量子群と q 差分版量子 Weyl 群双有理作用

黒木 玄

2010 年 6 月 27 日提出*

以下の結果の詳細については論文 [K] を見よ．

$A = [a_{ij}]_{i,j\in I}$ は対称化可能一般 Cartan 行列 (GCM) であるとする．すなわち $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \leqq 0$ $(i \neq j)$, $a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$ であり, ある 0 でない有理数 d_i たちで $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ を満たすものが存在すると仮定する．d は d_i たちの最小の共通分母であるとし, 基礎体 $\mathbb{F}$ を $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q^{1/d})$ と定め, $q_i = q^{d_i} \in \mathbb{F}$ とおく．Y は自由 $\mathbb{Z}$ 加群であるとし, Y と双対 $X = \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{Z})$ とのあいだの内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書くことにする．$\alpha_i^\vee \in Y$, $\alpha_i \in X$ は $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j\rangle = a_{ij}$ を満たしていると仮定する．

生成元 s_i $(i \in I)$ と基本関係式

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i \quad (a_{ij} = 0), \quad s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \quad (a_{ij}a_{ji} = 1),$$
$$(s_i s_j)^2 = (s_j s_i)^2 \quad (a_{ij}a_{ji} = 2), \quad (s_i s_j)^3 = (s_j s_i)^3 \quad (a_{ij}a_{ji} = 3)$$

で定義される群を W と書いて Weyl 群と呼ぶ. Weyl 群は Y に自然に作用する:

$$s_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i\rangle \alpha_i^\vee \quad (\lambda \in Y,\ i \in I).$$

q 数, q 階乗, q 二項係数をそれぞれ以下のように定める: $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad [k]_q! = [k]_q \cdots [2]_q [1]_q, \quad \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[x]_q [x-1]_q \cdots [x-k+1]_q}{[k]_q!}.$$

$\mathcal{A}_{q,0}$ は f_i $(i \in I)$ から生成される $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q^{1/d})$ 上の代数で零因子を持たないものであるとする．さらに f_i $(i \in I)$ は $\mathcal{A}_{q,0}$ の中で次の q-Serre 関係式を満たしていると仮定する:

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} f_i^k f_j f_i^{1-a_{ij}-k} = 0 \quad (i \neq j).$$

$\mathcal{A}_{q,0}$ と $d^{-1}Y$ の群環 $\mathbb{F}[d^{-1}Y] = \bigoplus_{\lambda \in d^{-1}Y} \mathbb{F} q^\lambda$ のテンソル積を $\mathcal{A}_q$ と表わし, $\mathcal{A}_{q,0}$, $\mathbb{F}[d^{-1}Y]$ とそれらの $\mathcal{A}_q$ での像を同一視しておく．$\mathcal{A}_q$ の中で, $q^\lambda f_i = q^{-\langle\lambda,\alpha_i\rangle} f_i q^\lambda$ ではなく, $q^\lambda f_i = f_i q^\lambda$ が成立していることに注意せよ．

$\mathcal{A}_q$ は Ore 整域になっていると仮定する．たとえば GCM $A = [a_{ij}]$ が有限型もしくはアフィン型ならば $\mathcal{A}_q$ は常に Ore 整域になる．$\mathcal{A}_q$ の商斜体を $Q(\mathcal{A}_q)$ と表わす．

$\mathrm{ad}_q(f_i)^\nu(f_j)$ $(i \neq j)$ を $\nu = 0, 1, 2, \dots$ について帰納的に次のように定めておく:

$$\mathrm{ad}_q(f_i)^0(f_j) = f_j, \quad \mathrm{ad}_q(f_i)^{\nu+1}(f_j) = f_i\, \mathrm{ad}_q(f_i)^\nu(f_j) - q_i^{2\nu+a_{ij}}\, \mathrm{ad}_q(f_i)^\nu(f_j) f_i.$$

このとき q-Serre 関係式と $\mathrm{ad}_q(f_i)^\nu(f_j) = 0$ $(\nu > -a_{ij})$ は同値である．

*2010 年 9 月 13 日誤植を修正

定理 1. $Q(\mathcal{A}_q)$ の代数自己同型 s_i を次によって定めることができる:

$$s_i(f_j) = \sum_{\nu=0}^{-a_{ij}} q_i^{(\nu+a_{ij})(\alpha_i^\vee-\nu)} \begin{bmatrix} \alpha_i^\vee \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i} \mathrm{ad}_q(f_i)^\nu(f_j) f_i^{-\nu} \quad (i \neq j),$$
$$s_i(f_i) = f_i, \quad s_i(q^\lambda) = q^{s_i(\lambda)} \quad (\lambda \in d^{-1}Y).$$

さらにこれによって Weyl 群 W が $Q(\mathcal{A}_q)$ に作用する. □

例 2. たとえば $a_{ij} = -1$ ならば

$$s_i(f_j) = q_i^{\pm\alpha_i^\vee} f_j + [\alpha_i^\vee]_{q_i}(f_i f_j - q_i^{\pm 1} f_j f_i) f_i^{-1} = [1-\alpha_i^\vee]_{q_i} f_j + [\alpha_i^\vee]_{q_i} f_i f_j f_i^{-1}.$$

よって $q \to 1$ の極限で $s_i(f_j) = f_j + \alpha_i^\vee [f_i, f_j] f_i^{-1}$ となる. この式を知っていれば symply-laced の場合の計算には困らない. □

注意 3. 上の定理で形式的に $s_i(f_j) = f_i^{\alpha_i^\vee} f_j f_i^{-\alpha_i^\vee}$ が成立している. ($\alpha_i^\vee$ を整数で置き換えるとその式は実際に成立している.) 上の定理の証明もそのアイデアに基づいて遂行される. つまり上の定理の Weyl 群作用は f_i の非整数べきの conjugation 作用で構成されていると考えられる. □

注意 4. 上の定理の結果は野海・山田 [NY] の Weyl 群双有理作用の q 差分化と量子化を両方同時に遂行したものになっている. □

注意 5. 長谷川は論文 [H] の第 1〜3 節で上の定理とは別の q 差分版量子 Weyl 群双有理作用を構成した. 長谷川の作用は梶原・野海・山田 [KNY] の q 差分版 Weyl 群双有理作用の量子化になっている. 実は q-Serre 関係式を満たす f_i たちの非整数べきの conjufation 作用を用いるというアイデアで長谷川 [H] 第 1〜3 節の作用を再構成できる. □

参考文献

[H] Hasegawa, Koji. Quantizing the Bäcklund transformations of Painlevé equations and the quantum discrete Painlevé VI equation. Preprint 2007.
`http://arxiv.org/abs/math/0703036`

[KNY] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. A study on the fourth q-Painleve equation. J. Phys. A 34 (2001), no. 41, 8563–8581.
`http://arxiv.org/abs/nlin/0012063`

[K] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. Preprint 2008, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics, Proceedings of "Exploration of New Structures and Natural Constructions in Mathematical Physics", Nagoya University, March 5–8, 2007.
`http://arxiv.org/abs/0808.2604`

[NY] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287–319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.
`http://arxiv.org/abs/math/0012028`