# 互いに素な $m, n$ に対する拡大アフィンWeyl群の直積 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の双有理作用の量子化

黒木玄　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)*

梶原・野海・山田は [1] で任意の 2 以上の整数 $m, n$ に対して拡大 Weyl 群の直積 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の $\mathbb{C}^{mn}$ へのある自然な双有理作用を構成した ([2], [6] も見よ). たとえば $(m, n) = (2, 3)$ のとき, $\widetilde{W}(A^{(1)}_1)$ の格子部分の作用から Painlevé $\mathrm{P_{IV}}$ 方程式の $q$ 差分化が得られ, その Bäcklund 変換が $\widetilde{W}(A^{(1)}_2)$ の作用から得られる.

この講演では $m, n$ が互いに素な場合に上記の梶原・野海・山田の双有理作用の量子化を構成できたことを報告する. この量子化は講演者自身による仕事 [3], [5] ではカバーされていない場合の量子化になっている.

以下では $m, n$ は2以上の互いに素な整数であるとし, 整数 $1 \leqq \widetilde{m} \leqq n-1$, $1 \leqq \tilde{n} \leqq m-1$ を条件 $\widetilde{m}m \equiv 1 \pmod{n}$, $\tilde{n}n \equiv 1 \pmod{m}$ によって定めておく. すなわち $\widetilde{m}, \tilde{n}$ はそれぞれ $\bmod n$, $\bmod m$ での $m, n$ の逆数である.

集合 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の部分集合 $B$ を次のように定める:

$$B = \{\, (\mu \bmod m,\ \mu \bmod n) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \mu = 0, 1, \dots, \widetilde{m}m - 1 \,\}$$

さらに $p_{\mu\nu}, q_{\mu\nu}$ を次のように定める:

$$p_{\mu\nu} = \begin{cases} q & \text{if } (\mu \bmod m,\ \nu \bmod n) \in B, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad q_{\mu\nu} = (p_{\mu\nu}/p_{\mu-1,\nu})^2.$$

このとき $q_{\mu\nu} \in \{1, q^{\pm 2}\}$ となる. 非可換環 $\mathcal{A}_{m,n}$ は体 $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q^2, r, s)$ 上の 1 を持つ結合代数であり, 生成元 $x_{ik}$ $(i, k \in \mathbb{Z})$ と次の関係式で定義されるものであるとする:

$$\begin{aligned} &x_{i+m,k} = r x_{ik}, \quad x_{i,k+n} = s x_{ik} \\ &x_{i+\mu,k+\nu} x_{ik} = q_{\mu\nu} x_{ik} x_{i+\mu,k+\nu} \quad (0 \leqq \mu < m,\ 0 \leqq \nu < n). \end{aligned}$$

$(m, n)$ が $(2, \text{奇数})$, (3,4), (3,5) の場合の具体例が [4] にある. 非可換性の入り方はかなり非自明である. 添字の $i, k$ の立場を交換することによって $\mathcal{A}_{m,n} \cong \mathcal{A}_{n,m}$ となることもわかる. $\mathcal{A}_{m,n}$ は Ore 整域である. その分数斜体を $\mathcal{K}_{m,n}$ と書く. この $\mathcal{K}_{m,n}$ が $\mathbb{C}^{mn}$ 上の有理函数体の適切な量子化になっている. 実はこの量子化の古典極限で得られる Poisson 構造も新しい結果になっている.

生成元 $r_0, r_1, \dots, r_{m-1}, \omega$ と次の関係式で定義される群を $\widetilde{W}_m = \widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1})$ と書き, $A$ 型の拡大アフィン Weyl 群と呼ぶ:

$$\begin{aligned} &r_i^2 = 1, \quad r_i r_j = r_j r_i \quad (j \not\equiv i, i+1 \pmod{m}), \quad r_i r_{i+1} r_i = r_{i+1} r_i r_{i+1}, \\ &\omega r_i \omega^{-1} = r_{i+1} \quad (r_m = r_0). \end{aligned}$$

本研究は科研費 (課題番号:23540003) の助成を受けたものである.

* e-mail: kuroki@math.tohoku.ac.jp
web: http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/index-j.html

$\widetilde{W}_n$ の生成元を $r_i, \omega$ と書く代わりに $s_i, \varpi$ と書くことにする. $\mathcal{K}_{m,n}$ には以下によって $\widetilde{W}_m \times \widetilde{W}_n$ の作用が定めることができる:

$$
\begin{aligned}
r_i(x_{il}) &= x_{il} - s^{-1}\frac{c_{i,l+1} - c_{i+1,l+2}}{P_{i,l+1}} = sP_{il}x_{i+1,l}P_{i,l+1}^{-1}, \\
r_i(x_{i+1,l}) &= x_{i+1,l} + s^{-1}\frac{c_{il} - c_{i+1,l+1}}{P_{il}} = s^{-1}P_{il}^{-1}x_{il}P_{i,l+1}, \\
r_i(x_{jl}) &= x_{jl} \quad (j \not\equiv i, i+1 \pmod{m}), \qquad \omega(x_{jl}) = x_{j+1,l}, \\
s_k(x_{jk}) &= x_{jk} - r^{-1}\frac{d_{j+1,k} - d_{j+2,k+1}}{Q_{j+1,k}} = rQ_{j+1,k}^{-1}x_{j,k+1}Q_{jk}, \\
s_k(x_{j,k+1}) &= x_{j,k+1} + r^{-1}\frac{d_{jk} - d_{j+1,k+1}}{Q_{jk}} = r^{-1}Q_{j+1,k}x_{jk}Q_{jk}, \\
s_k(x_{jl}) &= x_{jl} \quad (l \not\equiv k, k+1 \pmod{n}), \qquad \varpi(x_{jl}) = x_{j,l+1},
\end{aligned}
$$

ただし $c_{ik}$, $P_{ik}$, $d_{ik}$, $Q_{ik}$ を以下のように定義しておく:

$$
\begin{aligned}
&c_{ik} = x_{ik}x_{i,k+1}\cdots x_{i,k+n-1}, \\
&P_{ik} = \sum_{l=1}^{n} \overbrace{x_{ik}x_{i,k+1}\cdots x_{i,k+l-2}}^{l-1}\overbrace{x_{i+1,k+l}x_{i+1,k+l+1}\cdots x_{i+1,k+n-1}}^{n-l}, \\
&d_{ik} = x_{i+m-1,k}\cdots x_{i+1,k}x_{ik}, \\
&Q_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \overbrace{x_{i+m-1,k+1}\cdots x_{i+j+1,k+1}x_{i+j,k+1}}^{m-j}\overbrace{x_{i+j-2,k}\cdots x_{i+1,k}x_{ik}}^{j-1}.
\end{aligned}
$$

この作用の見掛けの形は梶原・野海・山田の双有理作用と全く同じ形である (どこにも $q$ が登場しない!). この仕事の非自明な部分はこの作用が代数の定義関係式を保つということである. その証明には [3], [5] のアイデアを使う.

## 参考文献


[1] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko. Discrete dynamical systems with $W(A^{(1)}_{m-1} \times A^{(1)}_{n-1})$ symmetry. Lett. Math. Phys. 60 (2002), no. 3, 211–219. `arXiv:nlin/0106029`

[2] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko. $q$-Painleve systems arising from $q$-KP hierarchy. Lett. Math. Phys. 62 (2002), no. 3, 259–268. `arXiv:nlin/0112045`

[3] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics, 289–325, Adv. Stud. Pure Math., 61, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011. `arXiv:0808.2604`

[4] 黒木玄. 量子 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ 双有理作用. 個人的なノート, 2010 年 6 月 30 日版. `http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20100630_WxW.pdf`

[5] Kuroki, Gen. Regularity of quantum $\tau$-functions generated by quantum birational Weyl group actions. Preprint 18 June, 2012. `arXiv:1206.3419`

[6] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions. Representation theory of algebraic groups and quantum groups, 371–442, Adv. Stud. Pure Math., 40, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004. `arXiv:math-ph/0203030`