ガンマ分布の中心極限定理とStirlingの公式

黒木玄

2016年5月1日作成*

目 次

---

*2016年5月1日 Ver.0.1. 2016年5月2日 Ver.0.2: 対数版の易しい Stirling の公式の節を追加した. 2016年5月3日 Ver.0.3: 色々追加. 特に Fourier の反転公式に関する付録を追加した. 2016年5月4日 Ver.0.4: ガウス分布の Fourier 変換の付録と Gauss 積分の計算の付録を追加した. 2016年5月5日 Ver.0.5: 誤りの訂正や細かな追加.

0 はじめに

Stirling の公式とは

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \qquad (n \to \infty)$$

という階乗の近似公式のことである. ここで $a_n \sim b_n$ $(n \to \infty)$ は $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 1$ を意味する. このノートではまず最初にガンマ分布に関する中心極限定理から Stirling の公式が “導出” されることを説明する. 精密かつ厳密な議論はしない.

このノートの後半の付録群では関連の基礎知識の解説を行なう. このノートの全体は学生向けの Gauss 積分入門, ガンマ函数入門, ベータ函数入門になることを意図して書かれた雑多な解説の寄せ集めである.

1 ガンマ分布に関する中心極限定理からの “導出”

ガンマ分布とは次の確率密度函数で定義される確率分布のことである[1]:

$$f_{\alpha,\tau}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/\tau}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\tau^\alpha} & (x > 0), \\ 0 & (x \leqq 0). \end{cases}$$

ここで $\alpha, \tau > 0$ はガンマ分布を決めるパラメーターである[2]. 以下簡単のため $\alpha = n > 0$, $\tau = 1$ の場合のガンマ分布のみを扱うために $f_n(x) = f_{n,1}(x)$ とおく:

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}x^{n-1}}{\Gamma(n)} \qquad (x > 0).$$

確率密度函数 $f_n(x)$ で定義される確率変数を X_n と書くことにする. 確率変数 X_n の平均 μ_n と分散 σ_n^2 は両方 n になる[3]:

$$\begin{aligned} \mu_n &= E[X_n] = \int_0^\infty x f_n(x)\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = n, \\ E[X_n^2] &= \int_0^\infty x^2 f_n(x)\,dx = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = (n+1)n, \\ \sigma_n^2 &= E[X_n^2] - \mu_n^2 = n. \end{aligned}$$

ゆえに確率変数 $Y_n = (X_n - \mu_n)/\sigma_n = (X_n - n)/\sqrt{n}$ の平均と分散はそれぞれ 0 と 1 になり, その確率密度函数は

$$\sqrt{n} f_n(\sqrt{n}y + n) = \sqrt{n}\frac{e^{-(\sqrt{n}y+n)}(\sqrt{n}y+n)^{n-1}}{\Gamma n}$$

[1] ガンマ函数は $s > 0$ に対して $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ と定義される. 直接の計算によって $\Gamma(1) = 1$ を, 部分積分によって $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示せるので, 0 以上の整数 n について $\Gamma(n+1) = n!$ となる.

[2] α は shape parameter と, τ は scale parameter と呼ばれているらしい.

[3] 確率密度函数 $f(x)$ を持つ確率変数 X に対して, 期待値汎函数が $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx$ と定義され, 平均が $\mu = E[X]$ と定義され, 分散が $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$ と定義される.

になる[4]. この確率密度函数で $y=0$ とおくと

$$\sqrt{n}f_n(n) = \sqrt{n}\frac{e^{-n}n^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)}$$

となる. $n>0$ が整数のとき $\Gamma(n+1)=n!$ なので, これが $n\to\infty$ で $1/\sqrt{2\pi}$ に収束することと Stirling の公式の成立は同値になる.

ガンマ分布が再生性を満たしていることより, 中心極限定理を適用できるので, $\mathbb{R}$ 上の有界連続函数 $\varphi(x)$ に対して, $n\to\infty$ のとき

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}}\right) f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(y)\sqrt{n}f_n(\sqrt{n}y+n)\,dy \longrightarrow \int_{-\infty}^\infty \varphi(y)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy.$$

$\varphi(y)$ をデルタ函数 $\delta(y)$ に近付けることによって (すなわち被積分函数の y に 0 を代入することによって),

$$\sqrt{n}f_n(n) = \sqrt{n}\frac{e^{-n}n^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad (n\to\infty)$$

を得る. この結果は Stirling の公式の成立を意味する.

以上の “導出” の最後のステップには論理的にギャップがある. このギャップを埋めるためには中心極限定理をブラックボックスとして利用するのではなく, 中心極限定理の特性函数を用いた証明に戻る必要がある. そのような証明の方針については次の節を見て欲しい.

2 ガンマ分布の特性函数を用いた表示からの導出

前節では中心極限定理を便利なブラックボックスとして用いて Stirling の公式を “導出” した. しかし, その “導出” には論理的なギャップがあった. そのギャップを埋めるためには, 中心極限定理が確率密度函数を特性函数 (確率密度函数の逆 Fourier 変換) の Fourier 変換で表示することによって証明されることを思い出す必要がある.

この節ではガンマ分布の確率密度函数を特性函数の Fourier 変換で表わす公式を用いて, 直接的に Stirling の公式を証明する[5].

2.1 Stirling の公式の証明

ガンマ分布の確率密度函数 $f_n(x) = e^{-x}x^{n-1}/\Gamma(n)$ $(x>0)$ の特性函数 (逆 Fourier 変換) $F_n(t)$ は次のように計算される[6]:

$$F_n(t) = \int_0^\infty e^{itx} f_n(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-(1-it)x}x^{n-1}\,dx = \frac{1}{(1-it)^n}.$$

[4]確率変数 X の確率分布函数が $f(x)$ のとき, 確率変数 Y を $Y=(X-a)/b$ と定めると, $E[g(Y)] = \int_{\mathbb{R}} g((x-a)/b)f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)bf(by+a)\,dy$ なので, Y の確率分布函数は $bf(by+a)$ になる.

[5]筆者はこの証明法を https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nobuo/pdf/prob/stir.pdf を見て知った.

[6]確率分布がパラメーター n について再生性を持つことと特性函数がある函数の n 乗の形になることは同値である.

ここで, 実部が正の複素数 α に対して

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-\alpha t}t^{n-1}\,dt = \frac{1}{\alpha^n}$$

となること使った. この公式は Cauchy の積分定理を使って示せる[7].

Fourier の反転公式より[8],

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}x^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-itx}F_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-itx}}{(1-it)^n}\,dt \qquad (x>0).$$

この公式さえ認めてしまえば Stirling の公式の証明は易しい.

上の公式より, $t=\sqrt{n}u$ と置換することによって,

$$\sqrt{n}f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-itn}}{(1-it)^n}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n}\,du.$$

Stirling の公式を証明するためには, これが $n\to\infty$ で $1/\sqrt{2\pi}$ に収束することを示せばよい. そのために被積分函数の対数の様子を調べよう:

$$\begin{aligned}\log\frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n} &= -n\log\left(1-\frac{iu}{\sqrt{n}}\right) - iu\sqrt{n}\\ &= n\left(\frac{iu}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - iu\sqrt{n} = -\frac{u^2}{2} + o(1).\end{aligned}$$

したがって, $n\to\infty$ のとき

$$\frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n} \longrightarrow e^{-u^2/2}.$$

これより, $n\to\infty$ のとき

$$\sqrt{n}f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n}\,du \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

となることがわかる[9]. 最後の等号で一般に正の実数 α に対して

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/\alpha}\,du = \sqrt{\alpha\pi}$$

となることを用いた[10]. これで Stirling の公式が証明された.

---

[7] Cauchy の積分定理を使わなくても示せる. 左辺を $f(\alpha)$ と書くと, $f(1)=1$ でかつ部分積分によって $f'(\alpha) = -(n/\alpha)f(\alpha)$ となることがわかるので, その公式が得られる. 正の実数 α に対するこの公式は $t=x/\alpha$ という置換積分によって容易に証明される.

[8] Fourier の反転公式の証明の概略については第 5 節を参照せよ.

[9] 厳密に証明したければ, たとえば Lebesgue の収束定理を使えばよい.

[10] この公式は Gauss 積分の公式 $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ で $x=u/\sqrt{\alpha}$ と積分変数を変換すれば得られる. Gauss 積分の公式は以下のようにして証明される. 左辺を I とおくと $I^2 = \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ であり, I^2 は $z=e^{-(x^2+y^2)}$ のグラフと平面 $z=0$ で挟まれた「小山状の領域」の体積だと解釈される. その小山の高さ $0<z\leqq 1$ における断面積は $-\pi\log z$ になるので, その体積は $\int_0^1(-\pi\log z)\,dz = -\pi[z\log z - z]_0^1 = \pi$ になる. ゆえに $I=\sqrt{\pi}$. Gauss 積分の公式の不思議なところは円周率が出て来るところであり, しかもその平方根が出て来るところである. しかしその二乗が小山の体積であることがわかれば, その高さ z での断面が円盤の形になることから円周率 π が出て来る理由がわかる. 平方根になるのは I そのものを直接計算したのではなく, I^2 の方を計算したからである.

2.2　正規化されたガンマ分布の確率密度函数の各点収束

確率密度函数 $f_n(x) = e^{-x}x^{n-1}$ を持つ確率変数を X_n と書くとき, $Y_n = (X_n - n)/\sqrt{n}$ の平均と分散はそれぞれ 0 と 1 になるのであった (前節を見よ). Y_n の確率密度函数は

$$\sqrt{n} f_n(\sqrt{n}y + n) = \sqrt{n}\frac{e^{-\sqrt{n}y-n}(\sqrt{n}y+n)^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{e^{-n}n^{n-1/2}}{\Gamma(n)}\frac{e^{-\sqrt{n}y}(1+y/\sqrt{n})^n}{1+y/\sqrt{n}}$$

になる. そして, $n \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned}\log\left(e^{-\sqrt{n}y}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n\right) &= n\log\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}y \\ &= n\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sqrt{n}y = -\frac{y^2}{2} + o(1)\end{aligned}$$

なので, $n \to \infty$ で $e^{\sqrt{n}y}(1+y/\sqrt{n})^n \to e^{-y^2/2}$ となり, さらに $1 + y/\sqrt{n} \to 1$ となる. ゆえに, 次が成立することと Stirling の公式は同値になる:

$$\sqrt{n} f_n(\sqrt{n}y + n) = \sqrt{n}\frac{e^{-\sqrt{n}y-n}(\sqrt{n}y+n)^{n-1}}{\Gamma(n)} \longrightarrow \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (n \to \infty).$$

すなわち Y_n の確率密度函数が標準正規分布の確率密度函数に各点収束することと Stirling の公式は同値である.

ガンマ分布について確率密度函数の各点収束のレベルで中心極限定理が成立していることと Stirling の公式は同じ深さにある.

Y_n の確率分布函数が標準正規分布の確率密度函数に各点収束することの直接的証明は $\sqrt{n}f(n)$ の収束の証明と同様に以下のようにして得られる:

$$\begin{aligned}\sqrt{n} f_n(\sqrt{n}y + n) &= \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it(\sqrt{n}y+n)}}{(1-it)^n}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy}\frac{e^{-it\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n}\,dt \\ &\longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy}e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2} \qquad (n \to \infty).\end{aligned}$$

最後の等号で, Cauchy の積分定理より[11]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy}e^{-u^2/2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u+iy)^2/2-y^2/2}\,du = e^{-y^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2}\,dv = e^{-y^2/2}\sqrt{2\pi}$$

となることを用いた.

このように, ガンマ分布の確率密度函数の特性函数の Fourier 変換による表示を使えば確率密度函数の各点収束のレベルでの中心極限定理を容易に示すことができ, その結果は Stirling の公式と同値になっている.

---

[11] 複素解析を使わなくても容易に証明される. たとえば, e^{-ity} の Taylor 展開を代入して項別積分を実行しても証明できる. もしくは, 両辺が $f'(y) = -yf(y)$, $f(0) = \sqrt{2\pi}$ を満たしていることからも導かれる (左辺が満たしていることは部分積分すればわかる). Cauchy の積分定理を使えば形式的に $u + iy$ $(u > 0)$ を $v > 0$ で置き換える置換積分を実行したのと同じように見える証明が得られる.

3 ガンマ函数の Gauss 積分による近似を使った導出

前節までに説明した Stirling の公式の証明は本質的にガンマ函数 (ガンマ分布) が Gauss 積分 (正規分布) で近似されることを用いた証明だと考えられる．

この節ではガンマ函数の値を Gauss 積分で直接近似することによって Stirling の公式を示そう[12]．

$g_n(x) = \log(e^{-x}x^n) = n\log x - x$ を $x = n$ で Taylor 展開すると

$$g_n(x) = n\log n - n - \frac{(x-n)^2}{2n} + \frac{(x-n)^3}{3n^2} - \frac{(x-n)^4}{4n^3} + \cdots$$

これより, n が大きなとき $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(n\log n - n - \frac{(x-n)^2}{2n}\right)dx = n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-n)^2/(2n)}\,dx = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

で近似されることがわかる．ゆえに

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \qquad (n\to\infty).$$

この近似の様子を scilab で描くことによって作った画像をツイッターの過去ログで見ることができる．無料の数値計算ソフト scilab については関連のツイートを参照して欲しい．

以上の証明法では Stirling の公式中の因子 $n^n e^{-n}$, $\sqrt{2\pi n}$ のそれぞれが $g_n(x) = \log(e^{-x}x^n) = n\log x - x$ の $x = n$ における Taylor 展開の定数項と 2 次の項に由来していることがわかる．3 次の項は $\int_{-\infty}^{\infty} y^3 e^{-y^2/\alpha}\,dy = 0$ なので寄与しない．

4 対数版の易しい Stirling の公式

Stirling の公式は次と同値である:

$$\log n! - (n+1/2)\log n + n \longrightarrow \log\sqrt{2\pi} \qquad (n\to\infty).$$

これより

$$\log n! = n\log n - n + o(n) \qquad (n\to\infty).$$

ここで $o(n)$ は n で割った後に $n\to\infty$ とすると 0 に収束する量を意味する．これをこの節では**対数版 Stirling の公式**と呼ぶことにする．この公式であれば以下で説明するように初等的に証明することができる[13]．

[12] この方法は Laplace の方法と呼ばれることがある．Laplace の方法による Stirling の公式の証明とその一般化に関しては Gergö Nemes, Asymptotic expansions for integrals, 2012, M. Sc. Thesis, 40 pages が詳しい．

[13] 以下の証明を見ればわかるように $o(n)$ の部分は $O(\log n)$ であることも証明できる．ここで $O(\log n)$ は $\log n$ で割った後に有界になる量を意味している．

4.1　易しい証明

単調増加函数 $f(x)$ について $f(k) \leqq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqq f(k+1)$ が成立しているので, $f(1) \geqq 0$ を満たす単調増加函数 $f(x)$ について,

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) \leqq \int_1^n f(x)\,dx \leqq f(1)+f(2)+\cdots+f(n).$$

ゆえに

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqq f(1)+f(2)+\cdots+f(n) \leqq \int_1^n f(x)\,dx + f(n).$$

これを $f(x)=\log x$ に適用すると

$$\int_1^n \log x\,dx = [x\log x - x]_1^n = n\log n - n + 1, \qquad \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n = \log n!$$

なので

$$n\log n - n + 1 \leqq \log n! \leqq n\log x - n + 1 + \log n.$$

すなわち

$$1 \leqq \log n! - n\log n + n \leqq 1 + \log n.$$

したがって

$$\log n! = n\log n - n + O(\log n) = n\log n - n + o(n) \qquad (n\to\infty).$$

ここで $O(\log n)$ は $\log n$ で割ると有界になるような量を意味している.

4.2　大学入試問題への応用例

対数版の易しい Stirling の公式を使うと, an 個から bn 個取る組み合わせの数 (二項係数) の対数は

$$\begin{aligned}
\log\binom{an}{bn} &= \log(an)! - \log(bn)! - \log((a-b)n)! \\
&= an\log a + an\log n - an + o(n) \\
&- bn\log b - bn\log n + bn + o(n) \\
&- (a-b)n\log(a-b) - (a-b)n\log n + (a-b)n + o(n) \\
&= n\log\frac{a^a}{b^b(a-b)^{a-b}} + o(n).
\end{aligned}$$

となる. ゆえに

$$\log\binom{an}{bn}^{1/n} \longrightarrow \log\frac{a^b}{b^b(a-b)^{a-b}} \qquad (n\to\infty).$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\binom{an}{bn}^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(an)!}{(bn)!((a-b)n)!}\right)^{1/n} = \frac{a^a}{b^b(a-b)^{a-b}}.$$

要するに an 個から bn 個取る組み合わせの数の n 乗根の $n\to\infty$ での極限は二項係数部分の式の分子分母の $(kn)!$ を k^k で置き換えれば得られる.

この結果を使えば次の東工大の 1988 年の数学の入試問題を暗算で解くことができる:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{1/n} \text{ を求めよ.}$$

この極限の値は

$$\frac{3^3/(1^1 2^2)}{2^2/(1^1 1^1)} = \frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}.$$

入試問題を作った人は, まず Stirling の公式を使うと容易に解ける問題を考え, その後に高校数学の範囲内でも解けることを確認したのだと思われる.

追記. 東工大では 1968 年にも次の問題を出しているようだ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}P_n} \text{ を求めよ.} \qquad (\text{答えは } 2^2 e^{-1}.)$$

この問題も明らかに元ネタは Stirling の公式である. より一般に次を示せる:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{((an)!)^{1/n}}{n^a} = a^a e^{-a}.$$

なぜならば

$$\begin{aligned}
\log\frac{((an)!)^{1/n}}{n^a} &= \frac{1}{n}\log(an)! - a\log n \\
&= \frac{1}{n}(an\log a + an\log n - an + o(n)) - a\log n \\
&= a\log a - a + o(1) \\
&= \log(a^a e^{-a}) + o(1).
\end{aligned}$$

5 付録: Fourier の反転公式

厳密な証明をするつもりはないが, Fourier の反転公式の証明の概略について説明しよう.

函数 $f(x)$ に対してその逆 Fourier 変換 $F(p)$ を

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f(x)\,dx$$

と定める. このとき函数 f について適切な条件を仮定しておくと, それに応じた適切な意味で

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} F(p)\,dp$$

が成立する. これを Fourier の反転公式と呼ぶ.

5.1 Gauss 分布の場合

$a>0$ であるとし,

$$f(x) = e^{-x^2/(2a)}$$

とおき, $F(p)$ はその逆 Fourier 変換であるとする. このとき

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} e^{-x^2/(2a)}\,dx = e^{-p^2/(2a^{-1})}\sqrt{2a\pi}$$

が容易に得られる[14]. この公式で x, a のそれぞれと p, a^{-1} の立場を交換することによって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} e^{-p^2/(2a^{-1})}\,dp = e^{-x^2/(2a)}\sqrt{2a^{-1}\pi}$$

が得られる. 以上の 2 つの結果を合わせると,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} F(p)\,dp$$

が得られる. すなわち $f(x) = e^{-x^2/(2a)}$ については Fourier の反転公式が成立している.

一般に $f(x)$ について Fourier の反転公式が成立していれば $f(x)$ を平行移動して得られる函数 $f(x-\mu)$ についても Fourier の反転公式が成立していることが容易に示される. 実際, $F(p)$ を $f(x)$ の逆 Fourier 変換とすると, $f(x-\mu)$ の逆 Fourier 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f(x-\mu)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x'+\mu)} f(x')\,dx' = e^{ip\mu}F(p)$$

になり,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}e^{ip\mu}F(p)\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x-\mu)}F(p)\,dp = f(x-\mu).$$

以上によって, $f(x-\mu) = e^{-(x-\mu)^2/(2a)}$ についても Fourier の反転公式が成立することがわかった.

逆 Fourier 変換および Fourier 変換の線形性より, $f(x-\mu) = e^{-(x-\mu)^2/(2a)}$ の形の函数の線形和についても Fourier の反転公式が成立していることがわかる[15].

5.2 一般の場合

$a > 0$ に対して函数 $\rho_a(x)$ を

$$\rho_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/(2a)}$$

と定める. これは $\rho_a(x) > 0$ と $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_a(x)\,dx = 1$ を満たしている. そして前節の結果によって, $\rho_a(x-\mu)$ は Fourier の反転公式を満たしている.

函数 $f(x)$ に対して函数 $f_a(x)$ を ρ_a との畳み込み積によって函数 $f_a(x)$ を定める:

$$f_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_a(x-y) f(y)\,dy.$$

[14] Cauchy の積分定理を使う方法, e^{ipx} の Taylor 展開を代入して項別積分する方法, 左辺と右辺が同じ微分方程式を満たしていることを使う方法など複数の方法で容易に計算可能である.

[15] “任意の函数” はそのような線形和の “極限” で表わされる. したがって, Fourier の反転公式の証明の本質的部分はこれで終了しているとみなせる.

このとき $f_a(x)$ については Fourier の反転公式が成立している[16]. 実際, $f_a(x)$ の逆 Fourier 変換 $F_a(p)$ と書くと,

$$F_a(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f_a(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \rho_a(x-y)\,dx \right) f(y)\,dy$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} F_a(p)\,dp &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx'} \rho_a(x'-y)\,dx' \right) dp \right) f(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_a(x-y) f(y)\,dy = f_a(x). \end{aligned}$$

2 つ目の等号で $\rho_a(x-\mu)$ について Fourier の反転公式が成立することを使った. さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \rho_a(x-y)\,dx = e^{ipy} e^{-ap^2/2}$$

なので

$$F_a(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipy} e^{-ap^2/2} f(y)\,dy = e^{-ap^2/2} F(p)$$

となる[17]. ゆえに

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} F_a(p)\,dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} e^{-ap^2/2} F(p)\,dp.$$

したがって

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} e^{-ap^2/2} F(p)\,dp = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_a(x-y) f(y)\,dy = f_a(x).$$

もしも $F(p)$ が可積分ならば, Lebesgue の収束定理より, 左辺について

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} e^{-ap^2/2} F(p)\,dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} F(p)\,dp$$

が言える. あとは, 函数 $f(x)$ について適切な条件を仮定したとき, $a \to 0$ のとき函数 $f_a(x)$ が適切な意味で函数 $f(x)$ に収束することを示せれば, $f(x)$ 自身が適切な意味で Fourier の反転公式を満たすことがわかる[18].

たとえば, f は有界かつ点 x で連続だと仮定する. ある $M > 0$ が存在して $|f(y) - f(x)| \leqq M$ $(y \in \mathbb{R})$ となる. 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. ある $\delta > 0$ が存在して $|y-x| \leqq \delta$ ならば $|f(y) - f(x)| \leqq \varepsilon/2$ となる. 函数 ρ_a の定義より, $a > 0$ を十分小さくすると

[16] $f_a(x)$ は Fourier の反転公式が成立している函数 $\rho_a(x-\mu)$ の重み $f(\mu)$ での重ね合わせなので, これはほとんど明らかである.

[17] これは畳み込み積の逆 Fourier 変換が逆 Fourier 変換の積に等しいことの特殊な場合にすぎない.

[18] $\rho_a(x)$ の $a \to 0$ での様子のグラフを描けば, $\rho_a(x)$ が Dirac のデルタ函数 (超函数) に "収束" しているように見えることから, これもほとんど明らかだと言える.

$\int_{|y-x|>\delta} \rho_a(x-y)\,dy \leqq \varepsilon/(2M)$ となることもわかる. 以上の状況のもとで

$$
\begin{aligned}
|f_a(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \rho_a(x-y)(f(y) - f(x))\,dy \right| \\
&\leqq \int_{-\infty}^{\infty} \rho_a(x-y)|f(y) - f(x)|\,dy \\
&\leqq \int_{|y-x|\leqq\delta} \rho_a(x-y)\frac{\varepsilon}{2}\,dy + \int_{|y-x|>\delta} \rho_a(x-y)M\,dy \\
&\leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M}M = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

これで $\lim_{a\to 0} f_a(x) = f(x)$ が示された.

筆者は実解析一般については次の教科書をおすすめする.

猪狩惺, 実解析入門, 岩波書店 (1996), xii+324 頁, 定価 3,800 円.

筆者は学生時代に猪狩惺先生の授業で Lebesgue 積分論や Fourier 解析について勉強した. 信じられないほどクリアな講義であり, 数学の分野の中で実解析が最もクリアな分野なのではないかと思えて来るほどだった. 上の教科書が 2016 年 5 月 3 日現在品切れ中であり, プレミア価格のついた中古本しか手に入らないことはとても残念なことである.

6 付録: ガウス分布の Fourier 変換

$t > 0$ に対して次の公式が成立している:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\frac{e^{-x^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi t}}\,dx = e^{-tp^2/2}. \tag{$*$}
$$

この公式が成立していることを複数の方法で示そう.

6.1 熱方程式を使う方法

函数 $u = u(t,x)$ を次のように定める:

$$
u(t,x) = \frac{e^{-x^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi t}}.
$$

この函数 $u = u(t,x)$ は熱方程式の基本解になっている:

$$
u_t = \frac{1}{2}u_{xx}, \qquad \lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)u(t,x)\,dx = f(0).
$$

ここで $f(x)$ は有界な連続函数である. $u = u(t,x)$ が熱方程式を満たすことは偏微分の計算で容易に示される. 後者の極限の証明は実質的に第 5.2 節の終わりに書いてある.

ゆえに, $U(t,p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}u(t,x)\,dx$ とおくと,

$$
\frac{\partial}{\partial t}U(t,p) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 e^{-ipx}}{\partial x^2}u(t,x)\,dx = -\frac{p^2}{2}U(t,p).
$$

2 つ目の等号で部分積分を 2 回行なった．さらに

$$\lim_{t\to 0} U(t,p) = \lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}u(t,x)\,dx = e^{-ip0} = 1.$$

したがって

$$U(t,p) = e^{-tp^2/2}$$

となることがわかる．これで公式 $(*)$ が示された．

6.2 両辺が同一の常微分方程式を満たしていることを使う方法

前節の記号をそのまま使うと，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p}U(t,p) &= \int_{-\infty}^{\infty}(-ix)e^{-ipx}u(t,x)\,dx = it\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipx}\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\,dx \\ &= -it\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-ipx}\right)u(t,x)\,dx = -it\int_{-\infty}^{\infty}(-ip)e^{-ipx}u(t,x)\,dx \\ &= -tpU(t,p).\end{aligned}$$

2 つ目の等号で $u_x = -(x/t)u$ を使い，3 つ目の等号で部分積分を使った．さらに

$$U(t,0) = \int_{-\infty}^{\infty}u(t,x)\,dx = 1$$

となる．これらより $U(t,p) = e^{-tp^2/2}$ となることがわかる．この方針であれば $u(t,x)$ が熱方程式の基本解であることを使わなくてよい．

6.3 項別積分で計算する方法

もしも $t=1$ の場合の公式 $(*)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{-p^2/2} \qquad (**)$$

が示されたならば，x, p をそれぞれ $x/\sqrt{t}$, $\sqrt{t}\,p$ で置換することによって一般の $t>0$ に関する公式 $(*)$ が得られる．ゆえに公式 $(*)$ を示すためには公式 $(**)$ を証明すれば十分である．

さらに $\sin(px)$ は奇函数なので $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\sin(px)\,dx = 0$ となる．ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos(px)\,dx = e^{-p^2/2}\sqrt{2\pi}$$

を示せば十分である．左辺の $\cos(px)$ にその Taylor-Maclaulin 展開を代入した後に項別積分することによってこの公式を示そう．

準備．まず $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}x^{2n}\,dx$ を計算しよう．部分積分によって

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}x^{2n}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(-e^{-x^2/2}\right)' x^{2n-1}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}(x^{2n-1})'\,dx = (2n-1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}x^{2n-2}\,dx.\end{aligned}$$

ゆえに帰納的に $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{2n}\,dx = (2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\sqrt{2\pi} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{2\pi}.$$

2 つ目の等号は左辺の分子分母に $2n\cdots 4\cdot 2 = 2^n n!$ をかけることによって得られる.

上で準備した結果を用いると,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos(px)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(px)^{2n}}{(2n)!}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p^2)^n}{(2n)!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p^2/2)^n}{n!}\sqrt{2\pi} = e^{-p^2/2}\sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

これで公式 $(**)$ が示された.

6.4　Cauchy の積分定理を使う方法

複素解析を知っている人であれば詳しい説明は必要ないと思うので, 以下の説明では大幅に手抜きをする. Cauchy の積分定理を使うと実数 p に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ip)^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

となることを示せる. ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ip)^2/2-p^2/2}\,dx = e^{-p^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ip)^2/2}\,dx = e^{-p^2/2}\sqrt{2\pi}.$$

これで公式 $(**)$ が示された.

7　付録: Gauss 積分の計算

次の公式の様々な証明の仕方を解説しよう:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

この公式の面白いところ (不思議なところ) は円周率の気配が見えない積分の値が円周率の平方根になっていることである. 実際の証明では

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi$$

を示すことになる.

7.1 極座標変換による計算

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と極座標変換すると,

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = 2\pi \left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^\infty = \pi.$$

2 つ目の等号で極座標変換の Jacobian が r になることを使った. もしくは

$$dx \wedge dy = (\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) \wedge (\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) = r\,dr \wedge d\theta$$

なので, $K = \{\,(r,\theta) \mid r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi\,\}$ とおくと,

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx \wedge dy = \iint_K e^{-r^2} r\,dr \wedge d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = \pi.$$

7.2 Jacobian を使わずにすむ座標変換による計算

y から θ に $y = x\tan\theta$ によって積分変数を変換すると,

$$\begin{aligned} I^2 &= 4\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\right) dx = 4\int_0^\infty \left(\int_0^{\pi/2} e^{-x^2\cos^2\theta}\,x\cos^2\theta\,d\theta\right) dx \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^\infty e^{-x^2\cos^2\theta}\,x\cos^2\theta\,dx\right) d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \left[\frac{e^{-x^2\cos^2\theta}}{-2}\right]_{x=0}^{x=\infty} d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\,d\theta = \pi. \end{aligned}$$

この計算では 1 変数の置換積分しか用いていない.

7.3 ガンマ函数とベータ函数の関係を用いた計算

$s, p, q > 0$ (もしくは実部が正の複素数 s, p, q) に対して,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx \qquad B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

によってガンマ函数 $\Gamma(s)$ とベータ函数 $B(p,q)$ が定義される[19].

部分積分によって $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ であることがわかり, $\Gamma(1) = 1$ なので, 0 以上の整数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となる.

Gauss 積分 I は $\Gamma(1/2)$ に等しい:

$$I = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-t}\frac{t^{-1/2}}{2}\,dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{1/2-1}\,dt = \Gamma(1/2).$$

2 つ目の等号で $x = \sqrt{t}$ とおいた. したがって $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ を証明できれば Gauss 積分が計算できたことになる.

[19]他にもたくさんの同値な定義の仕方がある. 以下では解析接続については扱わない.

ベータ函数は以下のような複数の表示を持つ:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta\,\sin^{2q-1}\theta\,d\theta = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^{1/p})^{p+q}}.$$

$x = \cos^2\theta = t/(1+t)$, $t = u^{1/p}$ と変数変換した. 3 つ目の (最後の) 表示の $p = 1/2$ の場合の被積分函数が t 分布の確率密度函数の表示で使用され, 2 つ目の表示の被積分函数は F 分布の確率密度函数の表示で使用される. $\Gamma(1/2)$ の Gauss 積分による表示の被積分函数は正規分布の確率密度函数の表示で使用され, ガンマ函数の定義式の被積分函数は χ^2 分布の被積分函数の表示で使用される. このようにガンマ函数とベータ函数はよく使用される確率分布を理解するためには必須の教養になっている.

特に最初の表示より $B(1/2,1/2) = \pi$ となることがわかる. ゆえに, もしも

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

が示されたならば, $\Gamma(1/2)^2 = B(1/2,1/2) = \pi$ となることがわかる. したがって Gauss 積分の計算はガンマ函数とベータ函数のあいだの関係式を示すことに帰着される.

ガンマ函数とベータ函数のあいだの関係式は 1 変数の置換積分と積分順序の交換のみを使って証明可能である. 以下でそのことを簡単に説明しよう. 条件 A に対して, x, y が A をみたすとき値が 1 になり, それ以外のときに値が 0 になる x, y の函数を $1_A(x,y)$ と書くことにすると,

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1}\,dy\right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty e^{-z} x^{p-1} (z-x)^{q-1}\,dz\right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty 1_{x<z}(x,z) e^{-z} x^{p-1} (z-x)^{q-1}\,dz\right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty 1_{x<z}(x,z) e^{-z} x^{p-1} (z-x)^{q-1}\,dx\right) dz \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^z e^{-z} x^{p-1} (z-x)^{q-1}\,dx\right) dz \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-z} (zt)^{p-1} (z-zt)^{q-1} z\,dt\right) dz \\
&= \int_0^\infty e^{-z} z^{p+q-1}\,dz \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \Gamma(p+q)B(p,q).
\end{aligned}$$

2 つ目の等号で $y = z - x$ と置換積分し, 6 つ目の等号で $x = zt$ と置換積分した.

補足. $\Gamma(1/2)^2 = B(1/2,1/2) = \pi$ は次の有名な公式の特別な場合である:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s,1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

この公式にも複数の証明法がある. 1 つ目の方法は $\sin z$ と $\Gamma(s)$ の無限乗積展開

$$\sin z = z\prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right), \qquad i.e.\quad \frac{\sin(\pi s)}{\pi} = s\prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right),$$

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n\to\infty} \frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!\,n^s} = e^{\gamma s} s \prod_{n=1}^\infty \left[\left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}\right]$$

を使う方法である. ここで γ は Euler 定数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

である. これらの公式を認めると,

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{1}{\Gamma(s)(-s)\Gamma(-s)} = \frac{s(-s)}{-s}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1-\frac{s}{n}\right)\right] = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}.$$

2 つ目の方法は次の定積分を複素解析を用いて計算することである:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s,1-s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt.$$

$0<s<1$ であると仮定し, $0<\varepsilon<1<R$ に対して定まる次の積分経路を C と書く: まず ε から R までまっすぐに進む. 次に複素平面上の原点を中心とする半径 R の円周上を反時計回りで 1 周する. そして R から ε までまっすぐに進む. 最後に複素平面上の原点を中心とする半径 ε の円周上を時計回りで 1 周する. このとき $\int_C z^{s-1}\,dz/(1+z)$ は $z^{s-1}\,dz/(1+z)$ の $z=-1$ での留数の $2\pi i$ 倍に等しい:

$$\int_C \frac{z^{s-1}\,dz}{1+z} = -2\pi i e^{\pi i s}.$$

$\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$ の極限を考えることによって $\int_C z^{s-1}\,dz/(1+z)$ は $\int_0^\infty t^{s-1}\,dt/(1+z)$ からそれ自身の $e^{2\pi i s}$ 倍[20] を引いた結果に等しいこともわかる:

$$\int_C \frac{z^{s-1}\,dz}{1+z} = (1-e^{2\pi i s})\int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{1+t}.$$

以上の 2 つの結果を比較することによって

$$B(s,1-s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{1+t} = \frac{-2\pi i e^{\pi i s}}{1-e^{2\pi i s}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i s}-e^{-\pi i s}} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

この積分は $t=u^{1/s}$ とおくことによって $s^{-1}\int_0^\infty du/(1+u^{1/s})$ に変形できる. ゆえに, 次の公式も得られたことになる:

$$B(1+s,1-s) = sB(s,1-s) = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} = \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}.$$

この公式を直接示すこともできる. $R>1$ であるとし, 複素平面上を原点から R までまっすぐ進み, 次に時計回りに角度 $2\pi s$ だけ回転して $Re^{2\pi i s}$ まで進み, そこから原点までまっすぐに戻る経路を C と書くと, $\int_C dz/(1+z^{1/s})$ は $dz/(1+z^{1/s})$ の $z=e^{\pi i s}$ における留数 $-se^{\pi i s}$ の $2\pi i$ 倍に等しく, $R\to\infty$ の極限で $\int_C dz/(1+z^{1/s})$ は $\int_0^\infty du/(1+u^{1/s})$ からそれ自身の $e^{2\pi i s}$ 倍を引いたものに等しい[21]. ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{1/s}} = \frac{-2\pi i s e^{\pi i s}}{1-e^{2\pi i s}} = \frac{2\pi i s}{e^{\pi i s}-e^{-\pi i s}} = \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}.$$

定積分を計算した結果に円周率倍がよく現われるのは極の周囲を 1 周する積分が留数の $2\pi i$ 倍になるからである.

---

[20] z^s の値は原点の周囲を反時計回りに 1 周すると $e^{2\pi i s}$ 倍になる.

[21] $z^{1/s}$ は z を $e^{2\pi i s}$ 倍しても不変だが, dz は $e^{2\pi i s}$ 倍になる.

7.4　同一の体積の 2 通りの積分表示を用いた計算

$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ は $z = e^{-(x^2+y^2)}$ の小山状のグラフと平面 $z = 0$ に挟まれた部分の体積を表わしている．同じ体積は高さ z の断面の面積 $\pi(-\log z)$ を $0 < z \leqq 1$ で積分した結果に等しい．ゆえに

$$I^2 = \int_0^1 \pi(-\log z)\,dz = -\pi[z\log z - z]_0^1 = \pi.$$

7.5　他の方法

他の方法については Hirokazu Iwasawa, Gaussian Integral Puzzles, The Mathematical Intelligencer, Vol. 31, No. 3, 2009, pp. 38-41 および Steven R. Dunbar, Evaluation of the Gaussian Density Integral, October 22, 2011 を参照して欲しい．