中心極限定理と Stirling の公式

黒木玄

2016 年 5 月 1 日作成

目 次

0 Stirling の公式

Stirling の公式とは

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad (n \to \infty)$$

という階乗の近似公式のことである．ここで $a_n \sim b_n$ $(n \to \infty)$ は $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 1$ を意味する．このノートではガンマ分布に関する中心極限定理から Stirling の公式が導かれることを説明する．精密かつ厳密な議論はしない．

1 ガンマ分布に関する中心極限定理からの導出

ガンマ分布とは次の確率密度函数で定義される確率分布のことである:

$$f_{\alpha,\tau}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/\tau}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\tau^\alpha} & (x > 0), \\ 0 & (x \leqq 0). \end{cases}$$

ここで $\alpha, \tau > 0$ はガンマ分布を決めるパラメーターである．以下簡単のため $\alpha = n > 0$, $\tau = 1$ の場合のガンマ分布のみを扱うために $f_n(x) = f_{n,1}(x)$ とおく:

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}x^{n-1}}{\Gamma(n)} \quad (x > 0).$$

確率密度函数 $f_n(x)$ で定義される確率変数を X_n と書くことにする．確率変数 X_n の平均と分散は両方 n になる．

ゆえに確率変数 $Y_n = (X_n - n)/\sqrt{n}$ の平均と分散はそれぞれ 0 と 1 になり, その確率密度函数は

$$\sqrt{n} f_n(\sqrt{n} y + n) = \sqrt{n} \frac{e^{-(\sqrt{n} y + n)} (\sqrt{n} y + n)^{n-1}}{\Gamma n}$$

になる. この確率密度函数で $y = 0$ とおくと

$$\sqrt{n} f_n(n) = \sqrt{n} \frac{e^{-n} n^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{\Gamma(n+1)}$$

となる. n が整数のとき $\Gamma(n+1) = n!$ なのでこれが $n \to \infty$ で $1/\sqrt{2\pi}$ に収束することと Stirling の公式の成立は同値になる.

ガンマ分布が再生性を満たしていることより, 中心極限定理を適用できるので, $\mathbb{R}$ 上の有界連続函数 $\varphi(x)$ に対して, $n \to \infty$ のとき

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}}\right) f_n(x)\, dx = \int_0^\infty \varphi(y) \sqrt{n} f_n(\sqrt{n} y + n)\, dy \longrightarrow \int_{-\infty}^\infty \varphi(y) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dy.$$

$\varphi(y)$ をデルタ函数 $\delta(y)$ に近付けることによって (すなわち被積分函数の y に 0 を代入することによって),

$$\sqrt{n} f_n(n) = \sqrt{n} \frac{e^{-n} n^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (n \to \infty)$$

を得る. この結果は Stirling の公式の成立を意味する.

2 ガンマ分布の特性函数を用いた表示からの導出

前節では中心極限定理を便利なブラックボックスとして用いて Stirling の公式を導いた.

中心極限定理は確率密度函数を特性函数 (確率密度函数の逆 Fourier 変換) の Fourier 変換で表わすことによって証明されるのであった.

この節ではガンマ分布の確率密度函数を特性函数の Fourier 変換で表わす公式を用い, 中心極限定理を経由せずに直接的に Stirling の公式を証明する[1].

ガンマ分布の確率密度函数 $f_n(x)$ の特性函数 $F_n(t)$ は次のように計算される:

$$F_n(t) = \int_0^\infty e^{itx} f_n(x)\, dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-(1-it)x} x^{n-1}\, dx = \frac{1}{(1-it)^n}.$$

より一般に実部が正の複素数 α に対して,

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-\alpha t} x^{n-1}\, dx = \alpha^{-n}$$

となることを Cauchy の積分定理を使って示せる.

Fourier の反転公式より,

$$f_n(x) = \frac{e^{-x} x^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} F_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-itx}}{(1-it)^n}\, dt \quad (x > 0).$$

[1] 筆者はこの証明法を https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nobuo/pdf/prob/stir.pdf を見て知った.

ゆえに $t=\sqrt{n}u$ と置換することによって,

$$\sqrt{n}f_n(n)=\frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itn}}{(1-it)^n}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n}\,du.$$

Stirling の公式を証明するためには, これが $n\to\infty$ で $1/\sqrt{2\pi}$ に収束することを示せばよい. そのために被積分函数の対数の様子を調べよう:

$$\begin{aligned}\log\frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n}&=-n\log\left(1-\frac{iu}{\sqrt{n}}\right)-iu\sqrt{n}\\&=n\left(\frac{iu}{\sqrt{n}}-\frac{u^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-iu\sqrt{n}=-\frac{u^2}{n}+o(1).\end{aligned}$$

したがって, $n\to\infty$ のとき

$$\frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n}\longrightarrow e^{-u^2/2}.$$

これより, $n\to\infty$ のとき

$$\sqrt{n}f_n(n)=\frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu\sqrt{n}}}{(1-iu/\sqrt{n})^n}\,du\longrightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

最後の等号で一般に正の実数 α に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/\alpha}\,du=\sqrt{\alpha\pi}$$

となることを用いた. これで Stirling の公式が証明された.

3 ガンマ函数の Gauss 積分による近似による導出

前節までに説明した Stirling の公式の証明は本質的にガンマ函数 (ガンマ分布) が Gauss 積分 (正規分布) で近似されることを用いた証明だと考えられる.

この節ではガンマ分布を正規分布で直接近似することによって Stirling の公式を示そう.

$g_n(x)=\log(e^{-x}x^n)=n\log x-x$ を $x=n$ で Taylor 展開すると

$$g_n(x)=n\log n-n-\frac{(x-n)^2}{2n}+\frac{(x-n)^3}{3n^2}-\frac{(x-n)^4}{4n^3}+\cdots$$

これより, n が大きなとき $n!=\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(n\log n-n-\frac{(x-n)^2}{2n}\right)dx=n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-n)^2/(2n)}\,dx=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

で近似されることがわかる. ゆえに

$$n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\quad(n\to\infty).$$

この近似の様子を scilab でグラフで描くことによって作った画像を

http://twilog.org/genkuroki/date-150709

で見ることができる.

以上の証明法では Stirling の公式中の因子 $n^n e^{-n}$, $\sqrt{2\pi n}$ のそれぞれが $g_n(x)=\log(e^{-x}x^n)=n\log x-x$ の $x=n$ における Taylor 展開の定数項と 2 次の項に由来していることがわかる. 3 次の項は $\int_{-\infty}^{\infty}y^3e^{-y^2/\alpha}\,dx=0$ なので寄与しない.