=\Phi(z)\Big|_{V^+_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}V_{\lambda_a}}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(V^+_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}V_{\lambda_a},\ \tau^{\xi}\mathbb{C}[[\tau']]\right)$$

とおくと, $F(z)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(V^+_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^{N}V_{\lambda_a},\ \tau^{\xi}\mathbb{C}[[\tau']]\right)$ の中で $\mathfrak{g}$-invariance $\rho_\infty(X)F(z)=\sum_{a=0}^{N}F(z)\rho_a(X)$ $(X\in\mathfrak{g})$ および KZ equation (2.7) をみたす.

Proof of Lemma 4.4

Γに含まれる頂点の個数Nに関する帰納法で証明する．N=1の場合は，chiral vertex operatorの定義より明らか．すなわち，type $(\nu;\mu\lambda)$のchiral vertex operator $\Psi(\zeta)$に対して，$(\{A_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, e)$は$(\{X(m)\}, 0)$ $(X\in\mathfrak{g})$または$(\{L_m\}, 1)$とすると次が成立する：

(1α) $\quad [A_m, \Psi(\zeta;v)] = \sum_{i\geq -e}\binom{m+e}{i+e}\zeta^{m-i}\Psi(\zeta;A_i v)$,

(1β) $\quad \Psi(\zeta;A_m v) = \sum_{i\leq m}\binom{m+e}{m-i}(-\zeta)^{m-i}A_i\Psi(\zeta;v) - \Psi(\zeta;v)\sum_{i\geq -e}\binom{m+e}{i+e}(-\zeta)^{m-i}A_i$,

(2) $\quad \Psi(\zeta;L_{-1}v) = \dfrac{d}{d\zeta}\Psi(\zeta;v) \qquad (v\in\mathcal{H}_\mu)$.

NまでLemma 4.4が正しいと仮定する．すなわち，$\Phi(z)$は(2.3), (2.4)をみたすと仮定する．$0\leq n\leq N$とし，$\nu:=\lambda_n$とする．$v_a\in\mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0\leq a\leq N, a\neq n)$, $v_\infty\in\mathcal{H}^\dagger_{\lambda_\infty}$, $u\in\mathcal{H}_\lambda$, $v\in\mathcal{H}_\mu$に対する

$$\Phi'(z,\zeta) : v_\infty\otimes\bigotimes_{\substack{0\leq a\leq n\\ a\neq n}} v_a\otimes v\otimes u \mapsto \langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|v_{n+1}\rangle|\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle|v_{n-1}\rangle\cdots|v_0\rangle$$

が(2.3), (2.4)を形式的にみたすことを示せばよい．

$\Phi'(z,\zeta)$が(2.3)をみたすことを示そう．これは$\Phi(z)$が(2.3)をみたすことと，$\Psi(\zeta)$が(2)をみたすことと(1α)より$[L_{-1},\Psi(\zeta;v)] = \Psi(\zeta;L_{-1}v)$が成立することより示される．例えば，$1\leq n\leq N$のとき，

$$\begin{aligned}
&\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;v)L_{-1}u\rangle\cdots|v_0\rangle\\
&= \langle v_\infty|\Phi(z)\rho_n(L_{-1})|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle\cdots|v_0\rangle\\
&\quad - \langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;L_{-1}v)u\rangle\cdots|v_0\rangle\\
&= \langle v_\infty|\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\Phi(z)\right)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle\cdots|v_0\rangle
\end{aligned}$$

$$+\ \langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|\frac{\partial}{\partial z_n}\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$=\frac{\partial}{\partial z_n}\Big\{\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle\cdots|v_0\rangle.$$

他の場合も同様である.

$\Phi'(z,\zeta)$ が (2.4) をみたすことを示そう. これは $\Phi(z)$ が (2.4) をみたすことと $\Psi(\zeta)$ が $(2\alpha,\beta)$ をみたすことより示される. $\Phi(z)$ が (2.4α) をみたすことより,

$$\langle v_\infty A_m|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$=\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|\sum_{i\geq -e}\binom{m+e}{i+e}z_n^{m-i}A_i\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$+\sum_{\substack{1\leq a\leq N\\ a\neq n}}\sum_{i\geq -e}\binom{m+e}{i+e}z_a^{m-i}\langle v_\infty|\Phi(z)\rho_a(A_i)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$+\ \langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle\cdots|A_mv_0\rangle$$

が成立する. そして, (2α) より $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\big(\mathcal{H}_\nu^{+}\otimes\mathcal{H}_\mu\otimes\mathcal{H}_\lambda,(\zeta-z_n)^{-\Delta_\lambda-\Delta_\mu+\Delta_\nu}\mathbb{C}((z_n,\frac{\zeta-z_n}{z_n}))\big)$ の中で以下が成立する:

$$\Big[\sum_{i\geq -e}\binom{m+e}{i+e}z_n^{m-i}A_i\ ,\ \Psi(\zeta-z_n;v)\Big]$$
$$=\sum_{i\geq -e}\sum_{j\geq -e}\binom{m+e}{i+e}\binom{i+e}{j+e}z_n^{m-i}(\zeta-z_n)^{i-j}\,\Psi(\zeta-z_n;A_jv)$$
$$=\sum_{j\geq -e}\binom{m+e}{j+e}\Big\{\sum_{i\geq j}\binom{m-j}{i-j}z_n^{m-i}(\zeta-z_n)^{i-j}\Big\}\Psi(\zeta-z_n;A_jv)$$
$$=\sum_{j\geq -e}\binom{m+e}{j+e}\zeta^{m-j}\,\Psi(\zeta-z_n;A_jv).$$

これより, $\Phi'(z,\zeta)$ が形式的に (2.4α) をみたすことがわかる. (2.4β) の方も同様である. 例えば, $\Phi(z)$ が (2.4β) をみたすことと $\Psi(\zeta)$ が (2β) をみたすことより, 以下が成立する:

$$
\begin{aligned}
&\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;A_m v)u\rangle\cdots|v_0\rangle\\
&=-\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;v)\sum_{i\geq -e}\binom{m+e}{i+e}(z_n-\zeta)^{m-i}A_i v\rangle\cdots|v_0\rangle\\
&\quad+\sum_{i\leq m}\sum_{j\leq i}\binom{m+e}{m-i}\binom{i+e}{i-j}(z_n-\zeta)^{m-i}(-z_n)^{i-j}\langle v_\infty A_j|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle\cdots|v_0\rangle\\
&\quad+\sum_{\substack{0\leq a\leq N\\ a\neq n}}\sum_{i\leq m}\sum_{j\geq -e}\binom{m+e}{m-i}\binom{i+e}{i-j}(z_n-\zeta)^{m-i}(z_a-z_n)^{i-j}\langle v_\infty|\Phi(z)\rho_a(A_j)|v_N\rangle\cdots|\Psi(\zeta-z_n;v)u\rangle\cdots|v_0\rangle.
\end{aligned}
$$

そして，$\mathbb{C}((z_n,\frac{\zeta-z_n}{z_n}))$の中で，

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\leq m}\sum_{j\leq i}\binom{m+e}{m-i}\binom{i+e}{i-j}(z_n-\zeta)^{m-i}(-z_n)^{i-j}C_j&=\sum_{j\leq m}\binom{m+e}{m-j}\left\{\sum_{j\leq i\leq m}\binom{m-j}{i-j}(z_n-\zeta)^{m-i}(-z_n)^{i-j}\right\}C_j\\
&=\sum_{j\leq m}\binom{m+e}{m-j}(-\zeta)^{m-j}C_j
\end{aligned}
$$

が成立し，同様にして，$\mathbb{C}((z_n-z_a,\frac{z_n-\zeta}{z_n-z_a}))$の中で，

$$
\sum_{i\leq m}\sum_{j\geq -e}\binom{m+e}{m-i}\binom{i+e}{j+e}(z_n-\zeta)^{m-i}(z_a-z_n)^{i+j}C_j=\sum_{j\geq -e}\binom{m+e}{j+e}(z_a-\zeta)^{m-j}C_j
$$

が成立する．これより，上の特別な場合に(2.4β)が成立することがわかる．他の場合も同様である．　□

Lemma 4.6

(2.9)によって定められるconnection ωは τを使って書き直すと次のような形に表わされる：

$$
\omega=\sum_{0\leq a<b\leq N}\Omega_{ab}\frac{d\tau_\infty}{\tau_\infty}+\sum_{i\in I}B_i(\tau)\frac{d\tau_i}{\tau_i}.
$$

ここで，$B_i(\tau)$ $(i\in I)$は (4.4) で定められたU上で正則な$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\bigotimes_{b=0}^{N}V_b\right)$-値函数となる．特に KZ equation (2.7) は U上で確定特異点型である．

Proof

Lemma 4.1の記号のもとで，

$$d\log z_{ab} = d\log f(\tau') + \frac{d\tau_\infty}{\tau_\infty} + \sum_{\substack{i\in I \\ i\in A}} \frac{d\tau_i}{\tau_i}$$

が成立する。$f(0)=\pm 1$ より $d\log f(\tau')$ は十分小さな $r>0$ に対して (4.4) によって定められた U 上で正則になる。これを (2.9) に代入して整理すれば、目的の結果が得られる。 □

Lemma 4.7

$\Phi(z)$ は $(\Gamma, \vec{\lambda})$ に対する chiral vertex operators $\Phi_a(z_{a,\delta(a)})$ $(1\le a\le N)$ の形式的合成とし、$F(z) := \Phi(z)|V^+_{\lambda_\infty} \otimes \bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}$ とおく。M, U, Y はそれぞれ (4.1), (4.4), (4.5) によって定められたものとする。このとき、以下が成立する:

(1) $F(z)$ は $U\setminus Y$ 上で収束し、M 上の多価正則函数に解析接続されて、$\mathfrak{g}$-invariance $\rho_\infty(X)F(z) = \sum_{a=0}^{N} F(z)\rho_a(X)$ $(X\in\mathfrak{g})$ および KZ equation (2.7) をみたす。

(2) $F(z)$ の唯一の leading term は次の形をしている;

$$\tau_\infty^{\varepsilon_\infty} \prod_{i\in I} \tau_i^{\varepsilon_i} F_0 \quad , \quad F_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty}\right).$$

さらに、F_0 は (4.10) によって定められた φ_a $(1\le a\le N)$ を diagram Γ にしたがって合成したものになる。

Proof

Lemma 4.6 より KZ equation (2.7) は U 上確定特異点型で Y 上に特異性をもつ。Corollary 4.5 より $F(z)$ は $\mathfrak{g}$-invariance および KZ equation (2.7) をみたす。Lemma A.2 および Lemma 4.3 より、$F(z)$ は $U\setminus Y$ 上収束する。そして KZ equation (2.7) の形より、$F(z)$ が M 上の多価正則函数に拡張されることがわかる。これで (1) が示せた。(2) は Lemma 4.3 より明らか。 □.

Theorem 4.8

$\Phi(z)$は$(\Gamma,\vec{\lambda})$に対するchiral vertex operatorsの形式的合成とする。M, U, Yはそれぞれ(4.1), (4.4), (4.5)によって定められたものとする。このとき、$\Phi(z)$は$U\setminus Y$上収束し、M上の$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{\dagger}_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{b=0}^{N}\mathcal{H}_{\lambda_b}, \mathbb{C})$-値多価正則函数に拡張されて、type $\vec{\lambda}$のconformal blockを定める。

Proof

Lemma 4.7より、$F(z)=\Phi(z)|_{V^{\dagger}_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{b=0}^{N}V_{\lambda_b}}$は$U\setminus Y$上で収束し、$M$上の多価正則函数に拡張される。Lemma 4.4より$\Phi(z)$は形式的にconformal blockの条件をみたし、Lemma 2.2の証明の仕方より$\Phi(z)$は$F(z)$から一意的にしかも$F(z)$が収束すれば$\Phi(z)$も収束するような形で定まることがわかる。したがって、$\Phi(z)$は$U\setminus Y$上収束し、M上の多価正則函数に拡張されて、conformal blockを定める。 □

Remark 4.9

$(\Gamma,\vec{\lambda})$に対するchiral vertex operatorsの合成は$\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\ell\neq -g)$, $\vec{\lambda}\in P_\ell^{N+1}$, $\vec{\mu}\in P_\ell^{N-1}$の場合のみに定義したが、その証明の仕方より、Theorem 4.8は任意の$\ell\in\mathbb{C}$ $(\ell\neq -g)$, $\vec{\lambda}\in(\mathfrak{h}^*)^{N+1}$, $\vec{\mu}\in(\mathfrak{h}^*)^{N-1}$に対しても成立することがわかる。

§§4.3. Conformal block の factorization

引き続き固定された level は $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\ell \neq -g$) とし，$\vec{\lambda} = (\lambda_\infty ; \lambda_N \cdots \lambda_0) \in P_\ell^{N+2}$ とする．そして，§§4.1 で定めた記号を自由に用いる．

Γ は diagram とし，$\lambda, \mu, \nu \in P_\ell$，$\vec{\lambda} \in P_\ell^{N+2}$ に対して以下のようにおく：

$$V_{\mu\lambda}^{\nu} := \{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu \otimes V_\lambda, V_\nu) \mid \varphi \text{ は } (3.16a\sim e) \text{ をみたす} \},$$

$$\mathcal{V}_{\mu\lambda}^{\nu} := \{ \text{type } (\nu ; \mu\lambda) \text{ の chiral vertex operators 全体} \},$$

$$V(\Gamma, \vec{\lambda}) := \bigoplus_{\vec{\mu} \in P_\ell^{N-1}} \bigotimes_{a=1}^{N} V_{\mu(\vec{\mu},a)\,\lambda(\vec{\mu},a)}^{\nu(\vec{\mu},a)},$$

$$\mathcal{V}(\Gamma, \vec{\lambda}) := \bigoplus_{\vec{\mu} \in P_\ell^{N-1}} \bigotimes_{a=1}^{N} \mathcal{V}_{\mu(\vec{\mu},a)\,\lambda(\vec{\mu},a)}^{\nu(\vec{\mu},a)},$$

$$\mathcal{V}(\vec{\lambda}) := \{ \text{type } \vec{\lambda} \text{ の conformal blocks 全体} \},$$

$$\mathcal{S}(\vec{\lambda}) := \{ \vec{\lambda} \text{ に対する条件 } (2.6\sim 8) \text{ をみたす } F(z) \text{ 全体} \}.$$

以上の記号のもとで今までの結果をまとめよう．Lemma 2.2 と Theorem 3.11 より，同型 $V_{\mu\lambda}^{\nu} \simeq \mathcal{V}_{\mu\lambda}^{\nu}$ が成立する．よって，$V(\Gamma, \vec{\lambda}) \simeq \mathcal{V}(\Gamma, \vec{\lambda})$ も成立する．Theorem 4.8 より chiral vertex operators の合成によって次の写像が定まる：

$$\theta_\Gamma : \mathcal{V}(\Gamma, \vec{\lambda}) \longrightarrow \mathcal{V}(\vec{\lambda}),$$

$$\Theta_\Gamma : V(\Gamma, \vec{\lambda}) \longrightarrow \mathcal{V}(\vec{\lambda}).$$

Lemma 2.3 より，type $\vec{\lambda}$ の conformal block の $V_{\lambda_\infty}^{\dagger} \otimes \bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}$ 上への制限は次の写像を定める：

$$\eta : \mathcal{V}(\vec{\lambda}) \longrightarrow \mathcal{S}(\vec{\lambda}).$$

Lemma 2.2より, ηは単射であることを注意しておく. 我々の目標は次のTheoremを証明することである.

Theorem 4.10 (Main theorem)

任意の$N \geq 1$と頂点をN個もつ任意のdiagram Γと$\vec{\lambda} \in P_\ell^{N+2}$に対して, θ_Γ, Θ_Γ, ηは同型写像である:

$$\begin{array}{ccccc} V(\Gamma, \vec{\lambda}) & \xrightarrow[\sim]{\Theta_\Gamma} & & & \\ \wr\| & & \mathcal{V}(\vec{\lambda}) & \xrightarrow[\sim]{\eta} & \mathcal{S}(\vec{\lambda}) \\ \mathcal{V}(\Gamma, \vec{\lambda}) & \xrightarrow[\theta_\Gamma]{\sim} & & & \end{array} .$$

Remark 4.11

$\mathcal{S}(\vec{\lambda})$はその定義より$M = \{ z = (z_1, \cdots, z_N) \in \mathbb{C}^N \mid 0, z_1, \cdots, z_N$は互いに異なる$\}$の上にlocal systemを定める. よって, 同型ηによってconformal blocks全体$\mathcal{V}(\vec{\lambda})$はM上のlocal systemを定め, ηはlocal systemとしての同型を導くことがわかる. これに対して, diagram Γに対するθ_Γ, Θ_Γは$U \setminus Y (\subset M)$の上における局所的な同型であることを注意しておく. また, θ_ΓとΘ_Γにはconformal blockの多価性による不定性があるので, θ_ΓとΘ_Γは適当な分枝を選んで定められることになる.

Theorem 4.10の証明を一般のdiagramに対して直接行なうこともできるが, 記号が複雑になるので, まず特別なdiagramに対してTheorem 4.10を証明し, それから一般のdiagramに対する結果がしたがうことを示す.

$\vec{\mu} \in P_+^{N-1}$ に対して $\varphi_a \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\mu(\vec{\mu},a)} \otimes V_{\lambda(\vec{\mu},a)}, V_{\nu(\vec{\mu},a)})$ $(1 \leq a \leq N)$ をとり diagram Γ にしたがって合成すると $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty})$ の元を得る. これは, 次の自然な同型を導く;

$$(4.11) \qquad \bigoplus_{\vec{\mu} \in P_+^{N-1}} \bigotimes_{a=1}^{N} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\mu(\vec{\mu},a)} \otimes V_{\lambda(\vec{\mu},a)}, V_{\nu(\vec{\mu},a)}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty}).$$

これを使って, まず次を示そう.

<u>Lemma 4.12</u>

任意の diagram Γ と $\vec{\lambda} \in P_\ell^{N+2}$ に対して, θ_Γ, Θ_Γ, η は単射である.

<u>Proof</u>

Θ_Γ と η の合成 $\eta \circ \Theta_\Gamma$ が単射であることを示せばよい. $\vec{\mu} = (\mu_i)_{i \in I} \in P_\ell^{N-1}$ に対して (4.9) によって $\varepsilon = (\varepsilon_\infty, \varepsilon_i\ (i \in I)) \in \mathbb{C}^N$ が定まる. $\varepsilon \in \mathbb{C}^N$ に対して同じ ε を定める $\vec{\mu} \in P_\ell^{N-1}$ の全体を L_ε と表わす. $\varepsilon \in \mathbb{C}^N$ に対して l_ε を

$$l_\varepsilon : \bigoplus_{\vec{\mu} \in L_\varepsilon} \bigotimes_{a=0}^{N} V_{\mu(\vec{\mu},a)\,\lambda(\vec{\mu},a)}^{\nu(\vec{\mu},a)} \to \mathcal{S}(\vec{\lambda}), \quad \bigotimes_{a=0}^{N} \varphi_a \mapsto \eta\Big(\Theta_\Gamma\big(\bigotimes_{a=0}^{N} \varphi_a\big)\Big)$$

と定める. l_ε が単射であることを示せばよい. ところが, さらに, Lemm 4.7 (2) より l_ε の像の leading exponents はすべて ε になるので, l_ε の像の leading term の係数をとることによって次の写像が定まる:

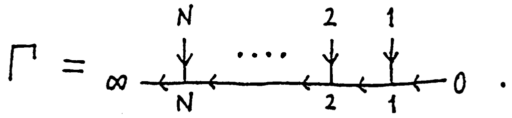
$$\bigoplus_{\vec{\mu} \in L_\varepsilon} \bigotimes_{a=0}^{N} V_{\mu(\vec{\mu},a)\,\lambda(\vec{\mu},a)}^{\nu(\vec{\mu},a)} \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty}).$$

ところがこれは (4.11) より単射である. したがって, l_ε は単射である. $\square$.

以下, 特別な diagram に対して Theorem 4.10 を証明しよう.

Lemma 4.13 ([TK1])

diagram Γ が次の形のとき，θ_Γ, Θ_Γ, η は同型写像になる：



Proof

この場合，τ と z の関係式 (4.3) は次のようになる：

$$z_N = \tau_N,\quad z_{N-1} = \tau_N \tau_{N-1},\quad \cdots,\quad z_2 = \tau_N \cdots \tau_2,\quad z_1 = \tau_N \cdots \tau_2 \tau_1 .$$

以下，$\tau' = (\tau_1, \cdots, \tau_{N-1})$ の函数で $\tau'=0$ の近傍で正則で $\tau'=0$ で 0 になるものを $O(\tau')$ と略記する．$z_0 := 0$, $z_{ab} := z_a - z_b$ とおく．$U(\mathfrak{g})$ の Casimir element $\sum_{p=1}^{\dim \mathfrak{g}} J^p J^p$ を C と表わす．Lemma 4.12 より，Θ_Γ と η の合成 $\iota_\Gamma = \eta \circ \Theta_\Gamma$ が全射であることを示せばよい．

Step 1: KZ equation (2.7) が座標系 τ でどのような形になるか調べる．

$0 \le a < b \le N$ のとき，$z_{ab} = z_a - z_b = -\tau_N \cdots \tau_b (1 + O(\tau'))$ であるから，

$$d\log z_{ab} = \frac{d\tau_N}{\tau_N} + \cdots + \frac{d\tau_b}{\tau_b} + d\log(1 + O(\tau')).$$

よって，(2.9) によって定められた ω は次のような形になる：

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \le a, b \le N \\ a \ne b}} \Omega_{ab}\, d\log z_{ab} = \sum_{0 \le a < b \le N} \Omega_{ab}\, d\log z_{ab} \\
&= \sum_{0 \le a < b \le N} \Omega_{ab} \left(\sum_{b \le i \le N} \frac{d\tau_i}{\tau_i} + d\log(1 + O(\tau')) \right) \\
&= \sum_{1 \le i \le N} \left(\frac{1}{\tau_i} \sum_{0 \le a < b \le i} \Omega_{ab} + A_i(\tau') \right) d\tau_i .
\end{aligned}$$

ここで，$A_i(\tau')$ は $\tau'=0$ の近傍で正則な $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}\right)$-値のある函数である．

そして, $\kappa := \ell + g$, $D := \dim \mathfrak{g}$ とおくと, $1 \le i \le N$ に対して,

$$R_i := \sum_{0 \le a < b \le i} \Omega_{ab} = \frac{1}{2\kappa} \sum_{\substack{0 \le a, b \le i \\ a \ne b}} \sum_{p=1}^{D} \rho_a(J^p)\rho_b(J^p)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \sum_{p=1}^{D} \left\{ \left(\sum_{a=0}^{i} \rho_a(J^p) \right)^2 - \sum_{a=0}^{i} \rho_a(J^p)^2 \right\}.$$

よって, $B_i := \sum_{p=1}^{D} \left(\sum_{a=0}^{i} \rho_a(J^p) \right)^2$, $C_a := \sum_{p=1}^{D} \rho_a(J^p)^2$ $(0 \le a \le N)$ とおくと,

$$(1) \qquad R_i = \frac{1}{2\kappa} B_i - \frac{1}{2\kappa} \sum_{a=0}^{i} C_a \qquad (1 \le i \le N).$$

ここで, B_i は $\bigotimes_{a=0}^{i} V_{\lambda_a}$ 上への Casimir element C の作用であり, C_a は V_{λ_a} への Casimir element C の作用であることを注意しておく. 以上の記号のもとで, KZ equation (2.7) は次のような形に書かれる:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} F = F \left(\frac{1}{\tau_i} R_i + A_i(\tau') \right) \qquad (1 \le i \le N).$$

Step 2: R_i $(1 \le i \le N)$ の $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty})$ への右からの作用を同時対角化する.

$H_{\mu\lambda}^{\nu} := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu \otimes V_\lambda, V_\nu)$ とおき, $\vec{\mu} \in (\mu_1, \cdots, \mu_{N-1}) \in P_+^{N-1}$ に対して,

$$H(\vec{\mu}) := H_{\lambda_N, \mu_{N-1}}^{\lambda_\infty} \otimes H_{\lambda_{N-1}, \mu_{N-2}}^{\mu_{N-1}} \otimes \cdots \otimes H_{\lambda_2 \mu_1}^{\mu_2} \otimes H_{\lambda_1 \lambda_0}^{\mu_1}$$

とおく. このとき, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty})$ の直和分解 (4.11) は次のように書ける:

$$(2) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty}\right) = \bigoplus_{\vec{\mu} \in P_+^{N-1}} H(\vec{\mu}).$$

$\vec{\mu} \in P_+^{N-1}$ に対して, (4.9) のように $\varepsilon(\vec{\mu}) = (\varepsilon_1(\vec{\mu}), \cdots, \varepsilon_N(\vec{\mu}))$ を次のように定める:

$$\varepsilon_i(\vec{\mu}) := \Delta_{\mu_i} - \sum_{b=0}^{i} \Delta_{\lambda_b} \quad (1 \le i \le N-1) \ , \ \varepsilon_N(\vec{\mu}) := \Delta_{\lambda_\infty} - \sum_{b=0}^{N} \Delta_{\lambda_b}.$$

$\vec{\mu} \in P_+^{N-1}$ に対して，$\varphi = \varphi_N \otimes \varphi_{N-1} \otimes \cdots \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_1 \in H(\vec{\mu})$ をとると，$v_b \in V_{\lambda_b}$ $(0 \leq b \leq N)$ と $1 \leq i \leq N$ に対して (1) より

$$\varphi(R_i \bigotimes_{b=0}^{N} v_{\lambda_b}) = \varphi_N(\cdots(v_{i+1} \otimes \frac{C}{2\kappa} \varphi_i(v_i \otimes \varphi_{i-1}(\cdots(v_2 \otimes \varphi_1(v_1 \otimes v_0))\cdots)))\cdots)$$
$$+ \sum_{a=0}^{i} \varphi(v_N \otimes \cdots \otimes (\frac{C}{2\kappa} v_a) \otimes \cdots \otimes v_0)$$
$$= \varepsilon_i(\vec{\mu}) \varphi(\bigotimes_{b=0}^{N} v_b).$$

すなわち，$\vec{\mu} \in P_+^{N-1}$，$\varphi \in H(\vec{\mu})$ に対して，

$$\varphi R_i = \varepsilon(\vec{\mu}) \varphi \qquad (1 \leq i \leq N).$$

Step 3：(2.6), (2.7) をみたす $F(z)$ の座標系 τ における leading term の形を調べる．(2.6), (2.7) をみたす $F(z)$ をとり，f は F の座標系 τ における leading term とする．f は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty})$-値函数であり，Step 1 と Lemma A.2 より，次の方程式をみたす：

(3) $$\tau_i \frac{\partial}{\partial \tau_i} f = f R_i \quad (1 \leq i \leq N).$$

したがって，Step 2 より，ある $\vec{\nu} \in P_+^{N-1}$ に対する $\varepsilon = \varepsilon(\vec{\nu}) \in \mathbb{C}^N$ と $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty})$ が存在して，

(4) $$f = \tau_1^{\varepsilon_1} \cdots \tau_N^{\varepsilon_N} \varphi \;, \quad \varphi R_i = \varepsilon_i \varphi \quad (1 \leq i \leq N)$$

が成立する．

Step 4：条件 (2.8) が座標系 τ でどのような形になるかを調べよう．

$\lambda_a := \ell - (\theta|\lambda_a) + 1$，$r_a := (r_b^{(a)})_{a<b\leq N}$，$|r_a| := \sum_{a<b\leq N} r_b^{(a)}$ $(1 \leq a \leq N)$ とおき，$r_a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^K$，$K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$|r_a| = K$ に対して，多項係数を $\binom{K}{r_a} := \frac{K!}{\prod_{a<b\leq N} r_b^{(a)}!}$ と

書く. このとき, $1 \le a \le N$ に対して,

$$\left(\sum_{\substack{0 \le b \le N \\ b \ne a}} \frac{\rho_b(E_\theta)}{z_{ab}}\right)^{L_a} = \left(\sum_{0 \le b < a} \frac{\rho_b(E_\theta)}{\tau_N \cdots \tau_a (1+O(\tau'))} + \sum_{a < b \le N} \frac{\rho_b(E_\theta)}{\tau_N \cdots \tau_b(-1+O(\tau'))}\right)^{L_a}$$

$$= \sum_{K=0}^{L_a} \binom{L_a}{K} \left(\sum_{0 \le b < a} \frac{\rho_b(E_\theta)}{\tau_N \cdots \tau_a}(1+O(\tau'))\right)^{L_a - K} \left(\sum_{a < b \le N} \frac{\rho_b(E_\theta)}{\tau_N \cdots \tau_b}(-1+O(\tau'))\right)^{K}$$

$$= \sum_{K=0}^{L_a} \binom{L_a}{K} \sum_{\substack{r_a \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^K \\ |r_a| = K}} \binom{K}{r_a} \left((-1)^K + O(\tau')\right) \prod_{a \le i \le N} \tau_i^{K - L_a - \sum_{a < b \le i} r_b^{(a)}}$$

$$\times \left(\sum_{0 \le b < a} \rho_b(E_\theta)\right)^{L_a - K} \prod_{a < b \le N} \rho_b(E_\theta)^{r_b^{(a)}}.$$

この計算の最後の行を見ると, τ について最も特異な項は $K=0$ のとき得られることがわかるので,

$$\left(\sum_{\substack{0 \le b \le N \\ b \ne a}} \frac{\rho_b(E_\theta)}{z_{ab}}\right)^{L_a} = \prod_{a \le i \le N} \tau_i^{-L_a} \left(\sum_{0 \le b < a} \rho_b(E_\theta)\right)^{L_a} + \text{less singular}$$

となる. したがって, 条件(2.8)は $1 \le a \le N$ に対して次のような形になる:

$$(5) \quad \prod_{a \le i \le N} \tau_i^{L_a} \langle v_\infty | F(z) \left(\sum_{0 \le b < a} \rho_b(E_\theta)\right)^{L_a} |v_N\rangle \cdots |v_{a+1}\rangle |\lambda_a\rangle |v_{a-1}\rangle \cdots |v_0\rangle$$

$$+ \text{ less singular } = 0$$

$$(v_b \in V_{\lambda_b} \ (0 \le b \le N,\ b \ne a),\ v_\infty \in V_{\lambda_\infty}^{\dagger}).$$

Step 5: (2.6~8)をみたす $F(z)$ の leading term の形を調べる.

$V(\Gamma, \vec{\lambda})$ は今の場合次のようになる:

$$V(\Gamma, \vec{\lambda}) = \bigoplus_{\vec{\mu} \in P_\ell^{N-1}} V_{\lambda_N \mu_{N-1}}^{\lambda_\infty} \otimes V_{\lambda_{N-1} \mu_{N-2}}^{\mu_{N-1}} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_2 \mu_1}^{\mu_2} \otimes V_{\lambda_1 \lambda_0}^{\mu_1}.$$

(2.6~8) をみたす $F(z)$ をとり, $F(z)$ の座標系 τ における任意の leading term

fをとる。Step 3 より，ある $\vec{\nu} \in P_+^{N-1}$ に対する $\varepsilon = \varepsilon(\vec{\nu}) \in \mathbb{C}^N$ と

$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{b=0}^{N} V_{\lambda_b}, V_{\lambda_\infty})$ があって，fは(3)のように表わされる。φを(2)にしたがって次のように分解する：

$$\varphi = \bigoplus_{\substack{\vec{\mu} \in P_+^{N-1} \\ \varepsilon(\vec{\mu}) = \varepsilon}} \varphi_{\vec{\mu}} = \bigoplus_{\vec{\mu} \in P_+^{N-1}} \varphi_{\mu_{N-1}} \otimes \varphi^{\mu_{N-1}}_{\mu_{N-2}} \otimes \cdots \otimes \varphi^{\mu_2}_{\mu_1} \otimes \varphi^{\mu_1}.$$

fを(5)に代入したとき，その最も特異な項は0にならなければならない。よって，任意の $\vec{\mu} \in P_+^{N-1}$ $(\varepsilon(\vec{\mu}) = \varepsilon)$ と $1 \leq a \leq N$ に対して，

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{\vec{\mu}}\Big(\big(\big(\sum_{0 \leq b < a} \rho_b(E_\theta)\big)^{L_a} (v_N \otimes \cdots \otimes v_{a+1} \otimes |\lambda_a\rangle \otimes v_{a-1} \otimes \cdots \otimes v_0)\Big) \\ &= \varphi_{\mu_{N-1}}\Big(v_N \otimes \varphi^{\mu_{N-1}}_{\mu_{N-2}}\Big(\cdots\Big(v_{a+1} \otimes E_\theta^{L_a} \varphi^{\mu_a}_{\mu_{a-1}}\Big(|\lambda_a\rangle \otimes \varphi^{\mu_{a-1}}_{\mu_{a-2}}\big(\cdots\big(\varphi^{\mu_1}(v_1 \otimes v_0)\big)\cdots\big)\Big)\Big)\cdots\Big) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\big(v_b \in V_{\lambda_b}\ (0 \leq b \leq N,\ b \neq a)\big)$$

$\varphi_{\vec{\mu}} \neq 0$ と仮定する。$a = N$ のときの(6)と Lemma 3.13 の(3.17C)より，$\mu_{N-1} \in P_\ell$ かつ $\varphi_{\mu_{N-1}} \in V^{\lambda_\infty}_{\lambda_N, \mu_{N-1}}$ である。よって，$a = N-1$ のときの(6)と(3.17C)より，$\mu_{N-2} \in P_\ell$ かつ $\varphi^{\mu_{N-1}}_{\mu_{N-2}} \in V^{\mu_{N-1}}_{\lambda_{N-1}\, \mu_{N-2}}$ である。以下同様に続けて，$\lambda_{N-1}, \cdots, \lambda_1 \in P_\ell$ でかつ $\varphi_{\vec{\mu}} \in V^{\lambda_\infty}_{\lambda_N\, \mu_{N-1}} \otimes \cdots \otimes V^{\mu_1}_{\lambda_1 \lambda_0}$ となることがわかる。したがって，

$$\varphi \in V(\Gamma, \vec{\lambda})$$

が成立する。

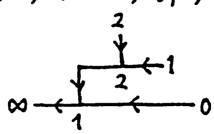
Step 6： $\iota_\Gamma = \eta \circ \Theta_\Gamma$ が全射であることを示す。

(2.6〜8)をみたす $F = F(z)$ をとり，Fの座標系 τ における leading term f をとる。Step 5 と Lemma 4.7 (2) より，ある $\varphi \in V(\Gamma, \vec{\lambda})$ が存在して，$\iota_\Gamma(\varphi)$ の(唯一の) leading term が f に等しくなるようにできる。よって，ある $\varphi_1 \in V(\Gamma, \vec{\lambda})$

をとって，$F-\iota_\Gamma(\varphi_1)$ のすべての leading exponents が (A.3) の半順序の意味で F のすべての leading exponents より大きくなるようにできる．この操作を何回か続けることによって，$\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in V(\Gamma,\vec{\lambda})$ をとって，$G:=F-\iota_\Gamma(\varphi_1+\cdots+\varphi_n)$ が次をみたすようにできる：G のすべての leading term f は（それが存在するならば）方程式(3)をみたさない。よって，Lemma A.2 より $G=0$ となることがわかる．これで，ι_Γ が全射であることがわかった．これで，Lemma 4.13 が示せたことになる． □

Lemma 4.14

$N=2$ で diagram Γ が次の形のとき，θ_Γ, Θ_Γ, η は同型写像になる：

$\Gamma =$  .

Proof

Lemma 4.13 と全く同様にして証明できるので，ここでは概略のみを説明する．座標系 τ はこの場合次によって定められる：

$$z_1=\tau_1 \quad , \quad z_2-z_1=\tau_1\tau_2 \quad , \quad z_2=\tau_1(1+\tau_2).$$

$\iota_\Gamma=\eta\circ\Theta_\Gamma$ が全射であることを示せばよい．

Step 1： $\vec{\lambda}=(\lambda_\infty;\lambda_2\lambda_1\lambda_0)\in P_\ell^4$ に対する KZ equation (2.7) は τ で表わすと次の形になる：

(1) $$\frac{\partial}{\partial\tau_1}F=F\left(\frac{\Omega_{01}+\Omega_{02}+\Omega_{12}}{\tau_1}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\tau_2}F=F\left(\frac{\Omega_{12}}{\tau_2}+\frac{\Omega_{02}}{1+\tau_2}\right).$$

そして，次が成立する： $\kappa := \ell + g$ ，$D := \dim \mathfrak{g}$ とおくと，

$$\Omega_{01}+\Omega_{02}+\Omega_{12} = \frac{1}{2\kappa}\sum_{p=1}^{D}\Big(\sum_{a=0}^{2}\rho_a(J^p)\Big)^2 - \frac{1}{2\kappa}\sum_{a=0}^{2}\sum_{p=1}^{D}\rho_a(J^p)^2,$$

$$\Omega_{12} = \frac{1}{2\kappa}\sum_{p=1}^{D}\big(\rho_1(J^p)+\rho_2(J^p)\big)^2 - \frac{1}{2\kappa}\sum_{p=1}^{D}\big(\rho_1(J^p)^2+\rho_2(J^p)^2\big).$$

Step 2： $\Omega_{01}+\Omega_{02}+\Omega_{12}$ と Ω_{12} は以下のように同時対角化される．
$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{a=0}^{2} V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty})$ の直和分解(4.11)は今の場合次のようになる：

(2) $$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\Big(\bigotimes_{a=0}^{2} V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty}\Big) = \bigoplus_{\mu\in P_+}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu\otimes V_{\lambda_0}, V_{\lambda_\infty})\otimes \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_1}, V_\mu).$$

$\varphi\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\mu\otimes V_{\lambda_0}, V_{\lambda_\infty})\otimes \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_1}, V_\mu)$ ，$\mu\in P_+$ に対して，

$$\varphi(\Omega_{01}+\Omega_{02}+\Omega_{12}) = \Big(\Delta_{\lambda_\infty}-\sum_{a=0}^{2}\Delta_{\lambda_a}\Big)\varphi,$$
$$\varphi\,\Omega_{12} = (\Delta_\mu-\Delta_{\lambda_1}-\Delta_{\lambda_2})\varphi.$$

Step 3： (1)の解Fの座標系 τ における leading term f に対して，(1)と Step 2 と Lemma A.2 より，ある $\mu\in P_+$ と $\varphi\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\bigotimes_{a=0}^{2} V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty})$ が存在して，$\varepsilon_1 := \Delta_{\lambda_\infty}-\sum_{a=0}^{2}\Delta_{\lambda_a}$ ，$\varepsilon_2 := \Delta_\mu-\Delta_{\lambda_1}-\Delta_{\lambda_2}$ とおくと次が成立する：

(3) $$f = \tau_1^{\varepsilon_1}\tau_2^{\varepsilon_2}\varphi,$$

$$\varphi(\Omega_{01}+\Omega_{02}+\Omega_{12}) = \varepsilon_1\varphi \ ,\ \varphi\Omega_{12} = \varepsilon_2\varphi.$$

Step 4： 条件(2.8)の $a=0,1$ の場合を座標系 τ で表わすと次のようになる；

(4) $$\sum_{p=0}^{L_0}\binom{L_0}{p}\tau_1^{-L_0}(1+\tau_2)^{-p}\langle v_\infty|F|E_\theta^{p}v_2\rangle|E_\theta^{L_0-p}v_1\rangle|\lambda_0\rangle = 0,$$

(5) $$\sum_{p=0}^{L_1}\binom{L_1}{p}\tau_1^{-L_1}\tau_2^{-p}\langle v_\infty|F|E_\theta^p v_2\rangle|\lambda_1\rangle|E_\theta^{L_1-p}v_0\rangle=0$$

$$(v_b\in V_{\lambda_b}\ (0\le b\le 2),\ v_\infty\in V_{\lambda_\infty})$$

ここで，$L_a:=\ell-(\theta|\lambda_a)+1\ (a=0,1)$ とおいた．

Step 5: $\vec{\lambda}=(\lambda_\infty;\lambda_2\lambda_1\lambda_0)$ に対する (2.6〜8) をみたす $F(z)$ の leading term f を (3) のように表わす．$V(\Gamma,\vec{\lambda})$ は今の場合次のようになる：

$$V(\Gamma,\vec{\lambda})=\bigoplus_{\mu\in P_\ell}V_{\mu\lambda_0}^{\lambda_\infty}\otimes V_{\lambda_2\lambda_1}^{\mu}\ .$$

$\varphi\in V(\Gamma,\vec{\lambda})$ を示そう．φ を (2) にしたがって $\varphi=\bigoplus_{\mu\in P_+}\varphi_\mu\otimes\varphi^\mu$ と分解する．F は (4), (5) をみたすので，f を (4), (5) に代入したとき，それらの最も特異な項は 0 にならなければいけない．よって，$v_b\in V_{\lambda_b}\ (0\le b\le 3)$ に対して，

$$\begin{aligned}0&=\sum_{p=0}^{L_0}\binom{L_0}{p}\varphi\left((E_\theta^p v_2)\otimes(E_\theta^{L_0-p}v_1)\otimes|\lambda_0\rangle\right)\\&=\sum_{\mu\in P_+}\sum_{p=0}^{L_0}\binom{L_0}{p}\varphi_\mu\left(\varphi^\mu\left((E_\theta^p v_2)\otimes(E_\theta^{L_0-p}v_1)\right)\otimes|\lambda_0\rangle\right)\\&=\sum_{\mu\in P_+}\varphi_\mu\left(\left(E_\theta^{L_0}\varphi^\mu(v_2\otimes v_1)\right)\otimes|\lambda_0\rangle\right),\end{aligned}$$

(7) $$0=\varphi\left((E_\theta^{L_1}v_2)\otimes|\lambda_1\rangle\otimes v_0\right)=\sum_{\mu\in P_+}\varphi_\mu\left(\varphi^\mu\left((E_\theta^{L_1}v_2)\otimes|\lambda_1\rangle\right)\otimes v_0\right).$$

$\varphi_\mu\otimes\varphi^\mu\neq 0$ とすると，(7) と Lemma 3.13 の (3.17c) より，$\mu\in P_\ell$ かつ $\varphi^\mu\in V_{\lambda_1\lambda_2}^{\mu}$ となる．さらに，(6) と (3.17c) より，$\varphi_\mu\in V_{\mu\lambda_0}^{\lambda_\infty}$ となることがわかる．したがって，$\varphi\in V(\Gamma,\vec{\lambda})$ が成立する．

Step 6: $\iota_\Gamma=\eta\circ\Theta_\Gamma$ が全射になることが，Lemma 4.13 の Step 6 と

全く同様にして示される．したがって Lemma 4.14 が成立することがわかる． $\square$

$\lambda, \mu, \nu \in P_\ell$ に対して，

$$N_{\mu\lambda}^{\nu} := \dim V_{\mu\lambda}^{\nu} = \dim \mathcal{V}_{\mu\lambda}^{\nu}$$

とおく． Theorem 3.11 と Example 3.16 より次が成立する：

$$N_{\mu\lambda}^{\nu} = N_{\lambda\mu}^{\nu} = N_{\mu\nu^+}^{\lambda^+},$$

$$N_{0\lambda}^{\nu} = \delta_\lambda^\nu, \quad N_{\mu 0}^{\nu} = \delta_\mu^\nu, \quad N_{\mu\lambda}^{0} = \delta_{\mu,\lambda^+}.$$

Lemma 4.15

$N_{\mu\lambda}^{\nu}$ $(\lambda, \mu, \nu \in P_\ell)$ は次をみたす：

$$\sum_{\mu \in P_\ell} N_{\lambda_2 \mu}^{\lambda_\infty} N_{\lambda_1 \lambda_0}^{\mu} = \sum_{\mu \in P_\ell} N_{\mu \lambda_0}^{\lambda_\infty} N_{\lambda_2 \lambda_1}^{\mu} \quad (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_\infty \in P_\ell).$$

Proof

Lemma 4.13 の $N=2$ の場合と Lemma 4.14 より次の同型が成立する：

$$\bigoplus_{\mu \in P_\ell} V_{\lambda_2 \mu}^{\lambda_\infty} \otimes V_{\lambda_1 \lambda_0}^{\mu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(\lambda_\infty; \lambda_2 \lambda_1 \lambda_0) \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{\mu \in P_\ell} V_{\mu \lambda_0}^{\lambda_\infty} \otimes V_{\lambda_2 \lambda_1}^{\mu}.$$

これの次元を計算することによって，Lemma 4.15 が得られる． $\square$

$\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in P_\ell}$ から生成される $\mathbb{Z}$ 上の algebra を

$$\phi_\mu \times \phi_\lambda := \sum_{\nu \in P_\ell} \phi_\nu N_{\mu\lambda}^{\nu}$$

によって定める．この algebra を fusion rule algebra と呼ぶ．以上の結果より，fusion rule algebra は乗法に関する単位元 ϕ_0 をもつ結合的可換環をなすことがわかる．

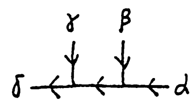
Proof of Theorem 4.10

Lemma 4.12 より，$\dim V(\Gamma, \vec{\lambda}) = \dim \mathcal{S}(\vec{\lambda})$ を示せば十分である．
Lemma 4.13 より次が成立することがわかる；

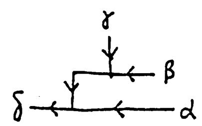
$$(*)\qquad \dim \mathcal{S}(\vec{\lambda}) = \dim \mathcal{V}(\vec{\lambda}) = \sum_{\vec{\mu} \in P_\ell^{N-1}} N_{\lambda_N \mu_{N-1}}^{\lambda_\infty} N_{\lambda_{N-1} \mu_{N-2}}^{\mu_{N-1}} \cdots N_{\lambda_2 \mu_1}^{\mu_2} N_{\lambda_1 \lambda_0}^{\mu_1}.$$

任意の diagram Γ は，次の diagram

から，diagram の中の



となっている部分を



に置き換えるという操作を有限回繰返すことによって得られる．よって，(*) に Lemma 4.14 を有限回適用することによって，任意の diagram Γ に対して次が成立することを示せる；

$$\dim \mathcal{S}(\vec{\lambda}) = \sum_{\vec{\mu} \in P_\ell^{N-1}} \prod_{a=1}^{N} N_{\mu(\vec{\mu},a)\,\lambda(\vec{\mu},a)}^{\nu(\vec{\mu},a)} = \dim V(\Gamma, \vec{\lambda}). \qquad \square$$

Remark 4.16

Theorem 3.14 と Remark 4.9 により，$\ell \notin \mathbb{Q}$ のときも，$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\ell \neq -g)$ の場合における P_ℓ をすべて P_+ に置き換えると，Theorem 4.10 が全く同様にして成立することがわかる．この場合は，$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\ell \neq -g)$ の場合よりも

結果は簡単になっていて，$\mathcal{V}(\Gamma,\vec{\lambda})$，$\mathcal{V}^{\dagger}(\Gamma,\vec{\lambda})$，$\mathcal{S}(\vec{\lambda})$ は以下のようになる：

$$\mathcal{V}(\Gamma,\vec{\lambda}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty}\right) \simeq \mathcal{V}^{\dagger}(\Gamma,\vec{\lambda}),$$

$$\mathcal{S}(\vec{\lambda}) = \{(2.6),(2.7)\text{をみたす } F(z) \text{ 全体}\},$$

したがって，次が成立する：

$$\mathcal{V}^{\dagger}(\vec{\lambda}) \simeq \mathcal{S}(\vec{\lambda}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\bigotimes_{a=0}^{N} V_{\lambda_a}, V_{\lambda_\infty}\right).$$

もちろん，この同型の後者の方は $F\in\mathcal{S}(\vec{\lambda})$ の多価性のため局所的である．

Appendix A　Regular singularityを持つconnectionについて

ここに，§4で使ったregular singularityを持つconnectionについての初等的結果をまとめておく．

次の結果はよく知られている．Uは$\mathbb{C}^N$の単連結領域とし，$A_i(z)$ $(1\le i\le N)$はU上の$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^r)$値正則函数とする．$\omega := \sum_{i=1}^{N} A_i(z)\,dz_i$とおき，次の完全可積分条件を仮定する：

(A.1)　　$d\omega + \omega\wedge\omega = 0.$

次の全微分方程式系を考えよう：

(A.2a)　　$du = \omega u.$

これは，座標を用いて書くと次のようになる：

(A.2b)　　$\dfrac{\partial}{\partial z_i} u = A_i(z)\, u \quad (1\le i\le N).$

このとき，任意の$a\in U$と任意の$c\in\mathbb{C}^r$に対して，U上の$\mathbb{C}^r$-値正則函数$f(z)$で$f(a)=c$かつ(A.2)をみたすものが唯一存在する．

以下，微分方程式(A.2)に確定特異点がある場合について述べよう．そのために，まず，

$$U := \{ z=(z_1,\cdots,z_N)\in\mathbb{C}^N \mid |z_i|<R_i\ (1\le i\le N)\} \quad (R_i>0),$$
$$Y := \{ z\in U \mid z_1 z_2\cdots z_N = 0\}$$

とおき，$B_i(z)$ $(1\le i\le N)$はU上の$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^r)$-値正則函数とする．そして，

$$A_i(z) := \frac{1}{z_i} B_i(z) \quad (1\le i\le N),$$
$$\omega := \sum_{i=1}^{N} A_i(z)\,dz_i = \sum_{i=1}^{N} B_i(z)\,\frac{dz_i}{z_i}$$

とおき，可積分条件(A.1)を仮定する．このとき，微分方程式(A.2)はY上に高々確定特異点を持つと言う．微分方程式(A.2)の多価正則解の原点のまわりにおける展開の形について述べるために以下のようにmulti-indexを用いる． $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$, $m=(m_1,\cdots,m_N)$, $z=(z_1,\cdots,z_N)$に対して，

$$z^\alpha := z_1^{\alpha_1}\cdots z_N^{\alpha_N}$$
$$(\log z)^m := (\log z_1)^{m_1}\cdots(\log z_N)^{m_N},$$
$$|m| := \max\{m_1,\cdots,m_N\}$$

とおく．$\mathbb{C}^N$に半順序を次のように入れる：$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_N)\in\mathbb{C}^N$に対して，

(A.3) $$\alpha\preccurlyeq\beta \quad\Leftrightarrow\quad \beta_i-\alpha_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\ (1\leq i\leq N).$$

<u>Lemma A.1</u>

$f(z)$は$U\setminus Y$上の多価正則函数とし微分方程式(A.2)をみたしているとする．このとき，$f(z)$は$U\setminus Y$上で以下のような形に一意的に展開される：

(A.4a) $$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{C}^N} p_\alpha(z)\, z^\alpha,$$

(A.4b) $$p_\alpha(z)=\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}_{\geq0}^N\\ |m|<r}} C_{\alpha,m}(\log z)^m,\quad C_{\alpha,m}\in\mathbb{C}^r,$$

ここで，$\{p_\alpha(z)\}_{\alpha\in\mathbb{C}^N}$は次をみたす：ある$\beta_1,\cdots,\beta_M\in\mathbb{C}^N$が存在して任意の$\alpha\in\mathbb{C}^N$に対して，

(A.4c) $$p_\alpha(z)\neq 0 \text{ ならば ある } i\ (1\leq i\leq M) \text{ があって } \beta_i\preccurlyeq\alpha.$$

(A.4) のように表わされる $f(z)$ に対して，$p_\alpha(z)\neq 0$ となる $\alpha\in\mathbb{C}^N$ 全体の $\preccurlyeq$ についての極小元の全体を $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_M\in\mathbb{C}^N$ と表わす．このとき，$f(z)$ は

$$f(z)=\sum_{j=1}^{M}\sum_{k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}} p_{\varepsilon_j+k}(z)\,z^{\varepsilon_j+k}$$

と表わされる．$\varepsilon_j\ (1\leq j\leq M)$ を $f(z)$ の leading exponents と呼び，

$$\varphi_j(z):=p_{\varepsilon_j}(z)\,z^{\varepsilon_j}\qquad(1\leq j\leq M)$$

を $f(z)$ の leading terms と呼ぶ．

ω_0 を次のように定める；

$$\omega_0:=\sum_{i=1}^{N}B_i(0)\frac{dz_i}{z_i}\ .$$

このとき，次の (A.5a) もしくは (A.5b) を (A.2) に対する Euler system と呼ぶ：

(A.5a) $\qquad du=\omega_0 u.$

(A.5b) $\qquad z_i\dfrac{\partial}{\partial z_i}u=B_i(0)u\qquad(1\leq i\leq N).$

Lemma A.2

$f(z)$ は $U\setminus Y$ 上の多価正則函数とし微分方程式 (A.2) をみたしているとする．このとき，$f(z)$ の任意の leading term は (A.2) に対応する Euler system (A.5) をみたす．

Lemma A.3

(A.4) のように表わされる (A.2) の形式解は $U\setminus Y$ 上で収束して，(A.2) の $U\setminus Y$ 上での多価正則函数解を与える．

Lemma A.1 は [Kn] の Theorem B.15 と Corollary B.26 を合わせれば出る. Lemma A.2 は [Kn] の Lemma B.22 の特別な場合である. Lemma A.3 は [CL] の Theorem 3.1 に $N=1$ の場合が証明してあり, $N>1$ の場合の証明も同様にしてできる.

Appendix B. Virasoro algebraに対するchiral vertex operator

このAppendixにおいては，[FFu1,2]の結果を利用して[BPZ]におけるminimal modelsにおける(Virasoro algebraに対する) chiral vertex operatorを調べる.

B.1. Feigin-Fuchs [FFu1,2]によるVirasoro algebraの表現についての結果

Virasoro algebraを$\mathcal{L}$と表わす．すなわち，$\mathcal{L} := \bigoplus_{m\in\mathbb{C}} \mathbb{C}L_m \oplus \mathbb{C}\hat{c}$とおき，$\mathcal{L}$にLie algebraの構造を次のように入れる：

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}\ ,\ [L_m, \hat{c}] = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

$\mathcal{L}$の subalgebras $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_-$を次のように定める：

$$\mathcal{L}_+ := \bigoplus_{m>0} \mathbb{C}L_m\ ,\ \mathcal{L}_- := \bigoplus_{m<0} \mathbb{C}L_m\ .$$

$\mathcal{L}_+$ (resp. $\mathcal{L}_-$)は L_1, L_2 (resp. L_{-1}, L_{-2})から生成される.

$(c,h)\in\mathbb{C}^2$であるとする．$K_{c,h}$ (resp. $K^{+}_{c,h}$)を$\mathcal{L}_+$, $\hat{c}-c$, L_0-h (resp. $\mathcal{L}_-$, $\hat{c}-c$, L_0-h)から生成される$U(\mathcal{L})$のleft (resp. right) idealとし，left (resp. right) $\mathcal{L}$-module $\mathcal{M}_{c,h}$ (resp. $\mathcal{M}^{+}_{c,h}$)を次のように定める：

$$\mathcal{M}_{c,h} := U(\mathcal{L})/K_{c,h} \quad (\text{resp. } \mathcal{M}^{+}_{c,h} := U(\mathcal{L})/K^{+}_{c,h}).$$

$|c,h\rangle := 1 \bmod K_{c,h} \in \mathcal{M}_{c,h}$, $\langle c,h| := 1 \bmod K^{+}_{c,h} \in \mathcal{M}^{+}_{c,h}$とおく．$\mathcal{M}_{c,h}$ (resp. $\mathcal{M}^{+}_{c,h}$)は唯一のmaximal proper left (resp. right) submodule $J_{c,h}$ (resp. $J^{+}_{c,h}$)をもつ．それによる$\mathcal{M}_{c,h}$ (resp. $\mathcal{M}^{+}_{c,h}$)のsimple quotientを$\mathcal{H}_{c,h}$ (resp. $\mathcal{H}^{+}_{c,h}$)と書くことにする．すなわち，

$$\mathcal{H}_{c,h} := \mathcal{M}_{c,h}/J_{c,h} \quad (\text{resp. } \mathcal{H}^{+}_{c,h} := \mathcal{M}^{+}_{c,h}/J^{+}_{c,h}).$$

$|c,h\rangle \bmod J_{c,h}$ (resp. $\langle c,h| \bmod J^{+}_{c,h}$) をも$|c,h\rangle$ (resp. $\langle c,h|$) と書くことがある. $\mathcal{H}^{+}_{c,h}$ と $\mathcal{H}_{c,h}$ の間には 以下の性質を持つ complete pairing $\langle\,|\,\rangle$ が唯一存在する:

$$\langle c,h|c,h\rangle = 1, \quad \langle ua|v\rangle = \langle u|av\rangle \quad (u \in \mathcal{H}^{+}_{c,h},\ v \in \mathcal{H}_{c,h},\ a \in U(\mathcal{L})).$$

$\hat{c}$ の固有値を central charge と呼ぶ. c を固定すると言えば, それ以後扱うすべての $\mathcal{L}$-modules の上に $\hat{c}$ が $c\cdot id$ として作用することを意味する. c を固定したとき, c を省略して, $\mathcal{M}_h$, J_h, $\mathcal{H}_h$, $|h\rangle$, etc と表わす.

$\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}$ への linear map $^{+}$ を次のように定める:

$$L_m^{+} := L_{-m} \quad (m \in \mathbb{Z}), \quad \hat{c}^{+} = \hat{c}.$$

$^{+}$ は次をみたす:

$$A^{++} = A, \quad [A,B]^{+} = [B^{+}, A^{+}] \quad (A, B \in \mathcal{L}).$$

$^{+}$ は $U(\mathcal{L})$ 上の algebra anti-automorphism $^{+}$ に一意に拡張される. この $^{+}$ は $\mathcal{M}_{c,h}$ と $\mathcal{M}^{+}_{c,h}$ の間の vector space としての同型

$$\mathcal{M}_{c,h} \underset{+}{\overset{+}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}^{+}_{c,h}, \quad |c,h\rangle \longleftrightarrow \langle c,h|$$

を induce し, $u \in \mathcal{M}^{+}_{c,h}$, $v \in \mathcal{M}_{c,h}$, $a \in U(\mathcal{L})$ に対して次が成立する:

$$u^{++} = u, \quad v^{++} = v, \quad (ua)^{+} = a^{+}u^{+}, \quad (av)^{+} = v^{+}a^{+}.$$

よって, $^{+}$ によって $\mathcal{M}_{c,h}$ と $\mathcal{M}^{+}_{c,h}$ の $\mathcal{L}$-submodules は 1対1 に対応する. 特に $J_{c,h}$ には $J^{+}_{c,h}$ が対応する.

$v \in \mathcal{M}_{c,h}$ (resp. $u \in \mathcal{M}^{+}_{c,h}$) が grad $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の singular vector であるとは, 次が成立することと定める:

$$v \neq 0, \quad \mathcal{L}_+ v = 0, \quad L_0 v = (h+N) v$$

$$(\text{resp. } u \neq 0, \quad u \mathcal{L}_- = 0, \quad v L_0 = (h+N) v).$$

$\mathcal{M}_{c,h}$ と $\mathcal{M}^+_{c,h}$ の singular vectors は $^+$ について 1 対 1 に対応する.

以下, [FFu1,2] による $\mathcal{M}_{c,h}$ の singular vector についての結果を引用しよう.

$t \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k, l \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$c(t) := \frac{6}{t} + 13 + 6t,$$

$$h_{k,l}(t) := \frac{1-k^2}{4t} + \frac{1-kl}{2} + \frac{1-l^2}{4} t$$

とおくと 次が成立する.

<u>Lemma B.1</u> ([FFu1,2])

(1) $\mathcal{M}_{c,h}$ の任意の submodule は singular vectors から生成される.

(2) $\mathcal{M}_{c,h}$ が grade $N > 0$ の singular vector を持つための必要十分条件は, ある $t \in \mathbb{C}^\times$, $k, l \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して, $c = c(t)$, $h = h_{k,l}(t)$, $N = kl$ が成立することである. そして, 固定された N に対して grade N の singular vector は (存在するとき) 定数倍を除いて一意に定まる.

(3) $k, l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$S_{k,l}(t) := \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_N \geq 0 \\ i_1 + 2 i_2 + \cdots + N i_N}} p^{k,l}_{i_1 \cdots i_N}(t) \, L_{-N}^{i_N} \cdots L_{-2}^{i_2} L_{-1}^{i_1}$$

$$\left(N := kl, \quad p^{k,l}_{i_1 \cdots i_N} \in \mathbb{C}[t, t^{-1}], \quad p^{k,l}_{N,0,\cdots,0} = 1\right)$$

が存在して, $\mathcal{M}_{c(t), h_{k,l}(t)}$ の grade N の singular vector は定数倍を除いて $S_{k,l}(t) | c(t), h_{k,l}(t) \rangle$ と一致する.

例えば，$k, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ が小さいとき，$S_{k\ell} = S_{k\ell}(t)$ は以下のようになる：

$$S_{11} = L_{-1},$$

$$S_{12} = L_{-1}^2 + t L_{-2}, \quad S_{13} = L_{-1}^3 + 4t L_{-2} L_{-1} + (4t^2 + 2t) L_{-3},$$

$$S_{21} = L_{-1}^2 + t^{-1} L_{-2}, \quad S_{31} = L_{-1}^3 + 4t^{-1} L_{-2} L_{-1} + (4t^{-2} + 2t^{-1}) L_{-3}.$$

そして，$\mathcal{M}^+_{c(t), h_{k,\ell}(t)}$ $(t \in \mathbb{C}^\times, k, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}, N := k\ell)$ の grade N の singular vector は，

$$S^+_{k,\ell}(t) := \left(S_{k,\ell}(t)\right)^+ = \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_N \geq 0 \\ i_1 + 2i_2 + \cdots + N i_N = N}} p^{k,\ell}_{i_1 \cdots i_N}(t) L_1^{i_1} L_2^{i_2} \cdots L_N^{i_N}$$

とおくとき，$\langle c(t), h_{k,\ell}(t) | S^+_{k,\ell}(t)$ の定数倍になる．

次の結果は [FFu1,2] において case III$_-$ と分類された場合の一部である．

Lemma B.2

p, q は互いに素な 2 以上の自然数とし，$t := -\frac{q}{p}$ とおく．このとき，$k, \ell \in \mathbb{Z}$，$0 < k < q$，$0 \leq \ell < p$ に対して，$\mathcal{M}_{c(t), h_{k,\ell}(t)}$ の maximal proper submodule $J_{c(t), h_{k,\ell}(t)}$ は次のように表わされる：

$$J_{c(t), h_{k,\ell}(t)} = \left(U(\mathcal{L}) S_{k,\ell}(t) + U(\mathcal{L}) S_{q-k, p-\ell}(t)\right) | c(t), h_{k,\ell}(t) \rangle.$$

微分作用素 $\mathcal{L}^{(h)}_m$ を次のように定める：

$$\mathcal{L}^{(h)}_m := \mathcal{L}^{(h)}_m\left(z, \frac{d}{dz}\right) := z^m \left(z \frac{d}{dz} + h(m+1)\right) \quad (h \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z}).$$

$S_{k,\ell}(t)$ の中の L_m を $-\mathcal{L}^{(h)}_m$ で置き換えて得られる微分作用素を

$$\sigma_{k,\ell}(h, t) := \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_N \geq 0 \\ i_1 + 2i_2 + \cdots + N i_N = N}} p^{k,\ell}_{i_1 \cdots i_N}(t) \left(-\mathcal{L}^{(h)}_{-N}\right)^{i_N} \cdots \left(-\mathcal{L}^{(h)}_{-1}\right)^{i_1} \quad (N := k\ell)$$

と表わす. $g_{k,\ell}(h,\Delta,t) \in \mathbb{C}[h,\Delta,t,t^{-1}]$ を次のように定める;

$$\sigma_{k,\ell}(h,t)\, z^{-\Delta} = g_{k,\ell}(h,\Delta,t)\, z^{-\Delta-k\ell}.$$

[FFu1,2] は次の結果を得ている. ただし, [FFu1,2] の記号を次のように書き換えてある:

$$e_i \mapsto L_{-i},\quad f_j \mapsto z^{-\Delta-j},\quad \lambda \mapsto -h,\quad \mu \mapsto \Delta - 2h,\quad \rho \mapsto g.$$

Lemma B.3 ([FFu1,2])

$t \in \mathbb{C}^\times$, $k,\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\theta^2 = t$ とすると

$$\begin{aligned} &g_{k+1,\ell+1}(h,\Delta,t)^2 \\ &= \prod_{i=0}^{k}\prod_{j=0}^{\ell}\Big[\Delta^2 + \{(2i(k-i)+k)t^{-1} + (2j(\ell-j)+\ell)t + k\ell + k + \ell - (k-2i)(\ell-2j)\}\Delta \\ &\qquad + \{(k-2i)\theta^{-1} + (\ell-2j)\theta\}^2 h \\ &\qquad + (i\theta^{-1}+j\theta)((i+1)\theta^{-1}+(j+1)\theta)((k-i)\theta^{-1}+(\ell-j)\theta)((k-i+1)\theta^{-1}+(\ell-j+1)\theta)\Big]. \end{aligned}$$

B.2 Virasoro algebra に対する conformal block と chiral vertex operator

以下, central charge c を固定する. $T(\zeta) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \zeta^{-m-2} L_m$ とおく.

$\vec{h} = (h_\infty; h_N \cdots h_0) \in \mathbb{C}^{N+2}$ に対して, $\Phi(z)$ $(z=(z_1,\cdots,z_N))$ が (Virasoro algebra に対する) type $\vec{h}$ の conformal block であるとは, Definition 2.1 と全く同様の条件が成立することと定める. ただし, $\hat{\mathfrak{g}}$-modules $\mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0\leq a\leq N)$, $\mathcal{H}^\dagger_{\lambda_\infty}$ のかわりに $\mathcal{L}$-modules $\mathcal{H}_{h_a}$ $(0\leq a\leq N)$, $\mathcal{H}^\dagger_{h_\infty}$ を用い, $X(\zeta)$ $(X\in\mathfrak{g})$ に対する条件は無視する.

$\Phi(z)$ は type $\vec{h}=(h_\infty; h_N \cdots h_0)$ の conformal block とし，$\mathbb{C}$値函数 $F(z)$ を

$$F(z) := \langle h_\infty | \Phi(z) | h_N \rangle \cdots | h_1 \rangle | h_0 \rangle$$

と定める．Lemma 2.2 と全く同様にして次が成立することがわかる．

Lemma B.4

任意の $v_a \in \mathcal{H}_{\lambda_a}$ $(0 \le a \le N)$，$v_\infty \in \mathcal{H}^+_{\lambda_\infty}$ に対して，ある微分作用素 $P(z, \partial)$ $\left(\partial = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_N}\right)\right)$ が存在して，

$$\langle v_\infty | \Phi(z) | v_N \rangle \cdots | v_0 \rangle = P(z, \partial) F(z)$$

が成立する．特に $\Phi(z)$ は $F(z)$ から一意に決定される．

Definition 2.5 と同様に，type $(h_3; h_2 h_1)$ の conformal block を chiral vertex operator と呼ぶ．$\Phi(z)$ を type $(h_3; h_2 h_1)$ の chiral vertex operator とし，

$$\varphi(z) := \Phi(z; |h_2\rangle) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^+_{h_3} \otimes \mathcal{H}_{h_1}, \mathbb{C})$$

とおく．$\varphi(z)$ は以下をみたす：

(B.1) $\quad [L_m, \varphi(z)] = z^m \left(z \frac{d}{dz} + (m+1) h_2\right) \varphi(z) = \mathcal{L}_m^{(h_2)} \varphi(z)$

(B.2) $\quad \langle h_3 | \varphi(z) | h_1 \rangle = A\, z^{-h_1 - h_2 + h_3} \quad$ (A はある定数)．

Lemma 3.1 の証明と全く同様にして次が成立することを示せる．

Lemma B.5

任意の $h_a \in \mathbb{C}$ $(1 \le a \le 3)$，$A \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathbb{C}^\times$ 上の $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}^+_{h_3} \otimes \mathcal{M}_{h_1}, \mathbb{C})$ 値多価正則函数 $\varphi(z)$ で (B.1)，(B.2) をみたすものが唯一存在する．

さらに，Proposition 3.7と同様にして次が成立することを示せる．

Lemma B.6

Lemma B.5における$\varphi(z)$に対して，以下の条件をみたす$\widetilde{\Phi}(z)$が唯一存在する：

(B.3) $\widetilde{\Phi}(z)$は$\mathbb{C}^\times$上の$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_{h_3}^+ \otimes \mathcal{M}_{h_2} \otimes \mathcal{M}_{h_1}, \mathbb{C})$値多価正則函数である．

(B.4) $z \in \mathbb{C}^\times$, $u \in \mathcal{M}_{h_1}$, $v \in \mathcal{M}_{h_2}$, $w \in \mathcal{M}_{h_3}^+$を任意にとる．このとき，

$\langle w | \widetilde{\Phi}(z; v) T(\zeta) | u \rangle$, $\langle w | \widetilde{\Phi}(z; T(\zeta - z) v) | u \rangle$, $\langle w | T(\zeta) \widetilde{\Phi}(z; v) | u \rangle$はそれぞれ

$0 < |\zeta| < |z|$, $0 < |\zeta - z| < |z|$, $|z| < |\zeta|$で収束し，これらはすべて$\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta \neq 0, z\}$の

上の同一の正則函数に解析接続される．

(B.5) $\widetilde{\Phi}(z; L_{-1} v) = \dfrac{d}{dz} \widetilde{\Phi}(z; v) \quad (v \in \mathcal{M}_\mu)$.

(B.6) $\widetilde{\Phi}(z; |h_2\rangle) = \varphi(z)$.

このような$\widetilde{\Phi}(z)$が$\Phi(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{h_3}^+ \otimes \mathcal{H}_{h_2} \otimes \mathcal{H}_{h_1}, \mathbb{C})$をinduceするとき，$\Phi(z)$はchiral vertex operatorをなすことを注意しておく．

$k, l \in \mathbb{Z}_{>0}$に対して，$f_{kl} \in \mathbb{C}[h_1, h_2, h_3, t, t^{-1}]$を

$$f_{kl}(h_1, h_2, h_3; t) := g_{kl}(h_2, h_1 + h_2 - h_3, t)$$

と定める．$g_{kl}(h, \Delta, t)$の定義より次が成立する：

$$\sigma_{k,l}(h_2; t)\, z^{-h_1 - h_2 + h_3} = f_{kl}(h_1, h_2, h_3; t)\, z^{-h_1 - h_2 + h_3 - kl}.$$

Lemma B.6の$\widetilde{\Phi}(z)$は(B.4), (B.5)より(3.12 c, d)をみたすことがわかる．したがって次が成立することが示される．

Lemma B.7

Lemma B.6 の $\widetilde{\Phi}(z)$ に対して以下が成立する:

(1) $\langle h_3|\widetilde{\Phi}(z;|h_2\rangle)S_{kl}(t)|h_1\rangle = f_{kl}(h_1,h_2,h_3;t)\,A\,z^{-h_1-h_2+h_3-kl}$,

(2) $\langle h_3|\widetilde{\Phi}(z;S_{kl}(t)|h_2\rangle)|h_1\rangle = (-1)^{kl} f_{kl}(h_2,h_1,h_3;t)\,A\,z^{-h_1-h_2+h_3-kl}$

(3) $\langle h_3|S_{kl}^{+}(t)\,\widetilde{\Phi}(z;|h_2\rangle)|h_1\rangle = f_{kl}(h_3,h_2,h_1;t)\,A\,z^{-h_1-h_2+h_3+kl}$

Proof

$\widetilde{\Phi}(z)$ が (3.12c, d) をみたすことより,

(i) $\langle h_3|\widetilde{\Phi}(z;|h_2\rangle)|L_{-m}v_1\rangle = -\mathcal{L}_{-m}^{(h_2)}\langle h_3|\widetilde{\Phi}(z;|h_2\rangle)|v_1\rangle \quad (m>0,\ v_1\in\mathcal{M}_{h_1})$,

(ii) $\langle h_3|\widetilde{\Phi}(z;L_{-m}v_2)|h_1\rangle = -(-1)^m\mathcal{L}_{-m}^{(h_1)}\langle h_3|\widetilde{\Phi}(z;v_2)|h_1\rangle \quad (m>0,\ v_2\in\mathcal{M}_{h_2})$,

(iii) $\langle v_3L_m|\widetilde{\Phi}(z;|h_2\rangle)|h_1\rangle = \mathcal{L}_{m}^{(h_2)}\langle v_3|\widetilde{\Phi}(z;|h_2\rangle)|h_1\rangle \quad (m>0,\ v_3\in\mathcal{M}_{h_3})$

が成立する. よって, (1) と (2) は (i) と (ii) より明らか. (3) が成立することは (iii) と

$$\mathcal{L}_{m}^{(h_2)}\,z^{-h_1-h_2+h_3+n} = (h_3+mh_2-h_1+n)\,z^{-h_1-h_2+h_3+n+m},$$
$$-\mathcal{L}_{-m}^{(h_2)}\,z^{-h_1-h_2+h_3-n} = (h_1+mh_2-h_3+n)\,z^{-h_1-h_2+h_3-n-m} \quad (m>0,\ n\geq 0)$$

が成立するからただちに示される. $\square$

Lemma B.3 を書き直すと次が成立することがわかる.

Lemma B.8

$$\begin{aligned}
&f_{k_1l_1}(h_{k_1l_1}(t),\,h_2,\,h_{k_3l_3}(t))^2\\
&= f_{k_1l_1}(h_{k_1l_1}(t),\,h_{k_3l_3}(t),\,h_2)^2\\
&= \prod_{i=1}^{k_1}\prod_{j=1}^{l_1}\left(h_2 - h_{k_3+k_1-2i+1,\,l_3+l_1-2j+1}(t)\right)^2.
\end{aligned}$$

B.3. BPZ minimal models における chiral vertex operators

以下, p, q は互いに素な2以上の整数とし次のようにおく:

$$c := c\left(-\frac{q}{p}\right) = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq},$$
$$h_{k,l} := h_{k,l}\left(-\frac{q}{p}\right) = \frac{(pk-ql)^2-(p-q)^2}{4pq},$$
$$S_{k,l} := S_{k,l}\left(-\frac{q}{p}\right),$$
$$f_{k,l}(h_1,h_2,h_3) := f_{kl}\left(h_1,h_2,h_3\,;\,-\frac{q}{p}\right).$$

[BPZ]は上のような c に対する conformal field theory において,

$$P_c := \{h_{k,l} \mid k,l \in \mathbb{Z},\ 0<k<q,\ 0<l<p\}$$

に対する field operators が operator product expansion について閉じていることを発見した. そして, このような c, $P_c = \{h_{kl}\}$ に対する conformal field theory を minimal theory もしくは minimal model と呼んでいる. 以下, この "BPZ minimal model" に対する chiral vertex operators を調べる.
$h_{q-k,\,p-l} = h_{k,l}$ であるから P_c の元の個数は $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ であることを注意しておく.

本筋とは関係しないが次の結果が知られている: $c \in \mathbb{R}$, $c<1$ のとき, $\mathcal{H}_{c,h}$ が unitarizable であるための必要十分条件は,

$$c = c\left(-\frac{m}{m+1}\right) = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad (m=2,3,4,5,\cdots),$$
$$h = h_{k,l}\left(-\frac{m}{m+1}\right) = \frac{((m+1)k-ml)^2-1}{4m(m+1)} \quad \begin{pmatrix} k=1,2,\cdots,m-1, \\ l=1,2,\cdots,m \end{pmatrix}$$

が成立することである (必要性は[FQS], [L], 十分性は [GKO], [KW], [TK2])

Theorem B.9

αは1,2,3のどれかとし固定する. $a=1,2,3$, $a\neq\alpha$に対して,

$$h_a = h_{k_a, l_a}\ ,\quad k_a, l_a \in \mathbb{Z}\ ,\quad 0<k_a<q\ ,\quad 0<l_a<p$$

であると仮定する. このとき, type $(h_3; h_2 h_1)$の0でない chiral vertex operator が存在するための必要十分条件は次が成立することである:

(B.7) ある$k_\alpha, l_\alpha \in \mathbb{Z}$が存在して, $h_\alpha = h_{k_\alpha, l_\alpha}$でかつ

$$\begin{aligned}
&k_1+k_2+k_3 \in 2\mathbb{Z}+1\ , && l_1+l_2+l_3 \in 2\mathbb{Z}+1\ ,\\
&k_1+k_2-k_3 \geq 1\ , && l_1+l_2-l_3 \geq 1\ ,\\
&k_1-k_2+k_3 \geq 1\ , && l_1-l_2+l_3 \geq 1\ ,\\
&-k_1+k_2+k_3 \geq 1\ , && -l_1+l_2+l_3 \geq 1\ ,\\
&k_1+k_2+k_3 \leq 2q-1\ , && l_1+l_2+l_3 \leq 2p-1\ .
\end{aligned}$$

が成立する.

条件(B.7)から, $1\leq k_a \leq q-1$, $1 \leq l_a \leq p-1$ $(a=1,2,3)$が出ることを注意しておく.

Proof

必要性: $\Phi(z)$が type $(h_3; h_2 h_1)$の0でない chiral vertex operator であるとすると, (B.2)におけるAは Lemma B.4 より0ではない. よって, Lemma B.2, B.7, B.8 より, $\{a, b, \alpha\} = \{1,2,3\}$とおくと, ある$i, j, i', j' \in \mathbb{Z}$が存在して

$$h_\alpha = h_{k_a+k_b-2i+1,\ l_a+l_b-2j+1}\ ,$$

$$1 \leq i \leq \min\{k_a, k_b\}\ ,\quad 1 \leq j \leq \min\{l_a, l_b\},$$

$$h_\alpha = h_{(q-k_a)+(q-k_b)-2i'+1,\ (p-l_a)+(p-l_b)-2j'+1}\ ,$$

$$1 \leq i' \leq \min\{q-k_a, q-k_b\}\ ,\quad 1 \leq j' \leq \min\{p-l_a, p-l_b\}$$

が成立する．

$$k_\alpha := \min\{k_a+k_b-2i+1,\ (q-k_a)+(q-k_b)-2i'+1\}$$

$$l_\alpha := \min\{l_a+l_b-2j+1,\ (p-l_a)+(p-l_b)-2j'+1\}$$

とおくと，

$$|k_a-k_b|+1 \leq k_\alpha \leq \min\{k_a+k_b-1,\ (q-k_a)+(q-k_b)-1\},$$

$$|l_a-l_b|+1 \leq l_\alpha \leq \min\{l_a+l_b-1,\ (p-l_a)+(p-l_b)-1\}.$$

これより，(B.7) が出ることは明らか．

十分性： $A \neq 0$ に対して，Lemma B.5 の φ をとりその φ に対して Lemma B.6 の $\widetilde{\Phi}(z)$ をとる．(B.7) を仮定し，$\widetilde{\Phi}(z)$ が $\Phi(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{\dagger}_{h_3} \otimes \mathcal{H}_{h_2} \otimes \mathcal{H}_{h_1}, \mathbb{C})$ を induce することを示せばよい．(B.7) を仮定すると，Lemma B.8 より，

$$f_{k_1 l_1}(h_1, h_2, h_3) = f_{q-k_1,\, p-l_1}(h_1, h_2, h_3) = 0,$$

$$f_{k_2 l_2}(h_2, h_1, h_3) = f_{q-k_2,\, p-l_2}(h_2, h_1, h_3) = 0,$$

$$f_{k_3 l_3}(h_3, h_2, h_1) = f_{q-k_3,\, p-l_3}(h_3, h_2, h_1) = 0$$

となることがわかる．よって，Lemma B.2, B.7 より，Theorem 3.11 と同様に $\widetilde{\Phi}(z)$ が $\Phi(z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{\dagger}_{h_3} \otimes \mathcal{H}_{h_2} \otimes \mathcal{H}_{h_1}, \mathbb{C})$ を induce することが示される． □

最後に，Lemma 4.4 はその証明の仕方より Virasoro algebra に対する chiral vertex operators の合成に対しても成立することがわかることを注意しておく．しかし，Theorem 4.8 と Theorem 4.10 が BPZ minimal models に対しても成立することが予想されているが，まだわかっていない．

Appendix C. $\widehat{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ の Fock 表現と KZ equation の解の積分表示

KZ equation の解の積分表示は [DF1,2] などの類似をたどることによって，最初は [CF] によって $\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$ の 4 点函数の場合に得られた．なお，[DF1,2] の理論は現在では [F], [FeS], [FFK] などで精密化されている．この Appendix においては，[FFr1~4] の $\hat{\mathfrak{g}}=\widehat{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ の Fock 表現の理論から，$\mathfrak{g}=sl_{r+1}(\mathbb{C})$ に対する KZ equation の解になるような積分表示式の形を具体的に計算する．これと同等な結果は，[FFr1~4] の理論を使わずに，積分表示式が KZ equation をみたすことを直接確かめるという方法によって，$sl_2(\mathbb{C})$ の場合は [DJMM] によって，$sl_{r+1}(\mathbb{C})$ の場合は [M] によって，そして任意の Kac-Moody algebra を含む非常に一般の場合の結果が [SV] によって得られている．$\hat{\mathfrak{g}}$ の Fock 表現の応用については理論物理学者達の論文が多数ある（例えば，[GMMOS1~4], [BF], [BO]）．

C.1. Free boson と Fock space と Wick の定理

§1 の記号をそのまま用いる．例えば，g は $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter number であるとし，Δ_+ は $\mathfrak{g}$ の positive roots 全体であるとし，(1) によって $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}$ とみなす．$r:=\dim\mathfrak{h}$ とおき，$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}\subset\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{g}$ の simple roots 全体であるとし，$\{H_1,\cdots,H_r\}\subset\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の simple coroots 全体であるとし，$\{\Lambda_1,\cdots,\Lambda_r\}\subset\mathfrak{h}^*$ を $(\Lambda_i|H_j)=\delta_{ij}\ (1\le i,j\le r)$ によって定める．このとき，$\rho=\sum_{i=1}^r\Lambda_i$，$P_+=\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{Z}_{\ge0}\Lambda_i$ である．$\{E_i,F_i\ (1\le i\le r)\}$

は $\mathfrak{g}$ の Chevalley generator で $[E_i, F_j] = \delta_{ij} H_i$ をみたすものとする．

$a_\alpha(m), \bar{a}_\alpha(m)$ $(\alpha \in \Delta_+, m \in \mathbb{Z})$ から生成された tensor algebra を以下の relation から生成された両側イデアルで割ってできる algebra を $\hat{A}$ と表わす：

$$[a_\alpha(m), a_\beta(n)] = [\bar{a}_\alpha(m), \bar{a}_\beta(n)] = 0,$$

$$[a_\alpha(m), \bar{a}_\beta(n)] = \delta_{\alpha\beta}\delta_{m+n,0}\cdot 1 \qquad (\alpha, \beta \in \Delta_+,\ m, n \in \mathbb{Z}).$$

ここで，$[x, y] = xy - yx$ である．B は $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^*$ の copy とし，$h \in \mathfrak{h}$ に対応する B の元を b_h と表わす．$h \in \mathfrak{h}$, $m \in \mathbb{Z}$ に対して $b_h(m) := b_h \otimes t^m \in B \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ とおく．$B \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ から生成された tensor algebra を以下の relation から生成された両側イデアルで割ってできる algebra を $\hat{B}$ と表わす：

$$[b_{h_1}(m), b_{h_2}(n)] = (h_1|h_2)\, m\, \delta_{m+n,0}\cdot 1 \qquad (h_1, h_2 \in \mathfrak{h},\ m, n \in \mathbb{Z}).$$

$\hat{C} := \hat{A} \otimes \hat{B}$ とおく．自然に $\hat{A}, \hat{B} \subset \hat{C}$ とみなせ，$\hat{C}$ には $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ となるような algebra の構造が自然に入る．$b_h(0) = b_h \otimes t^0$ は $\hat{C}$ の center に含まれることを注意しておく．$a_\alpha(m), \bar{a}_\beta(n)$ $(\alpha, \beta \in \Delta_+,\ m \geq 0,\ n > 0)$，$b_h(m)$ $(h \in \mathfrak{h},\ m > 0)$ から生成された $\hat{C}$ の subalgebra を $\hat{C}_+$ と表わし，$a_\alpha(m), \bar{a}_\beta(n)$ $(\alpha, \beta \in \Delta_+,\ m < 0,\ n \leq 0)$，$b_h(m)$ $(h \in \mathfrak{h},\ m < 0)$ から生成された $\hat{C}$ の subalgebra を $\hat{C}_-$ と表わし，$b_h(0)$ $(h \in \mathfrak{h})$ から生成された $\hat{C}$ の subalgebra を $\hat{C}_0$ と表わす．$\hat{C}_\pm, \hat{C}_0$ はそれぞれ commutative algebra であり，vector space としての自然な同型 $\hat{C} \simeq \hat{C}_- \otimes \hat{C}_0 \otimes \hat{C}_+$ が成立する．$a_\alpha(m), \bar{a}_\alpha(m)$ $(\alpha \in \Delta_+,\ m \in \mathbb{Z})$，$b_h(m)$ $(h \in \mathfrak{h},\ m \in \mathbb{Z})$ から生成された多項式環を $\mathrm{gr}\,\hat{C}$ と表わす．このとき，vector space として $\mathrm{gr}\,\hat{C}$ と $\hat{C}$ は同型である．$\hat{C}_\pm, \hat{C}_0$ は自然に $\mathrm{gr}\,\hat{C}$ の subalgebra とみなせるから，vector space として，$\mathrm{gr}\,\hat{C} \simeq \hat{C}_- \otimes \hat{C}_0 \otimes \hat{C}_+$ が成立する．$\mathrm{gr}\,\hat{C}$ から $\hat{C}$ への linear isomorphism

$:\ :$ を次のように定める：

$$\begin{array}{ccccccccc} gr\,\hat{C} & = & \hat{C}_- & \otimes & \hat{C}_0 & \otimes & \hat{C}_+ & \xrightarrow{\sim} & \hat{C} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi & & \Psi & & \Psi \\ C & = & C_- & \otimes & C_0 & \otimes & C_+ & \longmapsto & :C: = C_- C_0 C_+ . \end{array}$$

この $:\ :$ は normal product と呼ばれる.

以下，$\varepsilon \in \mathbb{C}$，$\varepsilon \neq 0$ を固定して話を進める. そして，$l \in \mathbb{C}$ を次によって定める：

$$\varepsilon^2 = l + g.$$

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，以下の性質を持つ vector $|\varepsilon,\lambda\rangle$ (resp. $\langle\varepsilon,\lambda|$) から生成される non-trivial left (resp. right) $\hat{C}$-module $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$ (resp. $\mathcal{F}^+_{\varepsilon,\lambda}$) が一意に定まる：

$$a_\alpha(m)|\varepsilon,\lambda\rangle = 0\ ,\ \bar{a}_\beta(n)|\varepsilon,\lambda\rangle = 0\ \ (\alpha,\beta \in \Delta_+\,,\ m \geq 0,\ n > 0),$$
$$b_h(m)|\varepsilon,\lambda\rangle = 0\ ,\ b_h(0)|\varepsilon,\lambda\rangle = \frac{1}{\varepsilon}(\lambda|h)\,|\varepsilon,\lambda\rangle\ \ (h \in \mathfrak{h},\ m < 0)$$
$$\left(\text{resp.}\ \begin{array}{l} \langle\varepsilon,\lambda|a_\alpha(m) = 0,\ \ \langle\varepsilon,\lambda|\,\bar{a}_\beta(n) = 0\ \ (\alpha,\beta \in \Delta_+,\ m < 0\,,\ n \leq 0) \\ \langle\varepsilon,\lambda|b_h(m) = 0,\ \langle\varepsilon,\lambda|b_h(0) = \frac{1}{\varepsilon}(\lambda|h)\langle\varepsilon,\lambda|\ \ (h \in \mathfrak{h},\ m > 0) \end{array}\right).$$

$\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$，$\mathcal{F}^+_{\varepsilon,\lambda}$ は simple $\hat{C}$-modules であり，$\hat{C}$ に対する Fock space と呼ばれる. vector space としては，すべての $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$ ($\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$) は互いに同型であることを注意しておく. また形式的には，$a_\alpha(m) = \dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha,m}}$，$\bar{a}_\alpha(m) = x_{\alpha,m}$ ($\alpha \in \Delta_+$, $m \in \mathbb{Z}$)，$b_{\Lambda_i}(m) = \dfrac{\partial}{\partial y_{i,-m}}$，$b_{H_i}(-m) = -m\,y_{i,m}$ ($1 \leq i \leq r$, $m < 0$)，$b_h(0) = \frac{1}{\varepsilon}(\lambda|h)$ ($h \in \mathfrak{h}$) とおくと，$|\varepsilon,\lambda\rangle$ は $x_+ = (x_{\beta,n})_{\beta\in\Delta_+,\,n>0} = 0$ の上に台を持つ delta function $\delta(x_+)$ とみなせる. $\mathcal{F}^+_{\varepsilon,\lambda}$ と $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$ の間には，次の性質を持つ complete pairing $\langle\ |\ \rangle$ が一意に定まる：

$$\langle\varepsilon,\lambda|\varepsilon,\lambda\rangle = 1\ \ ,\ \ \langle u x|v\rangle = \langle u|x v\rangle\ \ (u \in \mathcal{F}^+_{\varepsilon,\lambda},\ v \in \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda},\ x \in \hat{C}).$$

以下，$\hat{\mathcal{C}}$の元を$\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$，$\mathcal{F}^+_{\varepsilon,\lambda}$の上のoperatorと同一視して扱う。

$\alpha, \beta \in \Delta_+$，$h, h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$に対して次のように置く：

$$a_\alpha(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{-m-1} a_\alpha(m),\quad a_\alpha(z)_+ := \sum_{m\geq 0} z^{-m-1} a_\alpha(m),\quad a_\alpha(z)_- := \sum_{m<0} z^{-m-1} a_\alpha(m),$$

$$\bar{a}_\beta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n} \bar{a}_\beta(n),\quad \bar{a}_\beta(z)_+ := \sum_{n>0} z^{-n} \bar{a}_\beta(n),\quad \bar{a}_\beta(z)_- := \sum_{n\leq 0} z^{-n} \bar{a}_\beta(n),$$

$$b_h(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{-m-1} b_h(m),\quad b_h(z)_+ := \sum_{m\geq 0} z^{-m-1} b_h(m),\quad b_h(z)_- := \sum_{m<0} z^{-m-1} b_h(m).$$

このとき，次が成立することが計算によって確かめられる：

$$[a_\alpha(z)_+, \bar{a}_\beta(w)_-] = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{z-w} \quad (|z|>|w|>0),$$

$$[\bar{a}_\beta(w)_+, a_\alpha(z)_-] = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{z-w} \quad (|w|>|z|>0),$$

$$[b_{h_1}(z)_+, b_{h_2}(w)_-] = \frac{(h_1|h_2)}{(z-w)^2} \quad (|z|>|w|>0).$$

他の組み合わせは交換する。これより，Lemma 3.4の証明と同様にして，次のoperator product expansions (OPE's)が成立することがわかる：

$$a_\alpha(z)\bar{a}_\beta(w) \sim \frac{\delta_{\alpha\beta}}{z-w} \quad (z\to w),$$

$$\bar{a}_\beta(w) a_\alpha(z) \sim \frac{\delta_{\alpha\beta}}{z-w} \quad (w\to z),$$

$$b_{h_1}(z) b_{h_2}(w) \sim \frac{(h_1|h_2)}{(z-w)^2} \quad (z\to w).$$

他の組み合わせのOPE'sはsingularityを持たない。逆にこれらのOPE'sから，$a_\alpha(m), a_\beta(n), b_h(m)$の交換関係が復元できる。例えば，$R_1>R_2>0$として$C_i$ $(i=1,2)$は原点を中心とする半径R_iの円とし，C_wはwを中心とする十分小さな円とすると，

$$\begin{aligned}[a_\alpha(m), \bar{a}_\beta(n)] &= \oint_{C_1} dz \oint_{C_2} dw\, z^m w^{n-1} a_\alpha(z)\bar{a}_\beta(w) \\ &= \oint_{C_2} dw\, w^{n-1} \oint_{C_w} dz\, z^m R[a_\alpha(z)\bar{a}_\beta(w)] \\ &= \oint_{C_2} dw\, w^{n-1} \oint_{C_w} dz\, z^m \frac{\delta_{\alpha\beta}}{z-w} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{m+n,0}.\end{aligned}$$

Lemma 3.6の証明も参照せよ．これから，$a_\alpha(m)$, $\bar{a}_\beta(n)$, $b_h(m)$ から色々な operators を定義するが それらの交換関係は OPE の形で計算した方が楽なことが多い．

$:\prod_{i=1}^{L} a_{\alpha_i}(z_i)\prod_{j=1}^{M}\bar{a}_{\beta_j}(w_j)\prod_{k=1}^{N} b_{h_k}(y_k):$ $(\alpha_i,\beta_j\in\Delta_+,\ h_k\in\mathfrak{h})$ は $(z,w,y)\in(\mathbb{C}^\times)^{L+M+N}$ の上で収束して その上で singularity を持たない．よって，$z\in\mathbb{C}^\times$ に対して $:\prod_{i=1}^{L} a_{\alpha_i}(z)\prod_{j=1}^{M}\bar{a}_{\beta_j}(z)\prod_{k=1}^{N} b_{h_k}(z):$ は well-defined である．OPE's の計算などには 理論物理学者達にはよく知られた次の Wick の定理が非常に便利である．

<u>Lemma C.1</u> (Wickの定理の母函数表示)

$s,\bar{s},t,\bar{t}$ を形式的パラメータとすると，$\alpha\in\Delta_+$, $h_1,h_2\in\mathfrak{h}$ に対して形式的に以下が成立する：

(1) $$:e^{s a_\alpha(z)+\bar{s}\bar{a}_\alpha(z)}::e^{t a_\alpha(w)+\bar{t}\bar{a}_\alpha(w)}:$$
$$=\exp\left(\frac{s\bar{t}-\bar{s}t}{z-w}\right):e^{s a_\alpha(z)+\bar{s}\bar{a}_\alpha(z)+t a_\alpha(w)+\bar{t}\bar{a}_\alpha(w)}:,$$

(2) $$:e^{s b_{h_1}(z)}::e^{t b_{h_2}(w)}:=\exp\left(\frac{st\,(h_1|h_2)}{(z-w)^2}\right):e^{s b_{h_1}(z)+t b_{h_2}(w)}:$$
$$(|z|>|w|>0).$$

<u>Proof</u>

一般に，$A=A_++A_-$, $B=B_++B_-$, $[A_+,B_+]=[A_-,B_-]=0$, $:e^A:=e^{A_-}e^{A_+}$, $:e^B:=e^{B_-}e^{B_+}$, $:e^{A+B}:=e^{A_-+B_-}e^{A_++B_+}$ のとき，$C:=[A_+,B_-]$ が，$A_\pm$, $B_\pm$ と交換するならば，$e^{A_+}e^{B_-}=e^Ce^{B_-}e^{A_+}$ が成立するので，

$$:e^A::e^B:=e^{A_-}e^{A_+}e^{B_-}e^{B_+}=e^{A_-}e^Ce^{B_-}e^{A_+}e^{B_+}$$
$$=e^Ce^{A_-+B_-}e^{A_++B_+}=e^C:e^{A+B}:.$$

この計算を，$A=s a_\alpha(z)+\bar{s}\bar{a}_\alpha(z)$, $B=t a_\alpha(w)+\bar{t}\bar{a}_\alpha(w)$ もしくは $A=s b_{h_1}(z)$, $B=t b_{h_2}(w)$ の場合に適用すればよい． □.

ここで，$:e^{A}:$ の個数を増やして $\prod_{i=1}^{N} :e^{A_i}:$ を考えるなど多くの一般化があることを注意しておく．Wickの定理の母函数表示の両辺を，$s, \bar{s}, t, \bar{t}$ について展開してその係数を比べれば多くの有用な公式が得られる．それらの公式を総称してWickの定理と呼ぶ．例えば，

$$:b_{h_1}(z)^2: \, :b_{h_2}(w): = :b_{h_1}(z)^2 b_{h_2}(w): + \frac{2(h_1|h_2)\, b_{h_1}(z)}{(z-w)^2}$$
$$\sim 2(h_1|h_2)\left\{ \frac{\partial b_{h_1}(w)}{z-w} + \frac{b_{h_1}(w)}{(z-w)^2} \right\} \quad (z \to w).$$

ここで，$\partial A(z) := \frac{\partial}{\partial z} A(z)$ とおいた．なお，上の結果はbosonに対するWickの定理であるが，fermionに対するWickの定理も $s, \bar{s}, t, \bar{t}$ などの形式的パラメータを"fermionic"な形式的パラメータ(すなわち，すべてと反交換する形式的パラメータ)とすることによって全く同様にして証明できる．

$T(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-2} L_m$ を次のように定める：

$$T(z) := \sum_{\alpha \in \Delta_+} :a_\alpha(z)\, \partial \bar{a}_\alpha(z): + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} :b_{\Lambda_i}(z)\, b_{H_i}(z): - \frac{1}{\varepsilon} \partial b_\rho(z).$$

ここで，$\rho = \sum_{i=1}^{r} \Lambda_i$ である．Wickの定理を使って計算すると次が成立することがわかる：

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\, \delta_{m+n,0}\, c,$$

ここで，

$$c = (\text{positive roots の個数}) \times 2 + r - \frac{12(\rho|\rho)}{\varepsilon^2} = \dim \mathfrak{g} - \frac{12(\rho|\rho)}{\ell + g}.$$

ところが，Freudenthal-de Vries strange formula より，$g \dim \mathfrak{g} = 12(\rho|\rho)$ であるから，結局

$$c = \dim \mathfrak{g} - \frac{g \dim \mathfrak{g}}{\ell + g} = \frac{\ell \dim \mathfrak{g}}{\ell + g}$$

となり，$\hat{\mathfrak{g}}$ に対するSegal-Sugawara operatorsのcentral chargeに一致する．

$T(z)$ と $a_\alpha(w), \bar{a}_\alpha(w), b_h(w)$ $(\alpha\in\Delta_+,\ h\in\mathfrak{h})$ は 以下の OPE's をみたす:

$$T(z)a_\alpha(w) \sim \frac{\partial a_\alpha(w)}{z-w} + \frac{a_\alpha(w)}{(z-w)^2} \quad (z\to w),$$

$$T(z)\bar{a}_\alpha(w) \sim \frac{\partial \bar{a}_\alpha(w)}{z-w} \quad (z\to w),$$

$$T(z)b_h(w) \sim \frac{\partial b_h(w)}{z-w} + \frac{b_h(w)}{(z-w)^2} + \frac{\frac{2}{\varepsilon}(\rho|h)}{(z-w)^3} \quad (z\to w).$$

そして, L_m の $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$ への作用は $\varepsilon^2 = \ell+g$ より

$$L_m|\varepsilon,\lambda\rangle = 0 \ (m>0), \quad L_0|\varepsilon,\lambda\rangle = \frac{(\lambda|\lambda+2\rho)}{2(\ell+g)}|\varepsilon,\lambda\rangle = \Delta_{\ell,\lambda}|\varepsilon,\lambda\rangle$$

をみたす. $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}(n) := \{v\in\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda} \mid L_0 v = (\Delta_{\ell,\lambda}+n)v\},$$

$$\mathcal{F}^+_{\varepsilon,\lambda}(n) := \{v\in\mathcal{F}^+_{\varepsilon,\lambda} \mid vL_0 = (\Delta_{\ell,\lambda}+n)v\}$$

とおく. このとき,

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}(n), \quad \mathcal{F}^+_{\varepsilon,\lambda} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}^+_{\varepsilon,\lambda}(n)$$

が成立し, $\langle\ |\ \rangle$ は $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}(n)$ と $\mathcal{F}^+_{\varepsilon,\lambda}(n)$ の complete pairing を定める.

$\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*$ をとる. $T_{\varepsilon,\mu}$ は $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$ から $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+\mu}$ への linear isomorphism で $b_h(0)$ $(h\in\mathfrak{h})$ の固有値を $\frac{1}{\varepsilon}(\lambda|h)$ から $\frac{1}{\varepsilon}(\lambda+\mu|h)$ にずらすものとする. ここでは, $T_{\varepsilon,\mu}|\varepsilon,\lambda\rangle = |\varepsilon,\lambda+\mu\rangle$ と正規化しておく. 形式的には, $[b_h(0), q_\mu] = (\mu|h)$ $(h\in\mathfrak{h})$ をみたす q_μ によって, $T_{\varepsilon,\mu} = \exp\frac{1}{\varepsilon}q_\mu$ と書ける. q_μ と $b_\mu(0)$ の normal product を $:e^{q_\mu + b_\mu(0)\log z}: := e^{q_\mu}z^{b_\mu(0)}$ と定め, $\varphi_\mu(z)$ を

$$\varphi_\mu(z) := q_\mu + b_\mu(0)\log z + \sum_{m\neq 0}\frac{z^{-m}}{-m}b_\mu(m) \quad (\mu\in\mathfrak{h}^*)$$

と定める. $\frac{d}{dz}\varphi_\mu(z) = b_\mu(z)$ が成立する. $V_{\varepsilon,\mu}(z)$ を次のように定める:

$$V_{\varepsilon,\mu}(z) := :e^{\frac{1}{\varepsilon}\varphi_\mu(z)}: = \left(\exp\sum_{m<0}\frac{z^{-m}}{-m}\frac{1}{\varepsilon}b_\mu(m)\right)T_{\varepsilon,\lambda}z^{\frac{1}{\varepsilon}b_\mu(0)}\left(\exp\sum_{m>0}\frac{z^{-m}}{-m}\frac{1}{\varepsilon}b_\mu(m)\right).$$

$V_{\varepsilon,\mu}(z)$ を bosonic vertex operator と呼ぶ. $V_{\varepsilon,\mu}(z)$ は,

$$V_{\varepsilon,\mu}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{\varepsilon,\mu}(m)\, z^{-m-\frac{1}{\varepsilon}b_\mu(0)}$$

と展開されて, $V_{\varepsilon,\mu}(m)\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}, \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+\mu})$ が成立する. $b_h(z)$ $(h\in\mathfrak{h})$, $T(z)$ と $V_{\varepsilon,\mu}(w)$ $(\mu\in\mathfrak{h}^*)$ は以下の OPE's をみたす:

$$b_h(z)V_{\varepsilon,\mu}(w) \sim \frac{\frac{1}{\varepsilon}(\mu|h)V_{\varepsilon,\mu}(w)}{z-w} \qquad (z\to w),$$

$$T(z)V_{\varepsilon,\mu}(w) \sim \frac{\partial V_{\varepsilon,\mu}(w)}{z-w} + \frac{\Delta_{\ell,\mu}V_{\varepsilon,\mu}(w)}{(z-w)^2} \qquad (z\to w).$$

Wickの定理の証明と同様にして次が成立することを示せる.

<u>Lemma C.2</u> (bosonic vertex operators の合成公式)

$\varepsilon\in\mathbb{C}^\times$, $\mu_i\in\mathfrak{h}^*$ $(1\le i\le N)$, $0<|z_1|<\cdots<|z_N|$ に対して,

$$V_{\varepsilon,\mu_N}(z_N)\cdots V_{\varepsilon,\mu_1}(z_1) = \prod_{1\le i<j\le N}\left\{\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)^{(\mu_i|\mu_j)/\varepsilon^2} z_j^{(\mu_i|\mu_j)/\varepsilon^2}\right\} :\prod_{i=1}^N V_{\varepsilon,\mu_i}(z_i):.$$

以下では簡単のために bosonic vertex operators の合成を考えるとき, 適当な分枝を選んで,

$$\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)^{(\mu_i|\mu_j)/\varepsilon^2} z_j^{(\mu_i|\mu_j)/\varepsilon^2} = (z_j-z_i)^{(\mu_i|\mu_j)/\varepsilon^2}$$

となるようにしておく.

C.2. $\hat{\mathfrak{g}} = \widehat{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ の Fock 表現

以下では，$\mathfrak{g} = sl_{r+1}(\mathbb{C})$ とおく．このとき，$g = r+1$ である．$M_{r+1}(\mathbb{C})$ は複素係数の $(r+1)\times(r+1)$ 行列全体であるとすると，

$$\mathfrak{g} = sl_{r+1}(\mathbb{C}) = \{X \in M_{r+1}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{trace}\, X = 0\}$$

である．$E_{ij} \in M_{r+1}(\mathbb{C})$ は第 (i,j) 成分だけが1で他は0であるような行列とする．$H_i := E_{ii} - E_{i+1,i+1}$ $(1 \le i \le r)$ とおくと $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}H_i$ であり，Chevalley generators は $E_i = E_{i,i+1}$，$F_i = E_{i+1,i}$ となる．$1 \le i < j \le r+1$ に対して root space $\mathbb{C}E_{ij}$ に対応する positive root を α_{ij} と表わし，

$$a_{ij}(z) := a_{\alpha_{ij}}(z),\quad a_{ij}(m) := a_{\alpha_{ij}}(m),$$

$$\bar{a}_{ij}(z) := a_{\alpha_{ij}}(z),\quad \bar{a}_{ij}(m) := \bar{a}_{\alpha_{ij}}(m) \quad (1 \le i < j \le r+1,\ m \in \mathbb{Z}),$$

$$b_i(z) := b_{H_i}(z),\quad b_i(m) := b_{H_i}(m),$$

$$b^i(z) := b_{\Lambda_i}(z),\quad b^i(m) := b_{\Lambda_i}(m) \quad (1 \le i \le r,\ m \in \mathbb{Z})$$

とおく．このとき，$T(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{-m-2} L_m$ は次のように書かれる：

$$T(z) = \sum_{1 \le i < j \le r+1} :a_{ij}(z)\,\partial\bar{a}_{ij}(z): + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} :b^i(z)\,b_i(z): - \frac{1}{\varepsilon}\partial b_\rho(z). \tag{C.1}$$

$a_{ij} = a_{ij}(z)$，$\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ij}(z)$，$b_i = b_i(z)$ と略記し，[FFr 1~4] にならって $X = H_k, E_k, F_k$ $(1 \le k \le r)$ に対して，$X(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{-m-1} X(m)$ を次のように定める：

$$E_k(z) := a_{k,k+1} + \sum_{1 \le i < k} \bar{a}_{ik}\, a_{i,k+1},$$

$$H_k(z) := -2 :\bar{a}_{k,k+1}\, a_{k,k+1}: + :\sum_{1 \le i < k} (\bar{a}_{ik}\, a_{ik} - \bar{a}_{i,k+1}\, a_{i,k+1}):$$

$$+ :\sum_{k+1 < j \le r+1} (\bar{a}_{k+1,j}\, a_{k+1,j} - \bar{a}_{k,j}\, a_{k,j}): + \varepsilon b_k$$

$$F_k(z) := \sum_{1\le i<k} \bar{a}_{i,k+1} a_{ik} - \sum_{k<j\le r+1} :\bar{a}_{k,k+1}\bar{a}_{k,j} a_{k,j}:$$
$$+ :\sum_{k+1<j\le r+1} (\bar{a}_{k,k+1}\bar{a}_{k+1,j} - \bar{a}_{k,j}) a_{k+1,j}:$$
$$+ \varepsilon b_k \bar{a}_{k,k+1} + (\ell+k-1)\partial \bar{a}_{k,k+1} \qquad (1\le k\le r).$$

もちろん, ここで $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$, $\varepsilon^2 = \ell + g = \ell + r + 1$ である.

<u>Theorem C.3</u> ([FFr 1~4])

上記の $E_k(z)$, $H_k(z)$, $F_k(z)$ $(1\le k\le r)$ は $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$ $(\lambda \in \mathfrak{h}^*)$ の上に $\hat{\mathfrak{g}} = \widehat{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ の level $\ell = \varepsilon^2 - r - 1$ の表現を生成する. そして, $|\varepsilon,\lambda\rangle$ は $\hat{\mathfrak{g}} = \widehat{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ に対する highest weight vector の条件を満足し,

$$H_k |\varepsilon,\lambda\rangle = (\lambda | H_k) |\varepsilon,\lambda\rangle \quad (1\le k\le r)$$

が成立する.

ちなみに, $1\le j<k\le r+1$ に対する $E_{jk}(z)$ は

$$E_{jk}(z) = a_{jk}(z) + \sum_{1\le i<j} \bar{a}_{ij}(z) a_{ik}(z) \quad (1\le j<k\le r+1)$$

と簡単になるが, $1\le j<k<r+1$ に対する $E_{kj}(z)$ は複雑になる.

<u>Example</u> ($\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ の場合)

$\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ の場合は, $a = a_{12}$, $\bar{a} = \bar{a}_{12}$, $b = b_1$, $E = E_1$, $H = H_1$, $F = F_1$ とおくと, 以下のようになる;

$$[a(m), \bar{a}(n)] = \delta_{m+n,0}, \quad [b(m), b(n)] = 2m\,\delta_{m+n,0} \quad (m,n\in\mathbb{Z}),$$

$$T(z) = :a(z)\partial\bar{a}(z): + \frac{1}{4}:b(z)^2: - \frac{1}{2\varepsilon}\partial b(z),$$
$$c = 3 - \frac{6}{\varepsilon^2} = \frac{3\ell}{\ell+2},$$
$$E(z) = a(z),$$
$$H(z) = -2:\bar{a}(z)a(z): + \varepsilon b(z),$$
$$F(z) = -:\bar{a}(z)^2 a(z): + \varepsilon b(z)\bar{a}(z) + \ell\partial\bar{a}(z).$$

このとき，Wickの定理より，

$$\begin{aligned} H(z)H(w) = {} & 4:a(z)\bar{a}(z)a(w)\bar{a}(w): + (\ell+2):b(z)b(w): \\ & + \frac{4(:\bar{a}(z)a(w): - :\bar{a}(w)a(z):)}{z-w} + \frac{2\ell}{(z-w)^2} \\ & -2(:a(z)\bar{a}(z):\varepsilon b(w) + :a(w)\bar{a}(w):\varepsilon b(z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(z)F(w) = {} & -:a(z)a(w)\bar{a}(w)^2: + \varepsilon b(w):a(z)\bar{a}(w): + \ell:a(z)\partial\bar{a}(w): \\ & + \frac{-2:a(w)\bar{a}(w): + \varepsilon b(w)}{z-w} + \frac{\ell}{(z-w)^2} \end{aligned}$$

となることがわかるので，

$$T(w) \doteq \frac{1}{2(\ell+2)} \lim_{z\to w}\left\{\frac{1}{2}H(z)H(w) + E(z)F(w) + F(z)E(w) - \frac{3\ell}{(z-w)^2}\right\}$$

が成立することが直接確かめられる．すなわち，$a, \bar{a}, b$ によって定められた L_m が $\widehat{s\ell}_2(\mathbb{C})$ に対する Segal-Sugawara operators と一致することが計算によって確かめられた．

<u>Example</u> ($\mathfrak{g} = s\ell_3(\mathbb{C})$の場合)

$\mathfrak{g} = s\ell_3(\mathbb{C})$の場合は，$a_1 = a_{12}$, $a_2 = a_{23}$, $a_3 = a_{13}$, $\bar{a}_1 = \bar{a}_{12}$, $\bar{a}_2 = \bar{a}_{23}$, $\bar{a}_3 = \bar{a}_{13}$, $E_3 = E_{13}$, $F_3 = E_{31}$ とおくと，以下のようになる：

$$T(z) = \sum_{i=1}^{3} :a_i \partial \bar{a}_i: + \frac{1}{3} :(b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2): - \frac{1}{\varepsilon} \partial (b_1 + b_2),$$

$$C = 8 - \frac{24}{\varepsilon^2} = \frac{8\ell}{\ell+3},$$

$$E_1(z) = a_1,$$

$$E_2(z) = a_2 + \bar{a}_1 a_3,$$

$$E_3(z) = a_3,$$

$$H_1(z) = -2 :\bar{a}_1 a_1: + :\bar{a}_2 a_2: - :\bar{a}_3 a_3: + \varepsilon b_1,$$

$$H_2(z) = -2 :\bar{a}_2 a_2: + :\bar{a}_1 a_1: - :\bar{a}_3 a_3: + \varepsilon b_2,$$

$$F_1(z) = - :\bar{a}_1^2 a_1: - :\bar{a}_1 \bar{a}_3 a_3: - \bar{a}_3 a_2 - :\bar{a}_1 \bar{a}_2 a_2: + \varepsilon b_1 \bar{a}_1 + \ell \partial \bar{a}_1,$$

$$F_2(z) = \bar{a}_3 a_1 - :\bar{a}_2^2 a_2: + \varepsilon b_2 \bar{a}_2 + (\ell+1) \partial \bar{a}_2,$$

$$\begin{aligned} F_3(z) = & - :\bar{a}_1 \bar{a}_3 a_1: - :\bar{a}_3^2 a_3: - :\bar{a}_2 \bar{a}_3 a_2: + :\bar{a}_1 \bar{a}_2^2 a_2: \\ & + \varepsilon (b_1 + b_2) \bar{a}_3 - \varepsilon b_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2 + \ell \partial \bar{a}_3 - (\ell+1) \bar{a}_1 \partial \bar{a}_2 . \end{aligned}$$

この場合も，$a_i, \bar{a}_i$ $(1 \le i \le 3)$, b_1, b_2 によって定められた L_m が $\widehat{sl}_3(\mathbb{C})$ に対するSegal-Sugawara operatorsと一致することが直接計算で確かめられる.

ところで，KZ equationの導出（Lemma 2.3の証明）の要点は L_{-1} が $\frac{\partial}{\partial z_a}$ に置き換わることと，L_{-1} が $\mathfrak{g}$ のSegal-Sugawara formで表わされていることであった．したがって次の結果はKZ equationの解の積分表示を導出するためのkeyになる.

<u>Lemma C.4</u>　(key lemma)

(C.1)によって定められた $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$ 上のoperators L_m $(m \in \mathbb{Z})$ は $\widehat{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ のSegal-Sugawara operatorsに一致する.

Proof

$X = E_k, H_k, F_k$ $(1 \leq k \leq r)$ に対して，Wickの定理より次の OPE が成立することが直接計算によって確かめられる：

$$T(z)X(w) \sim \frac{\partial X(w)}{z-w} + \frac{X(w)}{(z-w)^2} \quad (z \to w).$$

これは次と同値である：

$$[L_m, X(n)] = -n X(m+n) \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

$L_m^{\mathfrak{g}}$ $(m \in \mathbb{Z})$ は $\hat{\mathfrak{g}} = \widehat{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ の Segal-Sugawara operators であるとする．このとき，$[L_m^{\mathfrak{g}}, X(n)] = -nX(m+n)$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ が成立するので，

$$[L_m - L_m^{\mathfrak{g}}, X(n)] = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

である．すなわち，$L_m - L_m^{\mathfrak{g}}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ と可換である．よって，$[L_m, L_n^{\mathfrak{g}}] = [L_m^{\mathfrak{g}}, L_n^{\mathfrak{g}}]$ が成立することがわかるので，

$$[L_m - L_m^{\mathfrak{g}}, L_n - L_n^{\mathfrak{g}}] = [L_m, L_n - L_n^{\mathfrak{g}}] = [L_m, L_n] - [L_m^{\mathfrak{g}} - L_n^{\mathfrak{g}}]$$

が成立する．よって，$L_m - L_m^{\mathfrak{g}}$ $(m \in \mathbb{Z})$ は central charge 0 の Virasoro algebra の表現を $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$ 上に定める．$\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$ の character は $\hat{\mathfrak{g}}$ の Verma module と一致するので，generic な $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$ と $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の Verma module と一致して irreducible になる．そのとき，Schur の Lemma より，ある定数 $x_m \in \mathbb{C}$ $(m \in \mathbb{Z})$ が存在して $L_m - L_m^{\mathfrak{g}} = x_m \cdot id$ が成立する．そして，$L_m - L_m^{\mathfrak{g}}$ $(m \in \mathbb{Z})$ が central charge 0 の Virasoro algebra の relation をみたすので $x_m = 0$ $(m \in \mathbb{Z})$ となることがわかる．よって，generic には $L_m = L_m^{\mathfrak{g}}$ が成立する．すべての $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$，$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対する結果は，generic な場合の極限をとることによって得られる． $\square$

$\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して,

$$\widetilde{M}_\mu := \mathcal{F}_{\varepsilon,\mu}(0) = \{ v \in \mathcal{F}_{\varepsilon,\mu} \mid L_0 v = \Delta_{\ell,\mu} v \}$$

とおく. $\widetilde{M}_\mu$ は left $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$-module をなす. $\widetilde{M}_\mu$ は $|\mu\rangle := |\varepsilon,\mu\rangle$ から $\bar{a}_\alpha(0)$ ($\alpha \in \Delta_+$) によって生成された $\mathcal{F}_{\varepsilon,\mu}$ の subspace をなす. $|\mu\rangle = 1$, $\bar{a}_\alpha(0) = x_\alpha$ ($\alpha \in \Delta_+$) なる同一視によって $\widetilde{M}_\mu$ は vector space として $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta_+}$ から生成された多項式環 $\mathbb{C}[x]$ と同一視される. $x_{ij} := x_{\alpha_{ij}}$, $\partial_{ij} := \dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}$ ($1 \le i < j \le r+1$) とおくと $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ の $\widetilde{M}_\mu = \mathbb{C}[x]$ への作用は以下のように書ける:

$$
\begin{aligned}
E_{jk} &= E_{jk}(0) = \partial_{jk} + \sum_{1 \le i < j} x_{ij} \partial_{ik} \qquad (1 \le j < k \le r+1), \\
H_j &= H_j(0) = -2 x_{j,j+1} \partial_{j,j+1} + \sum_{1 \le i < j} (x_{ij} \partial_{ij} - x_{i,j+1} \partial_{i,j+1}) \\
&\qquad + \sum_{j+1 < i \le r+1} (x_{j+1,i} \partial_{j+1,i} - x_{ji} \partial_{ji}) + \mu_j \qquad (1 \le j \le r), \\
F_j &= F_j(0) = \sum_{1 \le i < j} x_{i,j+1} \partial_{ij} - \sum_{j < i \le r+1} x_{j,j+1} x_{ji} \partial_{ji} \\
&\qquad + \sum_{j+1 < i \le r+1} (x_{j,j+1} x_{j+1,i} - x_{ji}) \partial_{j+1,i} \\
&\qquad + \mu_j x_{j,j+1} \qquad (1 \le j \le r),
\end{aligned}
$$

ここで, $\mu_j := (\mu | H_j)$ ($1 \le j \le r$) とおいた. ちょうどこれは, $G = SL_{r+1}(\mathbb{C})$ の flag manifold の Zariski open cell の上への $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ の無限小作用を適当な座標をとって具体的に書き下したものに一致する. また, $\mathcal{F}^+_{\varepsilon,\mu}(0)$ と $\widetilde{M}_\mu = \mathcal{F}_{\varepsilon,\mu}(0)$ の complete pairing によって, $\mathcal{F}^+_{\varepsilon,\mu} = \widetilde{M}_\mu^*$ (ここで $*$ は §§1.2 の意味での dual) が成立する. 以下, $p = (p^\alpha)_{\alpha \in \Delta} = (p^{jk})_{1 \le j < k \le r+1}$ に対して,

$$x^p := \prod_{\alpha \in \Delta_+} x_\alpha^{p^\alpha} = \prod_{1 \le j < k \le r+1} x_{jk}^{p^{jk}}$$

とおく.

Proposition C.5

$\widetilde{M}_\mu$ は $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ に対する(§§1,2で定義した) M_μ^{+*} に同型であり, $\widetilde{M}_\mu^* = \mathcal{F}_{\varepsilon,\mu}^+(0)$ は $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ の right Verma module M_μ^+ に同型である.

Proof

$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ とおく. $\langle\mu| \in M_\mu^+$ を $\langle\mu| \in \widetilde{M}_\mu^*$ にうつす $\mathfrak{g}$-homomorphism $f: M_\mu^+ \to \widetilde{M}_\mu^*$ が唯一存在して, $\mathfrak{g}$-homomorphism $f^*: \widetilde{M}_\mu \to M_\mu^{+*}$ を induceする. $V = \widetilde{M}_\mu, M_\mu^{+*}$ に対して $V(\eta) := \{v \in V \mid Hv = \eta(H)v \ (H\in\mathfrak{h})\}$ $(\eta\in\mathfrak{h}^*)$ とおくと, H_j $(1\le j\le r)$ の具体的な形より,

$$\widetilde{M}_\mu\Big(\mu - \sum_{s=1}^r m_s\alpha_s\Big) = \mathbb{C}\text{-span of } \Big\{x^p \,\Big|\, \sum_{s=1}^r m_s\alpha_s = \sum_{\alpha\in\Delta_+} p^\alpha\alpha\Big\} \quad (m_s\in\mathbb{Z}_{\ge0}),$$

$$\widetilde{M}_\mu = \bigoplus_{m_1,\cdots,m_r\in\mathbb{Z}_{\ge0}} \widetilde{M}_\mu\Big(\mu - \sum_{s=1}^r m_s\alpha_s\Big)$$

が成立することがわかる. よって, $\dim\widetilde{M}_\mu(\eta) = \dim M_\mu^{+*}(\eta)$ $(\eta\in\mathfrak{h}^*)$ が成立する. したがって, f^* が単射であることを示せば f^*が同型写像であることがわかる. $v\in\widetilde{M}_\mu$ をとり, $f^*(v)=0$ と仮定すると,

$$(*) \qquad 0 = \langle M_\mu^+ | f^*(v)\rangle = \langle f(M_\mu^+)|v\rangle = \langle f(M_\mu^+)|U(\mathfrak{g})v\rangle.$$

ところが, E_{jk} $(1\le j<k\le r+1)$ の具体的な形より, $E_{jk}v=0$ $(1\le j<k\le r+1)$ ならば $v\in\mathbb{C}|\mu\rangle = \mathbb{C}\cdot 1$ となることがわかる. よって, $v\ne 0$ のとき $|\mu\rangle\in U(\mathfrak{g})v$. ところがこれは $f(\langle\mu|)=\langle\mu|$, $\langle\mu|\mu\rangle = 1$ および $(*)$ と矛盾する. したがって, $v=0$. これで, f^*が単射であることを示せた. $\square$

特に V_μ (resp. V_μ^+) は $\widetilde{M}_\mu$ (resp. $\widetilde{M}_\mu^*$) の submodule (resp. quotient module) とみなせることがわかる.

Example ($\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$の場合)

$\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$とし, $x:=x_{12}=\bar{a}_{12}(0)$ とおくと $\widetilde{M}_\mu=\mathbb{C}[x]$ とみなせる. $2j=(\mu|H)$ とおくと, $sl_2(\mathbb{C})=\mathbb{C}E\oplus\mathbb{C}H\oplus\mathbb{C}F$ の $\widetilde{M}_\mu=\mathbb{C}[x]$ への作用は次のようになる:

$$E=\frac{d}{dx}\ ,\quad H=-2x\frac{d}{dx}+2j\ ,\quad F=-x^2\frac{d}{dx}+2jx.$$

よって, 次が成立する:

$$Ex^n=nx^{n-1},\quad Hx^n=2(j-n)x^n,\quad Fx^n=(2j-n)x^{n+1}\quad(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

したがって, $2j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき $|\mu\rangle=1\in\widetilde{M}_\mu=\mathbb{C}[x]$ から生成された $\widetilde{M}_\mu$ の $\mathfrak{g}$-submodule は $\mathbb{C}1\oplus\mathbb{C}x\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}x^{2j}$ となり $\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$ の $(2j+1)$ 次元既約表現と同型になる.

Example ($\mathfrak{g}=sl_3(\mathbb{C})$の場合)

$\mathfrak{g}=sl_3(\mathbb{C})$とし, $x_1:=\bar{a}_{12}(0)$, $x_2:=\bar{a}_{23}(0)$, $x_3:=\bar{a}_{13}(0)$ とおくと, $\widetilde{M}_\mu=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ とみなせる. $\mu_i:=(\mu|H_i)$ $(i=1,2)$ とおく. $\widetilde{M}_\mu$ への $sl_3(\mathbb{C})$の作用は次のようになる:

$$H_1=-2x_1\partial_1+x_2\partial_2-x_3\partial_3+\mu_1,$$

$$H_2=-2x_2\partial_2+x_1\partial_1-x_3\partial_3+\mu_2,$$

$$E_1=\partial_1\ ,\quad E_2=\partial_2+x_1\partial_3\ ,\quad E_3=\partial_3\ ,$$

$$F_1=-x_1^2\partial_1-x_1x_3\partial_3-x_3\partial_2+x_1x_2\partial_2+\mu_1x_1\ ,$$

$$F_2=x_3\partial_1-x_2^2\partial_2+\mu_2x_2\ ,$$

$$F_3=-x_1x_3\partial_1-x_3^2\partial_3-x_2x_3\partial_2+x_1x_2^2\partial_2+(\mu_1+\mu_2)x_3-\mu_2x_1x_2.$$

よって, $p=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ に対する $x^p=x_1^{p_1}x_2^{p_2}x_3^{p_3}$ に対する作用は, 以下のようになる:

$$H_1x^p=(-2p_1+p_2-p_3+\mu_1)x^p,$$

$$H_2 x^p = (-2p_2 + p_1 - p_3 + \mu_2) x^p,$$

$$E_1 x^p = p_1 x^{p-e_1}$$

$$E_2 x^p = p_2 x^{p-e_2} + p_3 x^{p+e_1-e_3},$$

$$E_3 x^p = p_3 x^{p-e_3},$$

$$F_1 x^p = (\mu_1 - p_1 + p_2 - p_3) x^{p+e_1} - p_2 x^{p-e_2+e_3},$$

$$F_2 x^p = (\mu_2 - p_2) x^{p+e_2} + p_1 x^{p-e_1+e_3},$$

$$F_3 x^p = (\mu_1 + \mu_2 - p_1 - p_2 - p_3) x^{p+e_3} + (p_2 - \mu_2) x^{p+e_1+e_2},$$

ここで，$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ とおいた.

C.3. KZ equationの解になるような積分表示式

以下，$\varepsilon^2 = \ell + g = \ell + r + 1 \neq 0$ とし，$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$とする.

$v = x^p \in \widetilde{M}_\mu = \mathbb{C}[x]$ に対して，

$$\Phi_{\varepsilon,\mu}(z;v) := \left(\prod_{1 \leq j < k \leq r+1} \overline{a}_{jk}(z)^{p^{jk}}\right) V_{\varepsilon,\mu}(z)$$

とおく. Wickの定理を使って計算すると，以下のOPE'sが成立することがわかる：

$$X(\zeta)\Phi_{\varepsilon,\mu}(z;v) \sim \frac{\Phi_{\varepsilon,\mu}(z;Xv)}{\zeta - z}, \quad X \in \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C}) \qquad (\zeta \to z),$$

$$T(\zeta)\Phi_{\varepsilon,\mu}(z;v) \sim \frac{\partial\Phi_{\varepsilon,\mu}(z;v)}{\zeta - z} + \frac{\Delta_{\ell,\mu}\Phi(z;v)}{(\zeta - z)^2} \qquad (\zeta \to z).$$

これは以下と同値である：

$$[X(m), \Phi_{\varepsilon,\mu}(z;v)] = z^m \Phi(z;Xv) \quad (X \in \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C}), m \in \mathbb{Z}),$$

$$[L_m, \Phi_{\varepsilon,\mu}(z;v)] = z^m \left(z\frac{d}{dz} + (m+1)\Delta_{\ell,\mu}\right)\Phi_{\varepsilon,\mu}(z;v) \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

$\hat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}_{r+1}(\mathbb{C})$の表現 $\widetilde{\mathcal{M}}_{\ell,\mu}$ を次のように定める：

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\ell,\mu} := U(\hat{\mathfrak{g}}) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} \widetilde{M}_\mu \Big/ \left(U(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\ell}-\ell) + U(\hat{\mathfrak{g}})\hat{\mathfrak{g}}_+ \right) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} \widetilde{M}_\mu .$$

Proposition C.5より，$\mathcal{M}_{\ell,\mu} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\ell,\lambda}$ とみなせることを注意しておく。Proposition 3.7と同様にして次が成立することを示せる。そこでは，L_m $(m\in\mathbb{Z})$ の Segal-Sugawara formの書き換えである Lemma 3.5が大事な役目をはたしていたことを注意しておく。したがって，次を示すためには Lemma C.4が必要になる。

<u>Lemma C.6</u>

$v\in\widetilde{M}_\mu$ に対する $\Phi_{\varepsilon,\mu}(z;v)$ は，$v\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\ell,\mu}$ に対する $\Phi_{\varepsilon,\mu}(z;v)$ に拡張されて，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^{+}_{\varepsilon,\lambda+\mu}\otimes\widetilde{\mathcal{M}}_{\ell,\mu}\otimes\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}, \mathbb{C})$-値函数として (3.8〜10) と同様な条件を満足する。そして，拡張された $\Phi_{\varepsilon,\mu}(z)$ は

$$\Phi_{\varepsilon,\mu}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{-m-\Delta_{\ell,\lambda}-\Delta_{\ell,\mu}+\Delta_{\ell,\lambda+\mu}}\,\Phi_{\varepsilon,\mu}(m)$$

と展開されて，$\Phi_{\varepsilon,\mu}(m)\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\widetilde{\mathcal{M}}_{\ell,\mu}\otimes\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}, \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+\mu})$ が成立する。

ウソ

~~本当は，さらに $a_\alpha(z), \bar{a}_\alpha(z)$ $(\alpha\in\Delta_+)$ を"bosonize"して考えた方が良い。そのようにすると，Lemma C.6 において $\widetilde{\mathcal{M}}_{\ell,\mu}$ を $\mathcal{F}_{\varepsilon,\mu}$ に置き換えた結果を示せる。~~ 削除

[FFr 2〜4]は次の重要な operatorsを発見している：

$$\bar{E}_j(z) := a_{j,j+1}(z) + \sum_{j+1<i} \bar{a}_{j+1,i}(z)\,a_{j,i}(z) \qquad (1\le j\le r),$$

$$J_{\varepsilon,j}(z) := \bar{E}_j(z)\,V_{\varepsilon,-\alpha_j}(z) \qquad (1\le j\le r).$$

Wickの定理を用いた計算によって次が成立することを示せる。

<u>Lemma C.7</u> ([FFr 2~4])

$J_{\varepsilon,j}(z)$ $(1\le j\le r)$ は以下をみたす：

$$[E_i(m), J_{\varepsilon,j}(z)] = [H_i(m), J_{\varepsilon,j}(z)] = 0 \quad (1\le i,j\le r,\ m\in\mathbb{Z}),$$

$$[F_i(m), J_{\varepsilon,j}(z)] = \delta_{ij}\,\varepsilon^2 \frac{d}{dz}\left(z^{m+1} V_{\varepsilon,-\alpha_j}(z)\right) \quad (1\le i,j\le r,\ m\in\mathbb{Z}),$$

$$[L_m, J_{\varepsilon,j}(z)] = \frac{d}{dz}\left(z^{m+1} J_{\varepsilon,j}(z)\right) \quad (1\le j\le r,\ m\in\mathbb{Z}).$$

そして，$J_{\varepsilon,j}(z)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^{+}_{\varepsilon,\lambda-\alpha_j}\otimes\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda},\mathbb{C})$ 値函数として，

$$J_{\varepsilon,j}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{-m-1-\Delta_{\ell,\lambda}+\Delta_{\ell,\lambda-\alpha_j}} J_{\varepsilon,j}(m)$$

と Laurent 展開されて，$J_{\varepsilon,j}(m)\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda},\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda-\alpha_j})$ が成立する．

以上の結果を利用して，KZ equation の解になるような積分表示式を構成しよう．$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_N\in\mathfrak{h}^*$，$m_1,\cdots,m_r\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ とし，λ_∞ を次のようにおく：

$$\lambda_\infty := \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_N-(m_1\alpha_1+\cdots+m_r\alpha_r).$$

$M := m_1+\cdots+m_r$ とおき，$\mathbb{C}^M$ の座標系を

$$t=(t_s(i))_{1\le s\le r,\,1\le i\le m_s} = (t_1(1),\cdots,t_1(m_1);\cdots;t_r(1),\cdots,t_r(m_r))$$

と表わす．$v_a\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\ell,\lambda_a}$ $(1\le a\le N)$，$v_0\in\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda_0}$，$v_\infty\in\mathcal{F}^{+}_{\varepsilon,\lambda_\infty}$ に対して，

$$\langle v_\infty|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_1\rangle|v_0\rangle := \langle v_\infty|\prod_{s=1}^{r}\prod_{i=1}^{m_s} J_{\varepsilon,s}(t_s(i))\prod_{a=1}^{N}\Phi_{\varepsilon,\lambda_a}(z_a;v_a)|v_0\rangle$$

とおくと，これは Lemma C.2 より適当な領域で収束し

$$\{(z,t)\in\mathbb{C}^{N+M} \mid 0,\ z_a,\ t_s(i)\ は互いに異なる\}$$

の上の多価正則函数に解析接続される．これで，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^{+}_{\varepsilon,\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=1}^{N}\widetilde{\mathcal{M}}_{\ell,\lambda_a}\otimes\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda_0},\mathbb{C})$ 値多価正則函数 $\Phi(z,t)$ が定められた．$\Phi(z,t)$ の $\widetilde{M}^*_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=1}^{N}\widetilde{M}_{\lambda_a}\otimes\widetilde{M}_{\lambda_0}$ の上への制限を，

$$F(z,t) := \Phi(z,t)\Big|_{\widetilde{M}^*_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=1}^{N}\widetilde{M}_{\lambda_a}\otimes\widetilde{M}_{\lambda_0}}$$

と表わす. 以下, $z_0 := 0$, $z_{ab} := z_a - z_b$ とおく. Lemma C.6, C.7より次が成立することが計算によって示せる.

Lemma C.8

$v_b \in \widetilde{M}_{\lambda_b}\ (1\le b\le N)$, $v_0\in\widetilde{M}_{\lambda_0}$; $v_\infty\in\widetilde{M}^*_{\lambda_\infty}$ に対して 以下が成立する:

(1) $0\le a\le N$ と $X = E_j, H_j\ (1\le j\le r)$ に対して,

(1a) $$\langle v_\infty X|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_0\rangle = \sum_{b=0}^{N}\langle v_\infty|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_{b+1}\rangle|Xv_b\rangle|v_{b-1}\rangle\cdots|v_0\rangle,$$

(1b) $$\langle v_\infty|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_{a+1}\rangle|X(-1)v_a\rangle|v_{a-1}\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$= \sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}}\frac{1}{z_{ab}}\langle v_\infty|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_{b+1}\rangle|Xv_b\rangle|v_{b-1}\rangle\cdots|v_0\rangle,$$

(1c) $$\langle v_\infty F_j|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$= \sum_{b=0}^{N}\langle v_\infty|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_{b+1}\rangle|F_jv_b\rangle|v_{b-1}\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$+\varepsilon^2\sum_{i=1}^{m_j}\frac{\partial}{\partial t_j(i)}\Big\{t_j(i)\langle v_\infty|V_{\varepsilon,-\alpha_j}(t_j(i))\prod_{(p,q)\ne(j,i)}J_{\varepsilon,p}(t_p(q))\cdot\prod_{b=1}^{N}\Phi_{\varepsilon,\lambda_b}(z_b;v_b)|v_0\rangle\Big\},$$

(1d) $$\langle v_\infty|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_{a+1}\rangle|F_j(-1)v_a\rangle|v_{a-1}\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$= \sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}}\frac{1}{z_{ab}}\langle v_\infty|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_{b+1}\rangle|F_jv_b\rangle|v_{b-1}\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$+\varepsilon^2\sum_{i=1}^{m_j}\frac{\partial}{\partial t_j(i)}\Big\{\frac{t_j(i)}{z_a-t_j(i)}\langle v_\infty|V_{\varepsilon,-\alpha_j}(t_j(i))\prod_{(p,q)\ne(j,i)}J_{\varepsilon,p}(t_p(q))\prod_{b=1}^{N}\Phi_{\varepsilon,\lambda_b}(z_b;v_b)|v_0\rangle\Big\}.$$

(2) $1\le a\le N$ に対して,

$$\langle v_\infty|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_{a+1}\rangle|L_{-1}v_a\rangle|v_{a-1}\rangle\cdots|v_0\rangle = \frac{\partial}{\partial z_a}\langle v_\infty|\Phi(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_0\rangle.$$

式の表示を短縮するために，$dt := dt_1(1)\wedge\cdots\wedge dt_1(m_1)\wedge\cdots\wedge dt_r(1)\wedge\cdots\wedge dt_r(m_r)$

とおく．$\omega(z,t)$を

$$\omega(z,t) := \prod_{0\le a<b\le N}(z_b-z_a)^{(\lambda_a|\lambda_b)/\varepsilon^2}\cdot\prod_{\substack{0\le a\le N\\ 1\le s\le r\\ 1\le i\le m_s}}(t_s(i)-z_a)^{-(\alpha_s|\lambda_a)/\varepsilon^2}\cdot\prod_{\substack{1\le p\le q\le r\\ 1\le i\le m_p\\ 1\le j\le m_q\\ (p,i)\ne(q,j)}}(t_q(j)-t_p(i))^{(\alpha_p|\alpha_q)/\varepsilon^2}$$

と定める．ここで，以下をみたす積分$\int_\Gamma$が存在すると仮定する：

(C.2) $\{(z,t)\in\mathbb{C}^{N+M}\mid 0, z_a, t_s(i)$は互いに異なる$\}$の上で正則な任意の有理函数 $\varphi(z,t)$に対して，

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial t_s(i)}\big(\varphi(z,t)\omega(z,t)\big)\,dt = 0$$

が成立する．

$\Phi(z)$と$F(z)$を次のように定める：

$$\Phi(z) := \int_\Gamma \Phi(z,t)\,dt, \quad F(z) := \int_\Gamma F(z,t)\,dt.$$

Lemma C.2, C.8より次が成立することがわかる：

(C.3) $0\le a\le N$, $X\in\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$, $v_b\in\tilde{M}_{\lambda_b}\ (1\le b\le N)$, $v_0\in\tilde{M}_{\lambda_0}$, $v_\infty\in\tilde{M}^*_{\lambda_\infty}$に対して，

$$\langle v_\infty X|F(z)|v_N\rangle\cdots|v_0\rangle = \sum_{b=0}^{N}\langle v_\infty|F(z)|v_N\rangle\cdots|v_{b+1}\rangle|Xv_b\rangle|v_{b-1}\rangle\cdots|v_0\rangle,$$

$$\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|v_{a+1}\rangle|X(-1)v_a\rangle|v_{a-1}\rangle\cdots|v_0\rangle$$
$$= \sum_{\substack{0\le b\le N\\ b\ne a}}\frac{1}{z_{ab}}\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|v_{b+1}\rangle|Xv_b\rangle|v_{b-1}\rangle\cdots|v_0\rangle.$$

(C.4) $1\le a\le N$ に対して，

$$\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|v_{a+1}\rangle|L_{-1}v_a\rangle|v_{a-1}\rangle\cdots|v_0\rangle = \frac{\partial}{\partial z_a}\langle v_\infty|\Phi(z)|v_N\rangle\cdots|v_0\rangle.$$

実はもっと一般に$\Phi(z)$が conformal block の定義と同様の条件をみたす

ことがわかる. (C.3),(C.4) より, Lemma 2.3の証明と同様にして次が成立することがわかる.

Theorem C.9

$F(z)=\int_\Gamma F(z,t)\,dt$ は $\{z\in\mathbb{C}^N \mid 0, z_1, \cdots, z_N$ は互いに異なる$\}$ の上の $\mathrm{Hom}_{sl_{r+1}(\mathbb{C})}(\widetilde{M}^*_{\lambda_\infty}\otimes\bigotimes_{a=0}^N\widetilde{M}_{\lambda_a},\mathbb{C})$-値多価正則函数であり, KZ equation (2.7) をみたす.

$F(z)$ の $sl_{r+1}(\mathbb{C})$-invariance と $\widetilde{M}^*_{\lambda_\infty}$ が right Verma module であることより, $F(z)$ は $F(z)\big|_{\langle\lambda_\infty|\otimes\bigotimes_{a=0}^N\widetilde{M}_{\lambda_a}}$ から一意に決定される. そこで, $F(z,t)\big|_{\langle\lambda_\infty|\otimes\bigotimes_{a=0}^N\widetilde{M}_{\lambda_a}}$ の具体的な形を計算しよう. そのためには,

$$\lim_{\zeta\to 0}\Phi_{\varepsilon,\lambda_0}(\zeta;v_0)|0\rangle=|v_0\rangle\quad(v_0\in\widetilde{M}_{\lambda_0}=\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda_0}(0))$$

が成立することが容易にわかるので, $\lambda_0=0$ の場合に $F(z,t)\big|_{\langle\lambda_\infty|\otimes\bigotimes_{a=0}^N\widetilde{M}_{\lambda_a}\otimes|0\rangle}$ を計算すれば十分である. そこで以下 $\lambda_0=0$ とおく.

Example ($sl_2(\mathbb{C})$ の場合)

$\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$ とし, $\alpha:=\alpha_1$ とおく. $\varepsilon^2=l+2$, $M=m_1$, $\overline{E}_1(z)=a(z)$ であり, $t_i:=t_1(i)$ とおくと $t=(t_1,\cdots,t_M)$ である. そして, $2j_a:=(\lambda_a|H)$ $(a=0,1,\cdots,N,\infty)$ とおくと, $j_0=0$ であり,

$$j_\infty=j_1+j_2+\cdots+j_N-m$$

である. $\langle j_\infty|:=\langle\lambda_\infty|$ と書く. $v_a:=x^{p_a}\in\widetilde{M}_{\lambda_a}$ $(1\le a\le N)$ に対して, Lemma C.2

より次が成立することがわかる：

$$\langle j_\infty | F(z,t) | v_N\rangle \cdots |v_1\rangle |0\rangle$$
$$= \langle j_\infty | \prod_{i=1}^{M} \left(a(t_i) V_{\varepsilon,-\alpha}(t_i) \right) \prod_{a=1}^{N} \left(\overline{a}(z_a)^{p_a} V_{\varepsilon,\lambda_a}(z_a) \right) |0\rangle$$
$$= \langle 0 | \prod_{i=1}^{M} a(t_i) \cdot \prod_{a=1}^{N} \overline{a}(z_a)^{p_a} |0\rangle \cdot \omega(z,t) ,$$

ここで,

$$\omega(z,t) = \prod_{1\le a<b\le N} (z_b - z_a)^{2 j_a j_b/\varepsilon^2} \cdot \prod_{\substack{1\le a\le N \\ 1\le i\le M}} (t_i - z_a)^{-2 j_a/\varepsilon^2} \cdot \prod_{1\le i<j\le M} (t_j - t_i)^{2/\varepsilon^2} .$$

そして, $P := p_1 + \cdots + p_N$ とし,

$$(w_1, \cdots, w_P) := (\underbrace{z_1, \cdots, z_1}_{p_1\text{個}}, \underbrace{z_2, \cdots, z_2}_{p_2\text{個}}, \cdots, \underbrace{z_N, \cdots, z_N}_{p_N\text{個}})$$

とおくと, Wickの定理より次が成立することがわかる：

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^{M} a(t_i) \cdot \prod_{a=1}^{N} \overline{a}(z_a)^{p_a} |0\rangle = \begin{cases} 0 & (P \neq M \text{のとき}) \\ \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_M} \prod_{i=1}^{M} \frac{1}{t_{\sigma(i)} - w_i} & (P = M \text{のとき}) \end{cases} .$$

ここで, $\mathfrak{S}_M$ は M 次の対称群を表わす. したがって, $P=M$ のときにのみ non-trivial であり、そのとき,

$$\langle j_\infty | F(z) | v_N\rangle \cdots |v_1\rangle |0\rangle = \int_\Gamma \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_M} \frac{1}{t_{\sigma(i)} - w_i} \cdot \omega(z,t)\, dt$$

が成立する.

<u>Example</u> ($sl_3(\mathbb{C})$の場合)

$\mathfrak{g} = sl_3(\mathbb{C})$ とする. このとき, $\varepsilon^2 = \ell + 3$, $M = m_1 + m_2$ であり,

$$\overline{E}_1(z) = a_1(z) + \overline{a}_2(z) a_3(z) , \quad \overline{E}_2(z) = a_2(z)$$

であり，$\widetilde{M}_{\lambda_a}=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ とみなせるのであった．$p(a)=(p^1(a),p^2(a),p^3(a))\in\mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ $(1\leq a\leq N)$ をとり，

$$v_a:=x^{p(a)}=x_1^{p^1(a)}x_2^{p^2(a)}x_3^{p^3(a)}\in\widetilde{M}_{\lambda_a}\quad(1\leq a\leq N)$$

とおく．Lemma C.2より，$v:=v_N\otimes\cdots\otimes v_1$ に対して，次が成立することがわかる：

$$\langle\lambda_\infty|F(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_1\rangle|0\rangle=\varphi(z,t;v)\,\omega(z,t),$$

ここで，

$$\varphi(z,t;v)=\langle 0|\prod_{s=1}^{2}\prod_{i=1}^{m_s}\overline{E}_s(t_s(i))\cdot\prod_{a=1}^{N}\prod_{j=1}^{3}\overline{a}_j(z_a)^{p^j(a)}|0\rangle.$$

$P^j:=\sum_{a=1}^{N}p^j(a)$ $(j=1,2,3)$ とおく．Wickの定理より，$P^1+P^3=m_1$ かつ $P^2+P^3=m_2$ のとき以外は $\varphi(z,t;v)=0$ となることがわかる．以下，$P^1+P^3=m_1$ かつ $P^2+P^3=m_2$ と仮定する．$\varphi(z,t;v)$ は $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathfrak{S}_{m_1}\times\mathfrak{S}_{m_2}$ による変数の置換 $t=(t_s(i))_{s=1,2,\,1\leq i\leq m_s}\mapsto\sigma(t)=(t_s(\sigma_s(i)))_{s=1,2,\,1\leq i\leq m_s}$ について不変な形をしている．そこで，$\mathcal{S}[f(t)]$ を次のように定める：

$$\mathcal{S}[f(t)]:=\sum_{\sigma_1\in\mathfrak{S}_{m_1}}\sum_{\sigma_2\in\mathfrak{S}_{m_2}}f(\sigma(t)).$$

$z^j(i)$ $(j=1,2,3,\ 1\leq i\leq P_j)$ と $t_s^j(i)$ $(s=1,2,\ j=1,2,3,\ 1\leq i\leq P_j)$ を次のように定める：

$$(z^j(1),\cdots,z^j(P_j)):=(\underbrace{z_1,\cdots,z_1}_{p^j(1)\text{個}},\underbrace{z_2,\cdots,z_2}_{p^j(2)\text{個}},\cdots,\underbrace{z_N,\cdots,z_N}_{p^j(N)\text{個}})\quad(j=1,2,3)$$

$$(t_1^1(1),\cdots,t_1^1(P_1),t_1^3(1),\cdots,t_1^3(P_3)):=(t_1(1),\cdots,t_1(m_1)),$$

$$(t_2^2(1),\cdots,t_2^2(P_2),t_2^3(1),\cdots,t_2^3(P_3)):=(t_2(1),\cdots,t_2(m_2)).$$

以上の記号のもとで，Wickの定理を使うと $\varphi(z,t;v)$ の形は次のようになることがわかる：

$$\varphi(z,t;v)=\mathcal{S}\left[\prod_{i=1}^{p_1}\frac{1}{t_1^1(i)-z^1(i)}\cdot\prod_{i=1}^{p_2}\frac{1}{t_2^2(i)-z^2(i)}\cdot\prod_{i=1}^{p_3}\frac{1}{(t_1^3(i)-z^3(i))(t_2^3(i)-t_1^3(i))}\right].$$

これで，$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$の場合の $F(z)\Big|_{\langle\lambda_\infty|\otimes\bigotimes_{a=1}^{N}\widetilde{M}_{\lambda_a}\otimes|0\rangle}$ の形がわかった。

以上の例を一般化して，$\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$に対する式を書き下そう．

$x:=(x_{jk})_{1\le j<k\le r+1}=(\bar{a}_{jk}(0))_{1\le j<k\le r+1}$ とおくと，$\widetilde{M}_{\lambda_a}=\mathbb{C}[x]$ とみなせるのであった．そこで，$p(a):=(p^{jk}(a))_{1\le j<k\le r+1}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ $(1\le a\le N)$ をとり，

$v=v_N\otimes\cdots\otimes v_1\in\bigotimes_{a=1}^{N}\widetilde{M}_{\lambda_a}$ を次のように定める：

$$v_a:=x^{p(a)}=\prod_{1\le j<k\le r+1}x_{jk}^{p^{jk}(a)}\in\widetilde{M}_{\lambda_a}\quad(1\le a\le N).$$

Lemma C.2より，vに対して次が成立することがわかる：

$$\langle\lambda_\infty|F(z,t)|v_N\rangle\cdots|v_1\rangle|0\rangle=\varphi(z,t;v)\,\omega(z;t),$$

ここで，

$$\omega(z,t)=\prod_{1\le a<b\le N}(z_b-z_a)^{(\lambda_a|\lambda_b)/\varepsilon^2}\prod_{\substack{1\le a\le N\\1\le s\le r\\1\le i\le m_s}}(t_s(i)-z_a)^{-(\alpha_s|\lambda_a)/\varepsilon^2}\prod_{\substack{1\le p\le q\le r\\1\le i\le m_p\\1\le j\le m_q\\(p,i)\neq(q,j)}}(t_q(j)-t_p(i))^{(\alpha_p|\alpha_q)/\varepsilon^2},$$

$$\varphi(z,t;v)=\langle 0|\prod_{s=1}^{r}\prod_{i=1}^{m_s}\bar{E}_s(t_s(i))\cdot\prod_{a=1}^{N}\prod_{1\le j<k\le r+1}\bar{a}_{jk}(z)^{p^{jk}(a)}|0\rangle$$

であり，もちろん $\varepsilon^2=\ell+g=\ell+r+1$ である．$\varphi(z,t;v)$ は $\sigma=(\sigma_s)_{1\le s\le r}\in\prod_{s=1}^{r}\mathfrak{S}_{m_s}$ による変数の置換 $t=(t_s(i))_{1\le s\le r,\,1\le i\le m_s}\mapsto\sigma(t)=(t_s(\sigma_s(i)))_{1\le s\le r,\,1\le i\le m_s}$ について不変な形をしている．そこで，$\mathcal{S}[f(t)]$ を次のように定める：

$$\mathcal{S}[f(t)]:=\sum_{\sigma\in\prod_{s=1}^{r}\mathfrak{S}_{m_s}}f(\sigma(t)).$$

P^{jk} $(1\le j<k\le r+1)$ を

$$P^{jk} := \sum_{a=1}^{N} p^{jk}(a) \quad (1\le j<k\le r+1)$$

と定めると，Wickの定理より

$$\text{(C.5)} \qquad \sum_{1\le j\le s<k\le r+1} P^{jk} = m_s \quad (1\le s\le r)$$

が成立するとき以外は $\varphi(z,t;v)=0$ となるので，以下この条件を仮定する．この条件が成立しないとき $\varphi(z,t;v)=0$ となることは，$F(z,t)$ の $\mathfrak{g}$-invariance と $\alpha_{jk} = \sum_{j\le s<k} \alpha_s$ $(1\le j<k\le r+1)$ より $v_a = x^{p(a)} \in \tilde{M}_{\lambda_a}$ に対して

$$H_i v_a = \left(\lambda_a - \sum_{s=1}^{r}\left(\sum_{1\le j\le s<k\le r+1} p^{jk}(a)\right)\alpha_s \middle| H_i\right) v_a \quad (1\le i\le r)$$

が成立することからもわかる．$z^{jk}(i)$ $(1\le j<k\le r+1,\ 1\le i\le P^{jk})$

$$(z^{jk}(1),\cdots,z^{jk}(P^{jk})) := (\underbrace{z_1,\cdots,z_1}_{p^{jk}(1)\text{個}}, \underbrace{z_2,\cdots,z_2}_{p^{jk}(2)\text{個}}, \cdots, \underbrace{z_N,\cdots,z_N}_{p^{jk}(N)\text{個}})$$

と定め，$t_s^{jk}(i)$ $(1\le s\le r,\ 1\le j<k\le r+1,\ 1\le i\le P^{jk})$ を $sl_3(\mathbb{C})$ の場合と同様に $t_s = (t_s(i))_{1\le i\le m_s}$ を (C.5) にしたがって分割することにより，

$$(t_s^{jk}(i))_{1\le j<s\le k\le r+1,\ 1\le i\le P^{jk}} := (t_s(i))_{1\le i<m_s} \quad (1\le s\le r)$$

と定める．Wickの定理より，$\varphi(z,t;v)$ は次のように書けることがわかる：

$$\varphi(z,t;v) = \mathcal{S}\left[\prod_{1\le j<k\le r+1} \prod_{i=1}^{P^{jk}} \left\{ (t_j^{jk}(i) - z^{jk}(i)) \prod_{j+1\le s\le \ell-1} (t_s^{jk}(i) - t_{s-1}^{jk}(i)) \right\}^{-1}\right].$$

以上の記号のもとで次が成立する：

$$\langle \lambda_\infty | F(z) | v_N\rangle \cdots | v_1\rangle |0\rangle = \int_\Gamma \varphi(z,t;v)\,\omega(z,t)\,dt.$$

References

この論文の内容に直接関係するものに限って参考文献を挙げるにとどめる. ここに挙げた文献以外にも重要なものは多数あるが省略する.

共形場理論についての重要な(古典的)基本文献.

[BPZ] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov : Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, Nuclear Physics B241, 1984, 333-380.

[FrS] D. Friedan, S. Shenker ; The analytic geometry of two-dimensional conformal field theory, Nuclear Physics B281, 1987, 509-545.

Knizhnik-Zamolodchikov による Wess-Zumino model の定式化.

[KZ] V.G. Knizhnik, A.B. Zamolodchikov : Current algebra and Wess-Zumino model in two dimension, Nuclear Physics B247, 1984, 83-103

[GW] D. Gepner, E. Witten : String theory on group manifolds, Nuclear Physics B278, 1986, 493-549.

無限次元 Lie 環についての教科書.

[Kac] V.G. Kac : Infinite dimensional Lie algebras, second edition, Cambridge University Press, 1985.

[KR] V.G. Kac, A.K. Raina : Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras, Advanced Series in Math. Phys. Vol. 2, World Scientific, 1987.

Chiral vertex operatorsによる共形場理論の定式化とconformal blockのmonodromy.

[TK1] A. Tsuchiya, Y. Kanie : Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representation of braid group, Advanced Studies in Pure Math. 16, 1988, 297-372.

[MS1] G. Moore, N. Seiberg : Polynomial equations for rational conformal field theories, Physics Letter B212, 1988, 451-460.

[MS2] —, — : Naturality in conformal field theory, Nuclear Physics B313, 1989, 16-40.

[MS3] —, — : Classical and quantum conformal field theory, Commun. Math. Phys. 123, 1989, 177-254.

Appendix Aで次の文献を引用した.

[Kn] A.W. Knapp : Representation theory of semisimple groups : An overview based on examples, Princeton Mathematical Series 36, 1986

[CL] E.A. Coddington, N. Levinson : Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955

Virasoro algebraに対するFeigin-Fuchsの結果.

[FFu1] B.L. Feigin, D.B. Fuchs: Verma modules over the Virasoro algebra, in: Lecture Notes in Math. 1060, 1984, 230-245.

[FFu2] —, —: Representations of the Virasoro algebra, in: Seminar on supermanifolds, Reports of the Dept. Math. Stockholm Univ., 1986, to be published in: Representation of infinite-dimensional Lie groups and Lie algebras, N.Y. Gordon and Breach.

Virasoro algebraのunitary表現.

[FQS] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker: Details of the non-unitarity proof for highest weight representations of Virasoro algebra; Commun. Math. Phys. 107, 1986, 535-542.

[L] R. Langlands: On unitary representation of the Virasoro algebra, in: Infinite-dimensional Lie algebras and their applications, Centre de Kecherches Mathématiques Université de Montréal 12-16 May 1986, edited by Steven N. Kaass, World Scientific, 141-159

[GKO] P. Goddard, A. Kent, D. Olive: Unitary representation of the Virasoro and super-Virasoro algebras, Commun. Math. Phys. 103, 1986, 105-119.

[KW] V.G. Kac, M. Wakimoto: Unitarizable highest weight representations of the Virasoro, Neveu-Schwarz and Ramond algebras, in: Lecture Notes in Phys. 261, 1986, 345-371.

[TK2] A. Tsuchiya, Y. Kanie: Unitary representation of the Virasoro algebra, Duke Math. J. 53, 1986, 1013-1046.

BPZ minimal models における conformal blocks の積分表示：

[DF1] Vl. S. Dotsenko, V. A. Fateev: Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models, Nuclear Physics B240 [FS12], 1984, 312-348.

[DF2] —, —: Four-point correlation functions and the operator algebra in 2D conformal invariant theories with central charge $c \leqq 1$, Nuclear Physics B251 [FS13], 1985, 691-734.

[F] G. Felder: BRST approach to minimal models, Nuclear Physics B317, 1989, 215-236.

[FeS] G. Felder, R. Silvotti: Modular covariance of minimal model correlation functions, Commun. Math. Phys. 123, 1989, 1-15.

[FFK] G. Felder, J. Frölich, G. Keller: Braid matrices and structure constants for minimal conformal models, Commun. Math. Phys. 124, 1989, 647-664.

次の [TK3] や [FFu2] も関係が深い.

[TK3] A. Tsuchiya, Y. Kanie: Fock space representations of the Virasoro algebra — Intertwining operators —, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22, 1986, 259-327

Knizhnik-Zamolodchikov equationの解の積分表示．

[CF] P. Christe, R. Flüme : The four point correlations of all primary operators of d=2 conformally invariant SU(2) σ-model with Wess-Zumino term, Nuclear Physics B282, 1987, 466-494.

[DJMM] E. Date, M. Jimbo, A. Matsuo, T. Miwa : Hypergeometric-type integrals and the sl(2, C) Knizhnik-Zamolodchikov equation, RIMS preprint, RIMS-667, 1989.

[M] A. Matsuo : private communication, 1989.

[SV] V. V. Schechtman, A. N. Varchenko : Integral representations of N-point conformal correlations in the WZW model, Max-Planck-Institut preprint, MPI/89-51, 1989.

Affine Lie algebraのFock表現とその応用．

[FFr1] B. L. Feigin, E. V. Frenkel : A family of representations of affine Lie algebras, Usp. Mat. Nauk 43, N5, 1988, 227-228 (in Russian), translated into English in Russ. Math. Surv. 43, N5, 221-222.

[FFr2] —, — : Representations of affine Kac-Moody algebras, bosonization, and resolutions, preprint 1989.

[FFr3] —, — : Representations of affine Kac-Moody algebras and bosonization, preprint 1989

[FFr4] —, — : Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds, preprint 1989.

[GMMOS 1-4] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, M. Olshanelsky, S. Shalashvilli: Wess-Zumino-Witten model as a theory of free fields, I. Algebra $sl(2)_k$, II. A piece of group theory, III. The case of arbitrary simple group, IV. Multiloop calculations, Moscow-ATOMINFORM-preprints 64-89, 70-89, 72-89, 74-89, 1989.

[BF] D. Bernard, G. Felder: Fock representations and BRST cohomology in SL(2) current algebra, preprint ETH-TH/89-26.

[BO] M. Bershadsky, H. Ooguri: Hidden SL(n) symmetry in conformal field theories, preprint IASSNS-HEP-89/09.

Riemann面上の理論の展開, $\mathbb{Z}$上での理論の展開.

[BS] A.A. Beilinson, V.V. Schechtman: Determinant bundles and Virasoro algebra, Commun. Math. Phys. 118, 1988, 651-701.

[KNTY] N. Kawamoto, Y. Namikawa, A. Tsuchiya, Y. Yamada: Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, Commun. Math. Phys. 116, 1988, 247-308.

[KSU] T. Katsura, Y. Shimizu, K. Ueno: Formal group and conformal field theory over $\mathbb{Z}$, Advanced Studies in Pure Math. 19, 1989, 347-366.

[TUY] A. Tsuchiya, K. Ueno, Y. Yamada: Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, Advanced Studies in Pure Math. 19, 1989, 459-566.

以上でこの修士論文は完結する.

謝辞

この修士論文が完成できたのは，不定期に行なわれた考えをまとめるためのかなり長いセミナーのおかげである．その非常に聴き難い話に付き合い励ましてくださった堀田良之先生と長谷川浩司氏には非常に感謝している．また，名古屋大学の土屋昭博先生にもお世話になった．そして，1989年8月21日から9月15日の間京都の数理解析研究所に滞在したときには三輪哲二先生をはじめとして多くの方々にお世話になった．やはり，数学は多くの人達と一緒にやった方が楽しいようである．数学を楽しくしてくださった多くの方々に感謝したい．