A型の量子Weyl群双有理作用のSato-Wilson表示

黒木玄　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)*

Noumi-Yamada [3] はべき零 Poisson 整域の分数体への Weyl 群作用 (双有理作用) を構成した. 筆者は [1] でその Weyl 群作用を量子化し, さらに [2] において量子 τ 変数をパラメーター変数の正準共役変数の指数函数として導入し, Weyl群作用を量子 τ 変数まで拡張した. この講演では A 型の量子化された Weyl 群作用の Lax 表示および Sato-Wilson 表示について報告する. この要旨では最も基本的な A_∞ 型の q 差分化された量子 Weyl 群双有理作用の場合のみを扱う.

1. A_∞ 型の量子 Weyl 群双有理作用

A^{pa} は f_i, t_i ($i \in \mathbb{Z}$) と p から生成される $\mathbb{C}(q)$ 上の代数で以下の基本関係式で定義されたものであるとする: $\quad t_i a = a t_i, \quad pa = ap \quad (a \in A^{\mathrm{pa}})$,

$$f_i^2 f_{i\pm1} - (q+q^{-1}) f_i f_{i\pm1} f_i + f_{i\pm1} f_i^2 = 0, \qquad f_i f_j = f_j f_i \quad (j \neq i \pm 1).$$

形式的に $t_i = q^{-\varepsilon_i^\vee}$, $p = q^{-\delta^\vee}$ と書く. さらに $\alpha_i^\vee = \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}$ とおく. すなわち $q^{-\alpha_i^\vee} = t_i/t_{i+1}$. このとき A^{pa} は Ore 整域になるので, その分数斜体を K^{pa} と書く. f_i を量子従属変数と呼び, t_i と p をパラメーター変数と呼ぶ. (記号 $(\ )^{\mathrm{pa}}$ はパラメーター変数付きの代数を意味する.)

$D(K^{\mathrm{pa}})$ は K^{pa} と $\tau_i^{\pm1}$ ($i \in \mathbb{Z}$) で生成される $\mathbb{C}(q)$ 上の代数で以下の関係式で定義されたものであるとする: $\quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad \tau_i \tau_i^{-1} = \tau_i^{-1} \tau_i = 1$,

$$\tau_i t_j \tau_i^{-1} = \begin{cases} q^{-1} t_j & (j \leqq i), \\ t_j & (j > i), \end{cases} \quad \tau_i p \tau_i^{-1} = q^{-1} p, \quad \tau_i f_j \tau_i^{-1} = f_j.$$

つまり $D(K^{\mathrm{pa}})$ は K^{pa} に作用する q 差分作用素環である. τ_i を量子 τ 変数と呼ぶ.

$D(K^{\mathrm{pa}})$ の代数自己同型 π, s_i を以下の条件で定めることができる:

$$\begin{aligned}
&\pi(f_i) = f_{i+1}, \quad \pi(t_i) = t_{i+1}, \quad \pi(p) = p, \quad \pi(\tau_i) = \tau_{i+1}, \\
&s_i(f_j) = \frac{q a_i - q^{-1} a_i^{-1}}{q - q^{-1}} f_j + \frac{a_i^{-1} - a_i}{q - q^{-1}} f_i f_j f_i^{-1} \quad (j = i \pm 1), \\
&s_i(f_j) = f_j \quad (j \neq i \pm 1), \\
&s_i(t_i) = t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_j) = t_j \quad (j \neq i, i+1), \quad s_i(p) = p, \\
&s_i(\tau_i) = f_i \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (j \neq i).
\end{aligned}$$

ここで $a_i = q^{-\alpha_i^\vee} = t_i/t_{i+1}$. これによって $D(K^{\mathrm{pa}})$ に A_∞ 型の拡大 Weyl 群 $\widetilde{W} = \langle s_i, \pi | i \in \mathbb{Z} \rangle$ の作用が定まる. (これは [2] の結果の特別な場合とみなせる. 論文 [2] では f_i の非整数べきを用いて Weyl 群作用を構成している.)

本研究は科研費 (課題番号:23540003) の助成を受けたものである.

* e-mail: `kuroki@math.tohoku.ac.jp`
web: `http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/index-j.html`

2. Lax 表示と Sato-Wilson 表示

$f_{ij} \in A^{\mathrm{pa}}$ $(i<j)$ を j に関して帰納的に $f_{i,i+1} = (q-q^{-1})f_i$, $f_{i,j+1} = f_j f_{ij} - q^{-1} f_{ij} f_j$ と定め, 無限行列 $\widetilde{L}$, D_t, M を次のように定める:

$$\widetilde{L} = 1 + \sum_{i<j} f_{ij} E_{ij}, \quad D_t = \sum_i t_i E_{ii}, \quad M = D_t \widetilde{L} D_t.$$

ここで 1, E_{ij} はそれぞれ無限サイズの単位行列と行列単位である. $\widetilde{L}$ は A_∞ 型の普遍 L 作用素をその Cartan 部分で割ったものになっている. 対角成分がすべて 1 の上三角行列 U で M を $M = UD_t^2U^{-1}$ と対角化するものが一意に存在する. $g_i = -[\alpha_i^\vee]_q/f_i$, $[\alpha_i^\vee]_q = (a_i^{-1} - a_i)/(q-q^{-1})$ とおくと, U の $(i, i+1)$ 成分は $-g_i^{-1}$ になる. さらに $z_i = \tau_i/\tau_{i-1}$ とおき, 無限行列 D_Z, Z, Λ, G_i, S_i^g, S_i を次のように定める:

$$\begin{aligned}
&D_Z = \sum_i z_i E_{ii}, \quad Z = UD_Z, \quad \Lambda = \sum_i E_{i,i+1}, \quad G_i = 1 + g_i E_{i+1,i}, \\
&S_i^g = g_i^{-1} E_{i,i+1} - g_i E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk}, \\
&S_i = -[\alpha_i^\vee - 1]_q^{-1} E_{i,i+1} + [\alpha_i^\vee + 1]_q E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk}.
\end{aligned}$$

ここで $[\alpha_i^\vee \pm 1]_q = (q^{\pm 1} a_i^{-1} - q^{\mp 1} a_i)/(q - q^{-1})$. このとき $M = q^2 Z D_t^2 Z^{-1}$ が成立している. 行列 X の各成分への拡大 Weyl 群の元 w の作用させた結果を $w(X)$ と書くことにする. 主定理は次の通り.

定理 (Lax 表示と Sato-Wilson 表示)**.** 以下の公式が成立している:

$$s_i(M) = G_i M G_i^{-1}, \quad \pi(M) = \Lambda M \Lambda^{-1}; \quad s_i(Z) = G_i Z S_i, \quad \pi(Z) = \Lambda Z \Lambda^{-1}.$$

これらをそれぞれ量子 Weyl 群双有理作用の Lax 表示と Sato-Wilson 表示と呼ぶ. □

注意. (1) $s_i(U) = G_i U S_i^g$, $s_i(D_Z) = (S_i^g)^{-1} D_Z S_i$, $s_i(D_t) = (S_i^g)^{-1} D_t S_i^g = S_i^{-1} D_t S_i$.

(2) $n \geqq 3$ ならば A_∞ の場合の n 簡約で $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合の Lax 表示と Sato-Wilson 表示が得られる.

(3) すべてが可換な古典の場合には, Weyl 群双有理作用の Sato-Wilson 表示から, Weyl 群の任意の元 w に対する $w(\tau_i)$ の Jacobi-Trudi 型公式が得られ, $w(\tau_i)$ が f_i について多項式になること (正則性) がただちに導かれる. しかし, 量子化された非可換な場合はそう簡単ではない. (非可換行列式は一般に成分の非可換多項式ではなく, 非可換有理函数になる.) 筆者は [2] において量子化された場合の $w(\tau_i)$ の正則性を表現論における translation functor の理論に帰着して証明している. □

参考文献

[1] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics, 289–325, Adv. Stud. Pure Math., 61, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011. `arXiv:0808.2604`

[2] Kuroki, Gen. Regularity of quantum τ-functions generated by quantum birational Weyl group actions. Preprint 18 June, 2012. `arXiv:1206.3419`

[3] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287–319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. `arXiv:math.QA/0012028`