ABCD 型量子代数に関するメモ

黒木 玄

2008 年 12 月 4 日更新　(2008 年 11 月 25 日作成)

このノートはひどく未完成なので取り扱い注意！

目 次

1 ABCD 型代数

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は $\mathbb{C}$ 上の結合的代数であるとする. $X = a \otimes b \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ または $X = a \otimes b \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ のとき $P(X) = b \otimes a$, $X^{12} = a \otimes b \otimes 1$, $X^{13} = a \otimes 1 \otimes b$, $X^{23} = 1 \otimes a \otimes b$, $X^{21} = b \otimes a \otimes 1$, $X^{31} = b \otimes 1 \otimes a$, $X^{32} = 1 \otimes b \otimes a$ とおく.

1.1 ABCD 型の代数

定理 1.1 (**$ALL = LLA'$ 型の代数の整合性条件**) $A, B, C, D, A', B', C', D' \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^\times$ による

$$AL^1L^2 = L^2L^1A', \quad BL^2M^1 = M^1L^2B', \quad CL^1M^2 = M^2L^1C', \quad DM^2M^1 = M^1M^2D'$$

型の関係式と結合律の整合性の十分条件として以下が取れる:

$$\begin{aligned}
&C = P(B), \\
&A^{12}A^{13}A^{23} = A^{23}A^{13}A^{12}, \\
&D^{12}D^{13}D^{23} = D^{23}D^{13}D^{12}, \\
&A^{12}C^{13}C^{23} = C^{23}C^{13}A^{12},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&D^{12}B^{13}B^{23} = B^{23}B^{13}D^{12},\\ &A', B', C', D' \text{ に関する同様の関係式.} \quad \square\end{aligned}$$

証明. $BL^2M^1 = M^1L^2B'$ と $CL^1M^2 = M^2L^1C'$ は $C = P(B)$, $C' = P(B')$ ならば同値である. $AL^1L^2 = L^2L^1A'$, $CL^1M^2 = M^2L^1C'$ から得られる二つの等式

$$L^1L^2M^3 = (A^{12}C^{13}C^{23})^{-1}M^3L^2L^1C'^{23}C'^{13}A'^{12},$$
$$L^1L^2M^3 = (C^{23}C^{13}A^{12})^{-1}M^3L^2L^1A'^{12}C'^{13}C'^{23}$$

は $A^{12}C^{13}C^{23} = C^{23}C^{13}A^{12}$, $A'^{12}C'^{13}C'^{23} = C'^{23}C'^{13}A'^{12}$ ならば同値になり, 他の組み合わせについても同様である. □

定理 1.2 (ABCD 型代数の整合性条件) $A, B, C, D \in (\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})^\times$ による $AL^1BL^2 = L^2CL^1D$ の関係式と結合律の整合性の十分条件として以下が取れる:

$$\begin{aligned}&C = P(B),\\ &A^{12}A^{13}A^{23} = A^{23}A^{13}A^{12},\\ &D^{12}D^{13}D^{23} = D^{23}D^{13}D^{12},\\ &A^{12}C^{13}C^{23} = C^{23}C^{13}A^{12},\\ &D^{12}B^{13}B^{23} = B^{23}B^{13}D^{12}.\end{aligned}$$

これらの性質が成立するとき A, B, C, D は **ABCD 型代数**を定めると言う. □

注意 1.3 以上の話はかなりいいかげん. もっとまじめにやるには $L^2L^1 = A^{12}L^1L^2(A'^{12})^{-1}$, $L^2L^1 = (A^{21})^{-1}L^1L^2A'^{21}$ などの整合性についても考えなければいけない. □

1.2 Twister による ABCD 型代数の構成

定理 1.4 (twister F による ABCD 代数の構成) $\mathbb{C}$ 上の Hopf algebra (U, Δ) と $R \in (U \otimes U)^\times$ の組は (U, Δ, R) は quasitriangular であると仮定する:

(1) $R\Delta(a) = \Delta'(a)R \quad (\Delta' = P \circ \Delta)$,

(2) $(\Delta \otimes 1)(R) = R^{13}R^{23}$,

(3) $(1 \otimes \Delta)(R) = R^{13}R^{12}$.

さらに $F \in (U \otimes U)^\times$ は以下を満たしていると仮定する:

(4) $F^{12}F^{13}F^{23} = F^{23}F^{13}F^{12}$,

(5) $(\Delta \otimes 1)(F) = F^{13}F^{23}$,

(6) $(1 \otimes \Delta)(F) = F^{13}F^{12}$.

このような F を (U, Δ, R) の **twister** と呼ぶ. このとき

(7) $R_F = P(F)RF^{-1}$, $\Delta_F(a) = F\Delta(a)F^{-1}$, $\Delta'_F = P \circ \Delta_F$

とおくと以下が成立する:

(8) $R_F\Delta_F(a) = \Delta'_F(a)R_F$,

(9) $(\Delta_F \otimes 1)(R_F) = R_F^{13}R_F^{23}$,

(10) $(1 \otimes \Delta_F)(R_F) = R_F^{13}R_F^{12}$.

(11) $R_F^{12}R_F^{13}R_F^{23} = R_F^{23}R_F^{13}R_F^{12}$,

(12) $R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}$,

(13) $R_F^{12}F^{31}F^{32} = F^{32}F^{31}R_F^{12}$,

(14) $R^{12}F^{13}F^{23} = F^{23}F^{13}R^{12}$.

(15) $R^{12}F^{32}F^{31} = F^{31}F^{32}R^{12}$.

したがって, (U, Δ_F, R_F) は quasitriangular Hopf algebra になり ((8)〜(10)), $A = R_F, B = F, C = P(F), D = R$ は ABCD 型代数を定める ((11)〜(14)). □

証明. (1),(5) から (14) を示そう:

$$\begin{aligned} R^{12}F^{13}F^{23} &= R^{12}(\Delta \otimes 1)(F) \quad \text{(by (5))} \\ &= (\Delta' \otimes 1)(F)R^{12} \quad \text{(by (1))} \\ &= F^{23}F^{13}R^{12} \quad \text{(by (5))}. \end{aligned}$$

同様にして (1),(2) から (12) が示される.
(1),(5) から (15) を示そう:

$$\begin{aligned} R^{12}F^{32}F^{31} &= R^{12}(\Delta \otimes 1)(P(F)) \quad \text{(by (6))} \\ &= (\Delta' \otimes 1)(P(F))R^{12} \quad \text{(by (1))} \\ &= F^{31}F^{32}R^{12} \quad \text{(by (6))}. \end{aligned}$$

同様にして (1),(3) から $R^{12}R^{32}R^{31} = R^{31}R^{32}R^{12}$ が示されるが, 123 を巡回的にずらせば (9) と同値である. 同様に (4) は $F^{12}F^{32}F^{31} = F^{31}F^{32}F^{12}$ は同値である.
(4),(7),(15) から (13) を示そう:

$$\begin{aligned} R_F^{12}F^{31}F^{32} &= F^{21}R^{12}(F^{12})^{-1}F^{31}F^{32} \quad \text{(by (7))} \\ &= F^{21}R^{12}F^{32}F^{31}(F^{12})^{-1} \quad \text{(by (4))} \\ &= F^{21}F^{31}F^{32}R^{12}(F^{12})^{-1} \quad \text{(by (15))} \\ &= F^{32}F^{31}F^{21}R^{12}(F^{12})^{-1} \quad \text{(by (4))} \\ &= F^{32}F^{31}R_F^{12} \quad \text{(by (7))}. \end{aligned}$$

(1),(7) から (8) を示そう:

$$\begin{aligned} R_F\Delta_F(a) &= P(F)RF^{-1}F\Delta(a)F^{-1} \quad \text{(by (7))} \\ &= P(F)R\Delta(a)F^{-1} = P(F)\Delta'(a)RF^{-1} \quad \text{(by (1))} \end{aligned}$$

$$= P(F)\Delta'(a)P(F)^{-1}P(F)RF^{-1} = \Delta'_F(a)R_F \quad (\text{by } (7)).$$

(2),(4),(5),(6),(7),(14),(15) から (9) を示そう:

$$\begin{aligned}
(\Delta_F \otimes 1)(R_F) &= F^{12}(\Delta \otimes 1)(P(F)RF^{-1})(F^{12})^{-1} \quad (\text{by } (7)) \\
&= F^{12}(\Delta \otimes 1)(P(F))(\Delta \otimes 1)(R)(\Delta \otimes 1)(F^{-1})(F^{12})^{-1} \\
&= F^{12}F^{32}F^{31}R^{13}R^{23}(F^{23})^{-1}(F^{13})^{-1}(F^{12})^{-1} \quad (\text{by } (6),(2),(5)) \\
&= F^{31}F^{32}F^{12}R^{13}R^{23}(F^{12})^{-1}(F^{13})^{-1}(F^{23})^{-1} \quad (\text{by } (4),(4)) \\
&= F^{31}R^{13}F^{12}F^{32}(F^{13})^{-1}(F^{12})^{-1}R^{23}(F^{23})^{-1} \quad (\text{by } (14),(15)) \\
&= F^{31}R^{13}F^{12}(F^{12})^{-1}(F^{13})^{-1}F^{32}R^{23}(F^{23})^{-1} \quad (\text{by } (4)) \\
&= F^{31}R^{13}(F^{13})^{-1}F^{32}R^{23}(F^{23})^{-1} = R_F^{13}R_F^{23} \quad (\text{by } (7)).
\end{aligned}$$

(3),(4),(5),(6),(7),(14),(15) から (10) を示そう:

$$\begin{aligned}
(1 \otimes \Delta_F)(R_F) &= F^{23}(1 \otimes \Delta)(P(F)RF^{-1})(F^{23})^{-1} \quad (\text{by } (7)) \\
&= F^{23}(1 \otimes \Delta)(P(F))(1 \otimes \Delta)(R)(1 \otimes \Delta)(F^{-1})(F^{23})^{-1} \\
&= F^{23}F^{21}F^{31}R^{13}R^{12}(F^{12})^{-1}(F^{13})^{-1}(F^{23})^{-1} \quad (\text{by } (5),(3),(6)) \\
&= F^{31}F^{21}F^{23}R^{13}R^{12}(F^{23})^{-1}(F^{13})^{-1}(F^{12})^{-1} \quad (\text{by } (4),(4)) \\
&= F^{31}R^{13}F^{23}F^{21}(F^{13})^{-1}(F^{23})^{-1}R^{12}(F^{12})^{-1} \quad (\text{by } (15),(14)) \\
&= F^{31}R^{13}F^{23}(F^{23})^{-1}(F^{13})^{-1}F^{21}R^{12}(F^{12})^{-1} \quad (\text{by } (4)) \\
&= F^{31}R^{13}(F^{13})^{-1}F^{21}R^{12}(F^{12})^{-1} = R_F^{13}R_F^{12} \quad (\text{by } (7)).
\end{aligned}$$

(1),(2) から (12) を示すのと同様に (8),(9) から (11) を示すことができる. □

$X \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^\times$ に対して $X_+ = X$, $X_- = P(X)^{-1} = P(X^{-1})$ とおく. 次の命題は容易に示される.

命題 1.5 (R_- と F_-)

1. $(U, \Delta, R = R_+)$ が quasitriangular Hopf algebra ならば $(U, \Delta, P(R)^{-1} = R_-)$ も quasitriangular である.
2. (U, Δ, R) が quasitriangular Hopf algebra であり, $F = F_+$ がその twister ならば $P(F)^{-1} = F_-$ も twister である. □

1.3 $ALL = LLA'$ 型の代数と ABCD 型代数の関係

定理 1.6 ($ALL = LLA'$ 型の代数と ABCD 型代数の関係) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は $\mathbb{C}$ 上の結合的代数であるとする. $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, $L, M, N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $\gamma \in \mathcal{A}$ は以下を満たしていると仮定する:

(a) $A^{12}L^{13}L^{23} = L^{23}L^{13}A'^{12}$.

(b) $B^{12}L^{23}M^{13} = M^{13}L^{23}B'^{12}$.

(c) $C^{12}L^{13}M^{23} = M^{23}L^{13}C'^{12}$.

(d) $D^{12}M^{23}M^{13} = M^{13}M^{23}D'^{12}$.

(e) $A'^{12}\gamma^1 B'^{12}\gamma^2 = \gamma^1 C'^{12}\gamma^1 D'^{12}$.

(f) M は可逆であり, $N = L\gamma^1 M^{-1}$.

このとき,

$$A^{12}N^{13}B^{12}N^{23} = N^{23}C^{12}N^{13}D^{12}. \quad \square$$

証明. (a) から (f) を用いて左辺を右辺に変形できることを示そう:

$$\begin{aligned}
A^{12}N^{13}B^{12}N^{23} &= A^{12}L^{13}\gamma^1(M^{13})^{-1}B^{12}L^{23}\gamma^2(M^{23})^{-1} \quad \text{by (f)} \\
&= A^{12}L^{13}\gamma^1 L^{23}B'^{12}(M^{13})^{-1}\gamma^2(M^{23})^{-1} \quad \text{by (b)} \\
&= A^{12}L^{13}L^{23}\gamma^1 B'^{12}\gamma^2(M^{13})^{-1}(M^{23})^{-1} \\
&= L^{23}L^{13}A'^{12}\gamma^1 B'^{12}\gamma^2(M^{13})^{-1}(M^{23})^{-1} \quad \text{by (a)} \\
&= L^{23}L^{13}\gamma^2 C'^{12}\gamma^1 D'^{12}(M^{13})^{-1}(M^{23})^{-1} \quad \text{by (e)} \\
&= L^{23}L^{13}\gamma^2 C'^{12}\gamma^1(M^{23})^{-1}(M^{13})^{-1}D^{12} \quad \text{by (d)} \\
&= L^{23}\gamma^2 L^{13}C'^{12}(M^{23})^{-1}\gamma^1(M^{13})^{-1}D^{12} \\
&= L^{23}\gamma^2(M^{23})^{-1}C^{12}L^{13}\gamma^1(M^{13})^{-1}D^{12} \quad \text{by (c)} \\
&= N^{23}C^{12}N^{13}D^{12} \quad \text{by (f)}. \quad \square
\end{aligned}$$

定理 1.7 (**$ALL = LLA'$ 型の代数の構成の仕方**) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ は $\mathbb{C}$ 上の結合的代数であるとする. $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$, $\gamma \in \mathcal{A}$ は以下を満たしていると仮定する:

(1) $A^{12}A^{13}A^{23} = A^{23}A^{13}A^{12}$.

(2) $D^{12}D^{13}D^{23} = D^{23}D^{13}D^{12}$.

(3) $A^{12}C^{13}C^{23} = C^{23}C^{13}A^{12}$.

(4) $D^{12}B^{13}B^{23} = B^{23}B^{13}D^{12}$.

(5) $C^{12} = B^{21}$.

(6) $A^{12}\gamma^1 B^{12}\gamma^2 = \gamma^2 C^{12}\gamma^1 D^{12}$.

(7) $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$, $D' = D$.

A, B, C, D は可逆であるとし, $X = A, B, C, D$ に対して $X_+ = X$, $X_- = P(X)^{-1} = P(X^{-1})$ とおく. このとき

1. $L = A_\pm$, $M = B^{-1}$, $N = A_\pm\gamma^1 B$ とおくと定理 1.6 の条件 (a)〜(f) がすべて成立する.

2. $L = C$, $M = D_\pm^{-1}$, $N = C\gamma^1 D_\pm$ とおくと定理 1.6 の条件 (a)〜(f) がすべて成立する.

$\square$

証明. (6),(7) より (e) が成立する.

1. $L = A_\pm$, $M = B^{-1}$, $N = A_\pm \gamma^1 B$ とおく. このとき (f) が成立することは明らか. (1),(7) から (a) が出る. (3),(5),(7) から (b) が出る. 実際

$$\begin{aligned}
B^{12}L^{23}M^{13} &= B^{12}A_\pm^{23}(B^{13})^{-1} \quad \text{by } L = A_\pm,\, M = B^{-1} \\
&= C^{21}A_\pm^{23}(C^{31})^{-1} \quad \text{by } (5) \\
&= (C^{31})^{-1}A_\pm^{23}C^{21} \quad \text{by } (2) \\
&= (B^{13})^{-1}A_\pm^{23}B^{12} \quad \text{by } (5) \\
&= M^{13}L^{23}B^{12} \quad \text{by } L = A_\pm,\, M = B^{-1} \\
&= M^{13}L^{23}B'^{12} \quad \text{by } (7).
\end{aligned}$$

(b) と (5),(7) から (c) が出る. (4),(7) から (d) が出る.

2. $L = C$, $M = D_\pm^{-1}$, $N = C\gamma^1 D_\pm$ とおく. このとき (f) が成立することは明らか. (2),(7) から (d) が出る. (4),(5),(7) から (c) が出る. 実際

$$\begin{aligned}
C^{12}L^{13}M^{23} &= C^{12}C^{13}(D_\pm^{23})^{-1} \quad \text{by } L = C,\, M = D_\pm^{-1} \\
&= B^{21}B^{31}(D_\pm^{23})^{-1} \quad \text{by } (5) \\
&= (D_\pm^{23})^{-1}B^{31}B^{21} \quad \text{by } (4) \\
&= (D_\pm^{23})^{-1}C^{13}C^{12} \quad \text{by } (5) \\
&= M^{23}L^{13}C^{12} \quad \text{by } L = C,\, M = D_\pm^{-1} \\
&= M^{23}L^{13}C'^{12} \quad \text{by } (7).
\end{aligned}$$

(c) と (5),(7) から (b) が出る. (3),(7) から (a) が出る. □

例 1.8 $\mathcal{A} = U_q(\mathfrak{g})$ は quantum enveloping algebra であるとし, $R \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ はその universal R-matrix であるする. Levi subalgebra $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ の universal R-matrix を $R_\mathfrak{l}$ と書く. $F = (R_\mathfrak{l})_\pm$ とおく. $A = R_F = P(F)RF^{-1}$, $B = F$, $C = P(F)$, $D = R$ とおく. $\gamma \in \mathcal{A} = U_q(\mathfrak{g})$ は

$$R\gamma^1\gamma^2 = \gamma^2\gamma^1 R, \quad \gamma^1 F = F\gamma^1, \quad \gamma^2 F = F\gamma^2$$

を満たしているとする. このとき以上の A, B, C, D, γ は定理 1.7 の条件 (1)〜(6) を満たしている. $a, b = \pm$ であるとすると,

1. $L = A_a = P(F)R_aF^{-1}$, $M = B^{-1} = F^{-1} = (R_\mathfrak{l})_b^{-1}$ のとき $N = L\gamma^1 M^{-1} = A_a\gamma^1 B = P((R_\mathfrak{l})_b)R_a\gamma^1$.

2. $L = C = P(F) = P((R_\mathfrak{l})_b)$, $M = D_a^{-1} = R_a^{-1}$ のとき $N = L\gamma^1 M^{-1} = C\gamma^1 D_a = \gamma^1 P((R_\mathfrak{l})_b)R_a$.

定理 1.6 と定理 1.7 を合わせると $N = P((R_\mathfrak{l})_b)R_a\gamma^1, \gamma^1 P((R_\mathfrak{l})_b)R_a$ は次を満たしていることがわかる:

$$R_F^{12}N^{13}F^{12}N^{23} = N^{23}F^{21}N^{13}R^{12}. \qquad (*)$$

$F = (R_\mathfrak{l})_- = P(R_\mathfrak{l})^{-1}$ のとき $P(F)R = R_l^{-1}R$ は R から Levi subalgebra $\mathfrak{l}$ に対応する因子を除いたものになる.

F が Cartan subalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ の universal R-matrix $\mathbb{R}_{\mathfrak{h}}$ の逆元であるとする．すなわち Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ の dual bases H_i, H^i を取るとき

$$F = R_{\mathfrak{h}}^{-1} = q^{-\sum_i H_i \otimes H^i}.$$

このとき $P(F) = F$ であり, $A = R_F = FRF^{-1}$, $B = C = F$, $D = R$, $\gamma = q^\theta$ $(\theta \in \mathfrak{h})$ は定理 1.7 の条件 (1)〜(6) を満たしている.

1. $L = A = FRF^{-1}$, $M = B^{-1} = F^{-1}$ のとき $N = L\gamma^1 M^{-1} = A\gamma^1 B = FR(q^\theta)^1$.
2. $L = C = F$, $M = D^{-1} = R^{-1}$ のとき $N = L\gamma^1 M^{-1} = C\gamma^1 D = (q^\theta)^1 FR$.

これらも $(*)$ を満たしている．$FR = R_{\mathfrak{h}}^{-1} R = q^{-\sum_i H_i \otimes H^i} R$ は R から Cartan part に対応する因子 $R_{\mathfrak{h}}$ を除いたものになる．$FR(q^\theta)^1$, $(q^\theta)^1 FR$ を Painlevé 系の L-operator とみなすとき, q^θ の部分は Painlevé 系のパラメーターと解釈される． □

2 L-operator への TLT^{-1} 型の作用

定理 2.1 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は $\mathbb{C}$ 上の結合的代数であるとする．$R \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ であり, $L_\pm, L \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ であり, これらは以下を満たしていると仮定する:

(a) $R^{12} L_\pm^{13} L_\pm^{23} = L_\pm^{23} L_\pm^{13} R^{12}$.

(b) $R^{12} L_+^{13} L_-^{23} = L_-^{23} L_+^{13} R^{12}$.

(c) L_- は可逆である.

(d) $L = L_-^{-1} L_+$.

このとき

$$R^{21} L^{13} R^{12} L^{23} = L^{23} R^{21} L^{13} R^{12}. \quad \square$$

証明. (a) から (d) を使って左辺を右辺に変形できることを示そう:

$$\begin{aligned}
&R^{21} L^{13} R^{12} L^{23} \\
&= R^{21} (L_-^{13})^{-1} L_+^{13} R^{12} (L_-^{23})^{-1} L_+^{23} \quad (\text{by } L = L_-^{-1} L_+) \\
&= R^{21} (L_-^{13})^{-1} (L_-^{23})^{-1} R^{12} L_+^{13} L_+^{23} \quad (\text{by } L_+^{13} R^{12} (L_-^{23})^{-1} = (L_-^{23})^{-1} R^{12} L_+^{13}) \\
&= (L_-^{23})^{-1} (L_-^{13})^{-1} R^{21} L_+^{23} L_+^{13} R^{12} \quad (\text{by } R^{21} (L_-^{13})^{-1} (L_-^{23})^{-1} = (L_-^{23})^{-1} (L_-^{13})^{-1} R^{21},\ R^{12} L_+^{13} L_+^{23} = L_+^{23} L_+^{13} R^{12}) \\
&= (L_-^{23})^{-1} L_+^{23} R^{21} (L_-^{13})^{-1} L_+^{13} R^{12} \quad (\text{by } (L_-^{13})^{-1} R^{21} L_+^{23} = L_+^{23} R^{21} (L_-^{13})^{-1}) \\
&= L^{23} R^{21} L^{13} R^{12} \quad (\text{by } L = L_-^{-1} L_+). \quad \square
\end{aligned}$$

定理 2.2 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は $\mathbb{C}$ 上の結合的代数であるとする．$R \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ であり, $L, M, T \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ であり, これらは以下を満たしていると仮定する:

(a) $R^{12} L^{13} R^{21} L^{23} = L^{23} R^{12} L^{13} R^{21}$.

(b) $R^{12} T^{13} T^{23} = T^{23} T^{13} R^{12}$.

(c) $T^{13}L^{23} = L^{23}T^{13}$.

(d) T は逆行列を持つ.

(e) $M = TLT^{-1}$.

このとき (a) の L を M で置き換えた式が成立する:

$$R^{12}M^{13}R^{21}M^{23} = M^{23}R^{12}M^{13}R^{21}. \quad \square$$

証明. (a) から (d) を使って左辺を右辺に変形できることを示そう:

$$\begin{aligned}
&R^{12}M^{13}R^{21}M^{23} \\
&= R^{12}T^{13}L^{13}(T^{13})^{-1}R^{21}T^{23}L^{23}(T^{23})^{-1} \quad (\text{by } M = TLT^{-1}) \\
&= R^{12}T^{13}L^{13}T^{23}R^{21}(T^{13})^{-1}L^{23}(T^{23})^{-1} \quad (\text{by } (T^{13})^{-1}R^{21}T^{23} = T^{23}R^{21}(T^{13})^{-1}) \\
&= R^{12}T^{13}T^{23}L^{13}R^{21}L^{23}(T^{13})^{-1}(T^{23})^{-1} \quad (\text{by } L^{13}T^{23} = T^{23}L^{13},\ L^{23}T^{13} = T^{13}L^{23}) \\
&= T^{23}T^{13}R^{12}L^{13}R^{21}L^{23}(T^{13})^{-1}(T^{23})^{-1} \quad (\text{by } R^{12}T^{13}T^{23} = T^{23}T^{13}R^{12}) \\
&= T^{23}T^{13}L^{23}R^{12}L^{13}R^{21}(T^{13})^{-1}(T^{23})^{-1} \quad (\text{by } R^{12}L^{13}R^{21}L^{23} = L^{23}R^{12}L^{13}R^{21}) \\
&= T^{23}T^{13}L^{23}R^{12}L^{13}(T^{23})^{-1}(T^{13})^{-1}R^{21} \quad (\text{by } R^{21}(T^{13})^{-1}(T^{23})^{-1} = (T^{23})^{-1}(T^{13})^{-1}R^{21}) \\
&= T^{23}L^{23}T^{13}R^{12}(T^{23})^{-1}L^{13}(T^{13})^{-1}R^{21} \quad (\text{by } T^{13}L^{23} = L^{23}T^{13},\ T^{23}L^{13} = L^{13}T^{23}) \\
&= T^{23}L^{23}(T^{23})^{-1}R^{12}T^{13}L^{13}(T^{13})^{-1}R^{21} \quad (\text{by } T^{13}R^{12}(T^{23})^{-1} = (T^{23})^{-1}R^{12}T^{13}) \\
&= M^{23}R^{12}M^{13}R^{21} \quad (\text{by } M = TLT^{-1}). \quad \square
\end{aligned}$$

3 ABCD 型量子代数と $Z\gamma Z^{-1}$ の満たす代数

定理 3.1 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は $\mathbb{C}$ 上の結合的代数であるとする. $A, B, C, D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ であり, $\gamma \in \mathcal{A}$ であり, $Z, M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ であり, これらは以下を満たしていると仮定する:

(a) Z は可逆である.

(b) B は可逆であり, $B^{21} = C^{12}$.

(c) $A^{12}Z^{13}B^{12}Z^{23} = Z^{23}C^{12}Z^{13}D^{12}$.

(d) $D^{12}\gamma^1 D^{21}\gamma^2 = \gamma^2 D^{12}\gamma^1 D^{21}$.

(e) $\gamma^2 B^{12} = B^{12}\gamma^2$. (これは $\gamma^1 C^{12} = C^{12}\gamma^1$ と同値.)

(f) $M^{12} = Z^{12}\gamma^1 (Z^{12})^{-1}$.

このとき,

$$A^{12}M^{13}A^{21}M^{23} = M^{23}A^{12}M^{13}A^{21}. \quad \square$$

証明. (a) から (f) を使って示したい公式の左辺を右辺に変形できることを示そう:

$$\begin{aligned}
&A^{12}M^{13}A^{21}M^{23} \\
&= A^{12}Z^{13}\gamma^1(Z^{13})^{-1}A^{21}Z^{23}\gamma^2(Z^{23})^{-1} \quad (\text{by } M = Z\gamma Z^{-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A^{12}Z^{13}\gamma^1 C^{21}Z^{23}D^{21}(Z^{13})^{-1}(B^{21})^{-1}\gamma^2(Z^{23})^{-1} \quad (\text{by } (Z^{13})^{-1}A^{21}Z^{23} = C^{21}Z^{23}D^{21}(Z^{13})^{-1}(B^{21})^{-1}) \\
&= A^{12}Z^{13}C^{21}Z^{23}\gamma^1 D^{21}\gamma^2(Z^{13})^{-1}(B^{21})^{-1}(Z^{23})^{-1} \quad (\text{by } \gamma^1 C^{21} = C^{21}\gamma^1,\ \gamma^2 B^{21} = B^{21}\gamma^2) \\
&= A^{12}Z^{13}B^{12}Z^{23}\gamma^1 D^{21}\gamma^2(Z^{13})^{-1}(B^{21})^{-1}(Z^{23})^{-1} \quad (\text{by } C^{21} = B^{12}) \\
&= Z^{23}C^{12}Z^{13}D^{12}\gamma^1 D^{21}\gamma^2(Z^{13})^{-1}(B^{21})^{-1}(Z^{23})^{-1} \quad (\text{by } A^{12}Z^{13}B^{12}Z^{23} = Z^{23}C^{12}Z^{13}D^{12}) \\
&= Z^{23}C^{12}Z^{13}\gamma^2 D^{12}\gamma^1 D^{21}(Z^{13})^{-1}(B^{21})^{-1}(Z^{23})^{-1} \quad (\text{by } D^{12}\gamma^1 D^{21}\gamma^2 = \gamma^2 D^{12}\gamma^2 D^{21}) \\
&= Z^{23}C^{12}Z^{13}\gamma^2 D^{12}\gamma^1(Z^{23})^{-1}(C^{21})^{-1}(Z^{13})^{-1}A^{21} \quad (\text{by } D^{21}(Z^{13})^{-1}(B^{21})^{-1}(Z^{23})^{-1} = (Z^{23})^{-1}(C^{21})^{-1}(Z^{13})^{-1}A^{21}) \\
&= Z^{23}C^{12}Z^{13}\gamma^2 D^{12}\gamma^1(Z^{23})^{-1}(B^{12})^{-1}(Z^{13})^{-1}A^{21} \quad (\text{by } C^{21} = B^{12}) \\
&= Z^{23}\gamma^2 C^{12}Z^{13}D^{12}(Z^{23})^{-1}(B^{12})^{-1}\gamma^1(Z^{13})^{-1}A^{21} \quad (\text{by } \gamma^2 C^{12} = C^{12}\gamma^2,\ \gamma^1 B^{12} = B^{12}\gamma^1) \\
&= Z^{23}\gamma^2(Z^{23})^{-1}A^{12}Z^{13}\gamma^1(Z^{13})^{-1}A^{21} \quad (\text{by } C^{12}Z^{13}D^{12}(Z^{23})^{-1}(B^{12})^{-1} = (Z^{23})^{-1}A^{12}Z^{13}) \\
&= M^{23}A^{12}M^{13}A^{21} \quad (\text{by } Z\gamma Z^{-1} = M). \quad \square
\end{aligned}
$$