# 2012-05-10 長尾健太郎氏の集中講義(3)

黒木玄記

## §3 3次元双曲幾何

### §3-1 上半空間

$$\mathbb{H}^3 = \{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3 \mid t>0\} = \{(z,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R} \mid t>0\}$$

計量 $ds^2 = \dfrac{1}{t^2}(dx^2+dy^2+dt^2)$

等長変換 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \{\mathbb{H}^3$の自己同型で長さと向きを保つもの$\}$

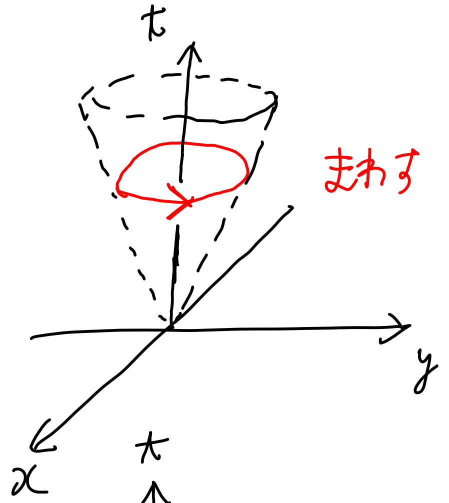
$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong PSL(2,\mathbb{C})$$

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \{\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \text{の自己同型}\} = PSL(2,\mathbb{C})$$

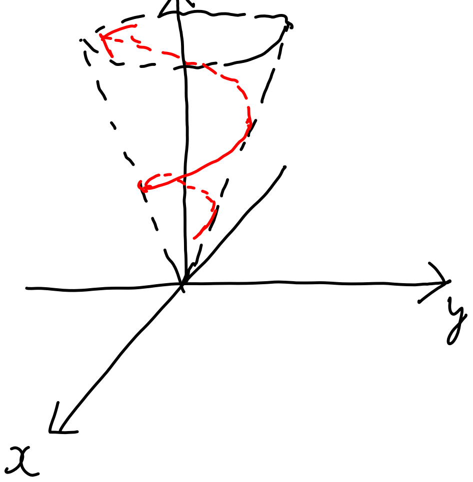
$$\text{(}\mathbb{H}^3\text{の等長変換)} \underset{\text{内側にのびる}}{\overset{\text{境界にのびる}}{\rightleftarrows}} \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

### PSL(2,C)の元の分類

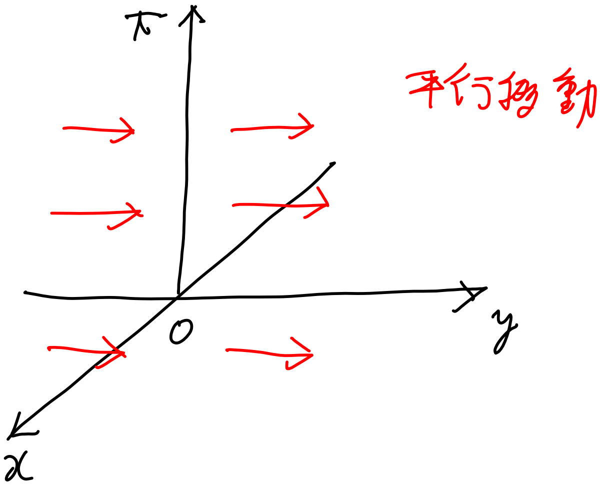
① $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ $(|\lambda|=1)$ $\longleftrightarrow$




② $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ $(|\lambda|\neq 1)$ $\longleftrightarrow$



③ $\begin{bmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow$




以上がPSL(2,ℂ)の元の
Jordan標準形による分類

## §3-2 3次元完備双曲多様体

任意の測地線が無限にのびるRiemann多様体は完備.

3次元完備双曲多様体 $\qquad \mathrm{Hom}(\pi_1(X), PSL(2,\mathbb{C}))$

$$X \rightsquigarrow \rho : \pi_1(X) \to PSL(2,\mathbb{C})$$

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \text{単射} \\ \bullet\ \rho(\pi_1(X))\ \text{は離散的} \\ \bullet\ \rho(\pi_1(X))\ \text{は①の型の元を持たない} \end{array} \right.$

$\Gamma = \rho(\pi_1(X))$ とおくと, $X = \Gamma_\rho \backslash \mathbb{H}^3$

## §3-3 トーラスカスプ

← アニュラスカスプもある

$w \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\, w > 0$ に対して

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}w \cong$$

$$\Gamma_w := \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}\text{の}1\text{による平行移動}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{w\text{による平行移動}} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & k+lw \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, k,l \in \mathbb{Z} \right\} \subset PSL(2,\mathbb{C})$$

← 平行移動

topological isom.

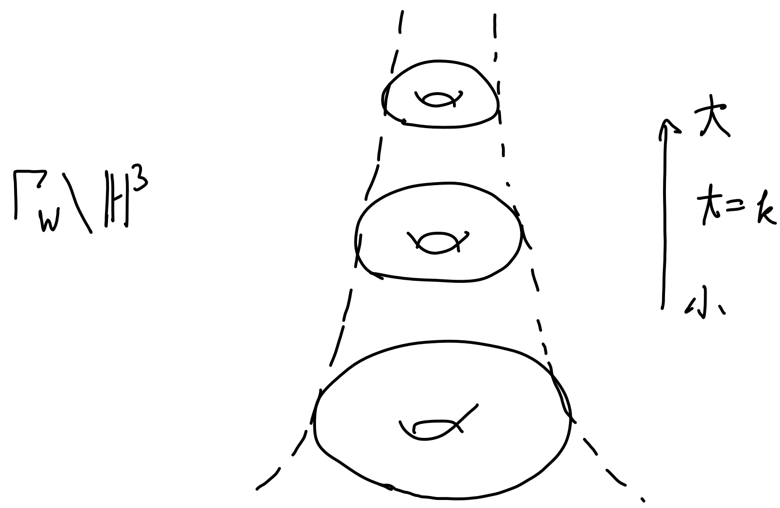
$$\Gamma_w \backslash \mathbb{H}^3 = (\Gamma_w \backslash \mathbb{C}) \times \mathbb{R}_{>0} \cong T^2 \times \mathbb{R}_{>0} \qquad (T^2 = S^1 \times S^1)$$

$k>0$ に対して $\Gamma_w$ の作用は $C_k = \{(x,y,t) \mid t = k\}$ を保つ.

$\Gamma_w \backslash C_k =: T_k$ とおくと，topologicalには $T_k \cong T^2$.

しかし，tが変わると $T_k$ のサイズは変わる

tが大きくなると，$T_k$ のサイズは小さくなっていく




$\Gamma_w \backslash \mathbb{H}^3$ の $t=\infty$ の近傍のことをトーラスカスプと呼ぶ.

($t=\infty$ は $\partial \mathbb{H}^3 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の $\infty$ に対応.)

$\boxed{\text{今日の目標}}$

トーラスカスプを持つ3次元完備双曲多様体の具体的な構成.

(動機：結び目の補空間の研究など)

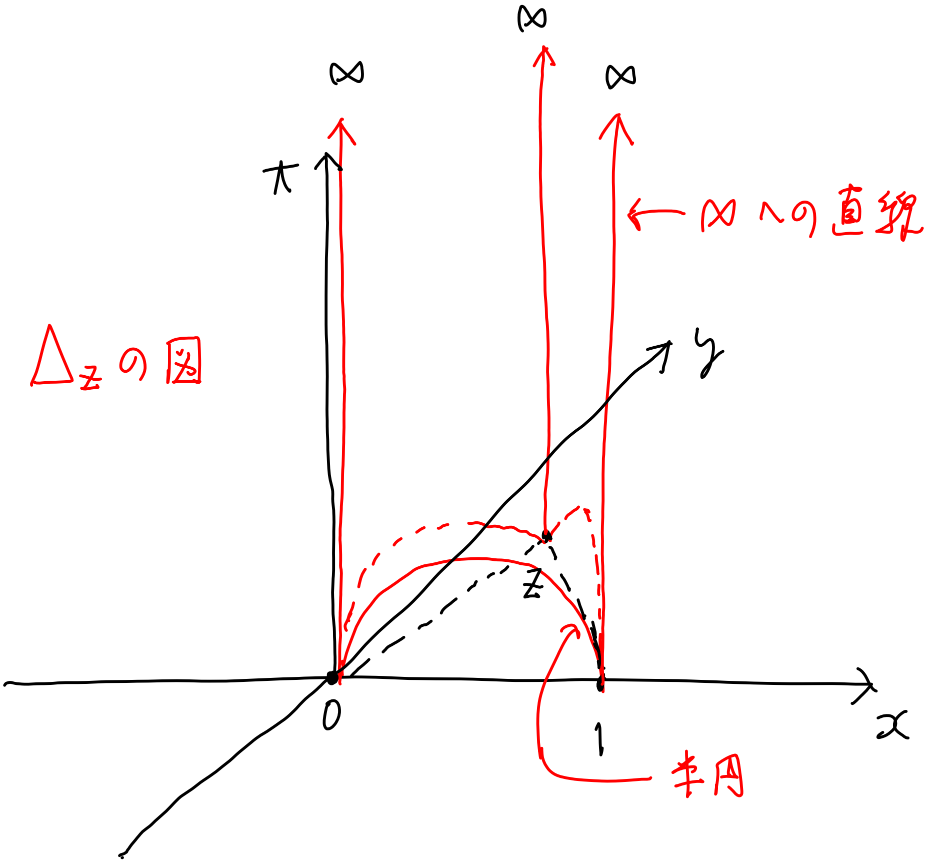
## §3-3 理想四面体

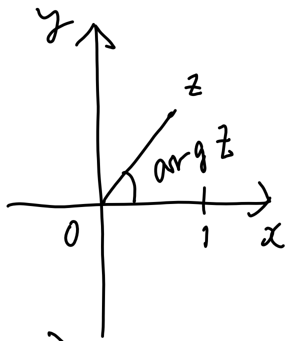
$z \in \mathbb{C}$，$\mathrm{Im}\, z > 0$ に対して，理想四面体 $\Delta_z$ が定義される.

$\partial \mathbb{H}^3 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の $0, 1, z, \infty$ を頂点に持つ四面体が $\Delta_z$ である

ただし，$\Delta_z$ の辺と面は測地線と測地面になっているとする

次ページに $\Delta_z$ の図




- (面0∞1 と 面0∞z のあいだの角度) = arg z
- パラメータは各辺に対して与えられていると考えられる
- 向かいあう辺には同じパラメータが対応している
- 3対の辺に対応するパラメータは $z, \ \frac{1}{1-z}, \ 1-\frac{1}{z}$ である。

レポート

## 注 理想四面体の体積

計量が入っているので体積が計算できる。有限の値になる

キリル文字のЛ

$$\text{Л}(\theta) := -\int_0^\theta \log|2\sin u|\,du \quad : \text{Lobachevsky 関数}$$

ツイッターでTeXでの書き方は教えてもらった

手でどう書くかは知らない

$$\mathrm{Li}_2(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (|z|<1)$$

$$= -\int_0^z \frac{\log(1-w)}{w}\,dw \quad : 2\text{重対数関数}$$

このとき、$\mathrm{Li}_2(e^{2i\theta}) = \frac{\pi^2}{6} - \theta(\pi-\theta) + 2\sqrt{-1}\,\text{Л}(\theta)$.

$\boxed{\text{レポート}}$ 3つの角が $\alpha, \beta, \gamma$ であるような理想四面体の体積は $\text{Л}(\alpha)+\text{Л}(\beta)+\text{Л}(\gamma)$ になる

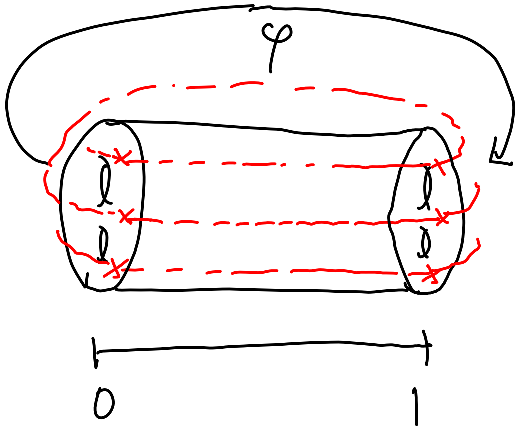
(もともと $\text{Л}(\theta)$ が積分で書かれているので volume form を積分すればカンタンに出る)

2重対数函数(実際にはその量子化)がクラスター変換を与えるという仕組になっているので、それとの関係で以上の公式は重要。

ここで休みをとる (16:00〜16:14).

前半では理想四面体を定義した。
理想四面体をはり合わせて双曲多様体を作りたい。
特別な位相を持つものを作る。

## §3-4 写像トーラス




$[\varphi] \in MCG(\Sigma, C)$ に対して

$$T_\varphi := \Sigma \times [0,1] / ((x,0)\sim(\varphi(x),1))$$
$$\cup$$
$$C_\varphi = C\times[0,1]/((c,0)\sim(\varphi(c),1))$$ ←図の ---- の部分

$$\boxed{\begin{array}{l}C_\varphi \text{ にトーラスカスプを持つような} \\ T_\varphi\setminus C_\varphi \text{ 上の双曲構造を明示的に構成したい!}\end{array}}$$

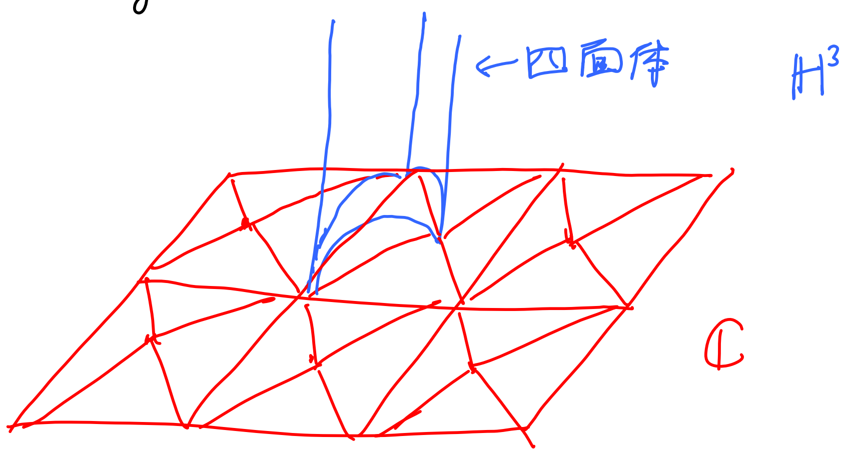
# §3-5 構成の方針

**Step 1** $T_\varphi \setminus C_\varphi$ をトポロジカルに四面体に分割する

**Step 2** 各四面体に対して，双曲構造がうまく貼り合うようにパラメーターを与える。
(高々一次の代数的条件を課せばよい)

log $z$ について一次

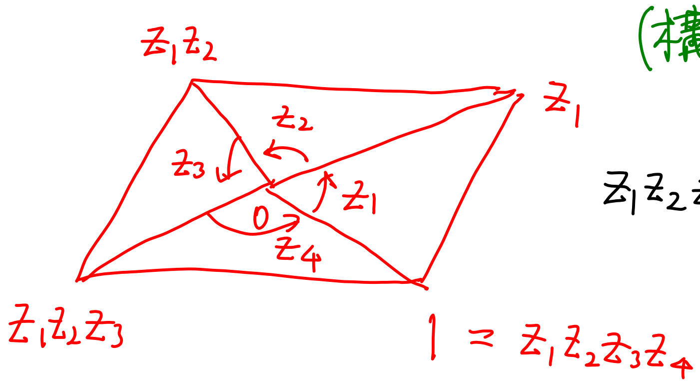
step1 ができたとして，
トーラスカスプ(になってほしい部分)のまわりの四面体を集めてくると，universal covering 上で次のような図が描ける：




step2の条件 $\Longleftrightarrow$ パラメーターたちが $\mathbb{C}$ $(=\partial\mathbb{H}^3\setminus\{\infty\})$ 上のユークリッド幾何的な三角形分割を与える

$\Longleftrightarrow$ ・各頂点のまわりのパラメータの積は1，

(構造方程式)

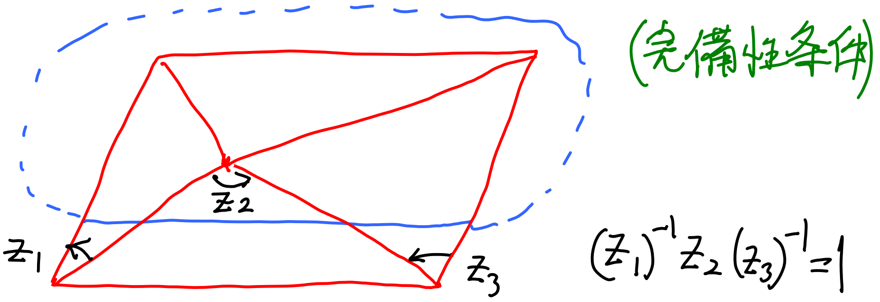



$z_1z_2z_3z_4=1$

次ページにつづく

前ページのつづき

- 写像トーラス上の任意の閉曲線
  (上の条件のもとで「ある閉曲線」で十分)
  に沿ったパラメーターの積が1になる




我々の状況では構造方程式＋完備性条件が解ける!
クラスター代数で解ける!

(注) 完備性条件をおとすと, 完備でない双曲構造を与える.
上の例の $(z_1)^{-1}z_2(z_3)^{-1}=u$ にあたるパラメーターを
トーラスカスプごとに定まる Neumann-Zagier parameter と呼ぶ.
双曲構造の変形パラメーターになっている.
完備双曲多様体は完備なまま変形できない(Mostow剛性).

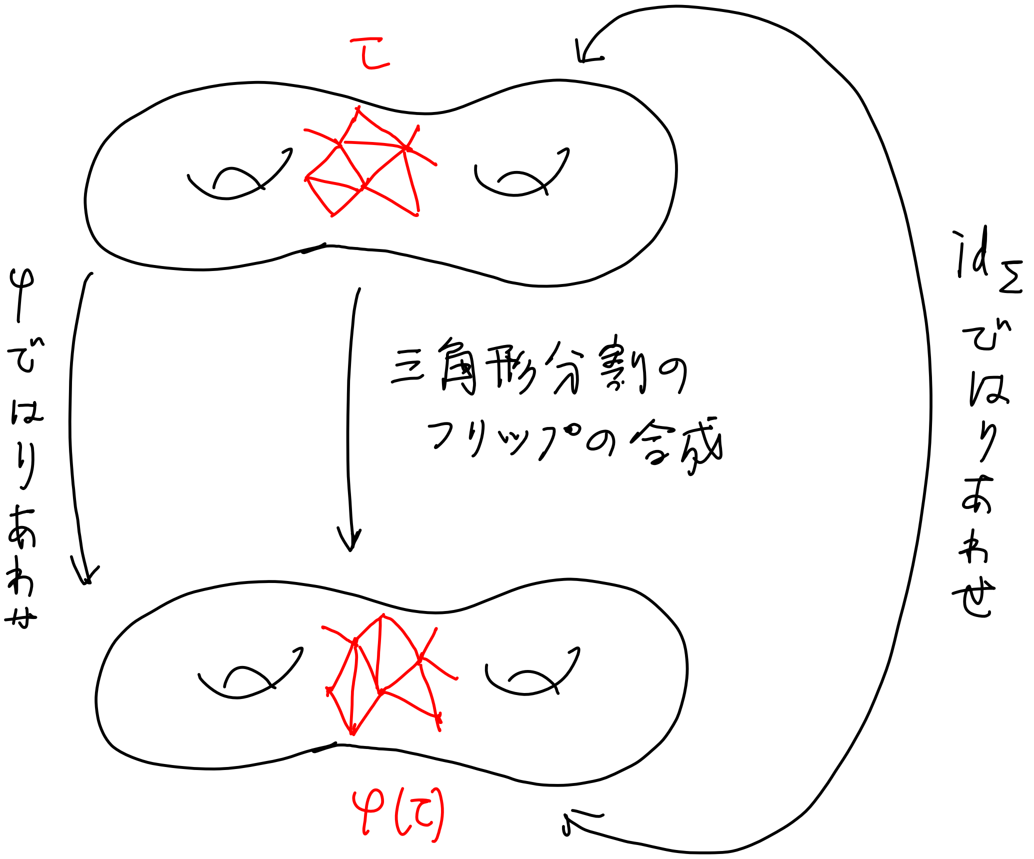
## §3-6 Step 1

$[\varphi]\in MCG(\Sigma, C)$

$$\begin{array}{l} T_\varphi \\ \downarrow \ \text{fiber } \Sigma \\ S^1 \end{array}$$

$(\Sigma, C)$ の三角形分割 $\tau$ を与える

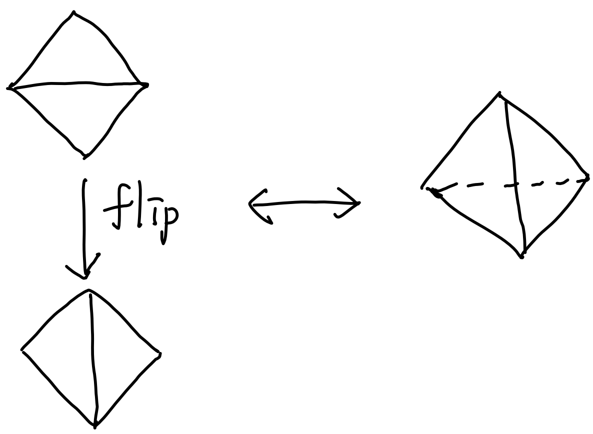
そして次ページの図のように考える



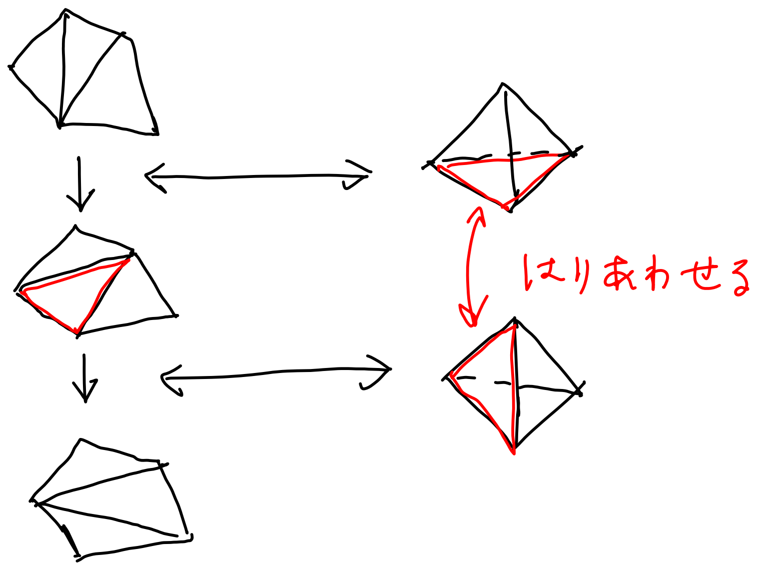

∃flipsの列

$$\tau \to \tau' \to \cdots \to \varphi(\tau)$$

各flip ⟷ 四面体




## 貼り合わせのルール



これによって，$\tau$ から $T_\varphi$ の四面体分割が得られる
(ただし，$\varphi$ は擬 Anosov であることを仮定.)

注 写像類のサーストン・ニールセン分類

- 周期的
- 可約
- 擬 Anosov ($\Longleftrightarrow$ $T_\varphi$ に双曲構造が入る)

  $\Downarrow$

  flip されない辺がない

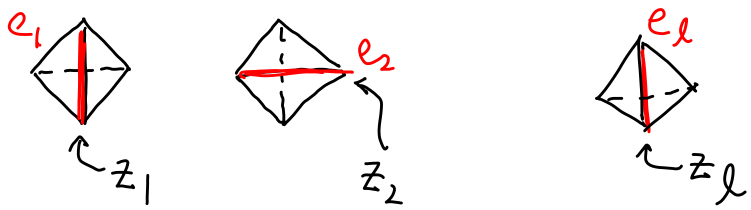
(じっさいにはむずかしいことは使わずにこれをつかう)

## §3-7 Step 2

$$\tau \xrightarrow{e} \tau'$$

辺 $e$ での flip

$$\tau_0 \xrightarrow{e_1} \tau_1 \xrightarrow{e_2} \tau_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{e_\ell} \varphi(\tau) = \tau_\ell$$




$P \in (\mathrm{Teich}(\Sigma, C)_{\mathbb{C}})^\varphi$ を取る.

$P$ は $\varphi$ による fixed point

$$(F_e^{\tau_0}(P))_e \xrightarrow{F_{e_1}^{\tau_0}(P)} (F_e^{\tau_1}(P))_e \xrightarrow{F_{e_2}^{\tau_1}(P)} (F_e^{\tau_2}(P))_e \longrightarrow \cdots \longrightarrow (F_e^{\varphi(\tau)}(P))_e = (F_e^{\tau}(P))_e$$

Fock座標

---

**定理** (N-Terashima-Yamazaki) $P \in (\mathrm{Teich}(\Sigma, C))^\varphi$ に対して，
$z_i := F_{e_i}^{\tau_{i-1}}(P) \in \mathbb{C}$ とおくと，
$z_i$ たちは構造方程式＋完備性条件をみたしている $\square$

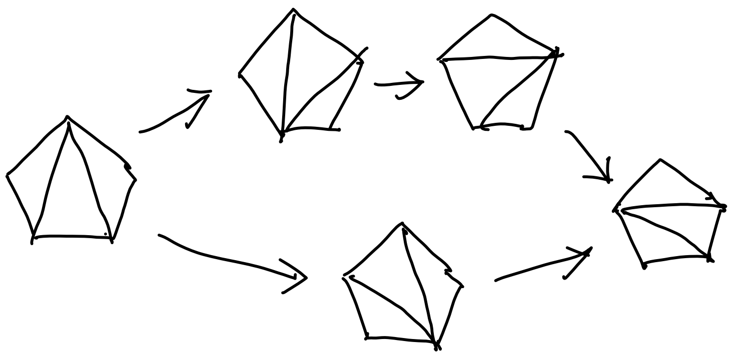
注 擬Anosov $\Longrightarrow$ $(\mathrm{Teich}(\Sigma,C))^{\varphi} = \phi$

$$(\overline{\mathrm{Teich}(\Sigma,C)})^{\varphi} = 2\text{点}$$

注 我々は $(\mathrm{Teich}(\Sigma,C)_{\mathbb{C}})^{\varphi}$ を考えている

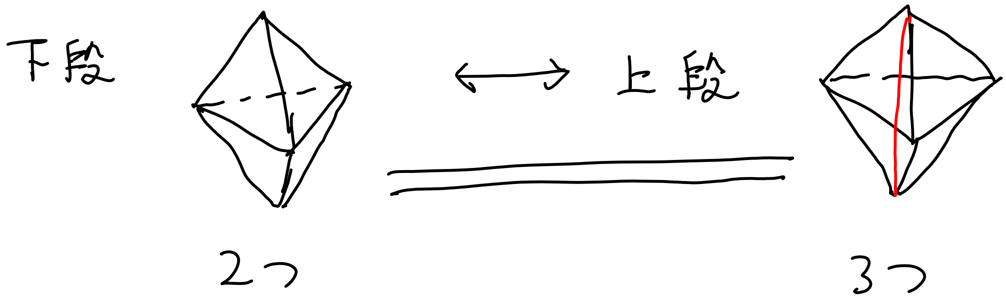
注 $\mathrm{Im}\, z_{\triangle} > 0$ は check していない。（具体例ではOK 一般にはむずかしい）
不変量を計算するときには
この条件のチェックはいらない。

注 $\varphi$ が表わす2つの flips の列は pentagon でつながる。



pentagon

これを四面体のはり合わせでみると




最後に

$$(\overline{\mathrm{Teich}})^{\varphi} \ni P \rightsquigarrow \text{構造方程式の解}$$

$$\mathrm{Teich} = \{ (F_e)_c \mid F_c = 0 \ (c \in C) \}$$

$\updownarrow$ NZ parameter