Cauchy-Schwarz-Buniakowski の不等式の証明

黒木玄

2010 年 7 月 31 日更新　(2010 年 7 月 31 日作成)

目 次

1 Cauchy-Schwarz-Buniakowski の不等式

1.1 内積とノルムの定義

以下 V は複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であるとする. (練習問題: 体の定義を述べよ. 体の例を三つ以上示し, それらの体の中での計算の例を説明せよ. 体上のベクトル空間の定義を述べよ. 体とその体上のベクトル空間の組の例を三つ以上示し, それらのベクトル空間の中での計算の例を説明せよ.)

写像 $\langle\ \ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ が内積 (もしくは計量) であるとはそれが以下の条件を満たしていることである:

(1)　$\langle a, b + c\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle,\quad \langle a + b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle \quad (a, b, c \in V).$

(2)　$\langle a, \alpha b\rangle = \alpha\langle a, b\rangle,\quad \langle \alpha a, b\rangle = \bar{\alpha}\langle a, b\rangle \quad (a, b \in V,\ \alpha \in \mathbb{C}).$

(3)　$\langle b, a\rangle = \overline{\langle a, b\rangle} \quad (a, b \in V).$

(4)　$\langle a, a\rangle \geqq 0 \quad (a \in \mathbb{C}).$

(5)　$\langle a, a\rangle = 0 \implies a = 0 \quad (a \in V).$

条件 (1) の前半と条件 (2) の前半と条件 (3) から条件 (1) の後半と条件 (2) の後半が導かれる. 条件 (2) として次を採用している教科書や講義も多いので注意せよ:

(2′)　$\langle \alpha a, b\rangle = \alpha\langle a, b\rangle,\quad \langle a, \alpha b\rangle = \bar{\alpha}\langle a, b\rangle \quad (a, b \in V,\ \alpha \in \mathbb{C}).$

このノートでこちらの (2′) を採用しない.
内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対してノルム $||\ ||$ を

$$||a|| = \sqrt{\langle a, a\rangle} \quad (a \in V)$$

と定める. 条件 (4) によって $\langle a, a\rangle \geqq 0$ であることに注意せよ. これが以下の性質を満たしていることを条件 (4), (5), (2) のそれぞれを使って示すことができる:

(6) $\quad ||a|| \geqq 0 \quad (a \in V)$.

(7) $\quad ||a|| = 0 \implies a = 0 \quad (a \in V)$.

(8) $\quad ||\alpha a|| = |\alpha|\,||a|| \quad (a \in V,\ \alpha \in \mathbb{C})$.

(練習問題: 証明せよ.)

例 1.1. 複素数を成分に持つ n 次元列 (縦) ベクトル全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $\mathbb{C}^n$ と表わす. $\mathbb{C}^n$ は複素数を成分に持つ $n \times 1$ 行列全体の集合と同一視される. このとき

$$\langle a, b\rangle = a^* b = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i \qquad (a = [a_i]_{i=1}^n,\ b = [b_i]_{i=1}^n,\ a_i, b_i \in \mathbb{C})$$

は $\mathbb{C}^n$ における内積である. (練習問題: 証明せよ.) ここで a^* は a の随伴 (転置の複素共役) である. この内積は $\mathbb{C}^n$ の標準的な内積としてよく使われる. □

例 1.2. $H = [h_{ij}]$ は $n \times n$ の Hermite 行列 (すなわち $H^* = H$ を満たす複素正方行列) であるとし, H の固有値 (実数になる) はすべて正であると仮定する. このとき

$$\langle a, b\rangle_H = a^* H b = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} h_{ij} b_j \qquad (a = [a_i]_{i=1}^n,\ b = [b_i]_{i=1}^n,\ a_i, b_i \in \mathbb{C})$$

は $\mathbb{C}^n$ における内積である. (練習問題: 証明せよ.)
実は $\mathbb{C}^n$ における内積はすべてこの形で一意に表示される. (練習問題: 証明せよ.)
このように同じベクトル空間に内積の入れる方法はたくさんある. 上の標準的な内積だけではなく, 条件 (1)〜(5) を満たすものを内積と呼ぶことのメリットはそれによって目的に応じて適切な内積を選ぶ自由が得られることである. □

例 1.3. 閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ 上の複素数値連続函数全体のなす無限次元の複素ベクトル空間を $C^0([a, b])$ と表わす. このとき

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\, dx \quad (f, g \in C^0([a, b]))$$

は $C^0([a, b])$ における内積である. (練習問題: 証明せよ. (5) の証明だけが少しだけ面倒.)
このように函数と函数の内積を定義することもできる. $\mathbb{C}^n$ における標準的な内積の扱いでつちかった直観の多くは函数の内積にも適用可能である. □

例 1.4. $\mathbb{R}$ 上の二乗可積分複素数値函数全体のなす無限次元複素ベクトル空間を $L^2(\mathbb{R})$ と表わす (より詳しい定義は Lebesgue 積分論の教科書を見よ). 写像 $\langle\ ,\ \rangle : L^2(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ を

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x)\, dx \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}))$$

と定める. (実際には Cauchy-Schwarz-Buniakowski の不等式を使って well-defined すなわち右辺の積分が収束することを証明する必要がある.) 測度 0 の集合上の値の違いを無視しないとき $\langle\ ,\ \rangle$ は条件 (1)〜(4) を満たしているが, 条件 (5) は満たさないので厳密な意味で内積であるとは言えない. しかし, 測度 0 の集合上での値の違いを無視すれば (より正確に言えば測度 0 のある集合の外で値が一致する二つの函数を同一視するとき), $\langle\ ,\ \rangle$ は厳密な意味で内積とみなせる. □

1.2 Cauchy-Schwarz-Buniakowski の不等式の証明

Cauchy-Schwarz-Buniakowski の不等式は Cauchy-Schwarz の不等式と呼ばれることが多く, Schwarz の不等式と呼ばれることも多い.

定理 1.5 (Cauchy-Schwarz-Buniakowski の不等式)**.** V は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であるとし, $\langle\ ,\ \rangle$ は V における内積であるとする. このとき次の不等式が成立する:

$$|\langle a, b\rangle| \leqq ||a||\,||b|| \qquad (a, b \in V). \tag{1.1}$$

証明. 内積が満たすべき条件 (5) を (したがって性質 (7) も) 使わずに証明しよう.

$a, b \in V$ に対して実数 x の函数 $f(x)$ を $f(x) = \langle xa + b, xa + b\rangle$ と定める. このとき条件 (4) より $f(x) \geqq 0$ $(a \in \mathbb{R})$ であり, 条件 (1), (2), (3) とノルムの定義より,

$$f(x) = ||a||^2 x^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle a, b\rangle x + ||b||^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(練習問題: この等式が成立することを確認せよ.)

$f(x)$ の値が常に非負であることから次の不等式が出ることを示そう:

$$|\,\mathrm{Re}\langle a, b\rangle| \leqq ||a||\,||b|| \qquad (a, b \in V). \tag{1.2}$$

$||a|| = 0$ のとき $f(x)$ のグラフは直線になる. もしも直線の傾き $2\,\mathrm{Re}\langle a, b\rangle$ が 0 でないならば $f(x)$ は負の値も取り得るので $\mathrm{Re}\langle a, b\rangle = 0$ でなければいけない. このとき不等式 (1.2) が成立することは明らか.

$||a|| \neq 0$ のとき $f(x)$ は二次函数になり, $f(x) \geqq 0$ $(x \in \mathbb{R})$ よりその判別式 D は 0 以下にならなければいけない:

$$\frac{D}{4} = (\mathrm{Re}\langle a, b\rangle)^2 - ||a||^2||b||^2 \leqq 0.$$

これより不等式 (1.2) が出る.

不等式 (1.2) から証明したい不等式 (1.1) が出ることを示そう.

$\langle a, b\rangle$ は $\langle a, b\rangle = |\langle a, b\rangle| e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ と表わせる. $a' = a$, $b' = e^{i\theta} b$ とおく. このとき条件 (2)(および (2) 使って証明できる性質 (8)) より

$$||a'|| = ||a||, \quad ||b'|| = ||b||, \quad \langle a', b'\rangle = \langle a, e^{-i\theta} b\rangle = e^{-i\theta}\langle a, b\rangle = |\langle a, b\rangle|.$$

ゆえに $|\operatorname{Re}\langle a', b'\rangle| = |\langle a, b\rangle|$ である．よって不等式 (1.2) を a', b' に適用すると

$$|\langle a, b\rangle| = |\operatorname{Re}\langle a', b'\rangle| \leqq ||a'||\,||b'|| = ||a||\,||b||.$$

これで不等式 (1.1) が示された． □

練習問題: 上の定理を自分が知っているすべての内積に適用してみよ．

1.3 ノルムの三角不等式の証明

定理 1.6 (内積から定まるノルムの三角不等式)**.** V は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であるとし，$\langle\ ,\ \rangle$ は V における内積であるとし，$||\ ||$ はそれから定まるノルムであるとする．このとき次の不等式が成立する:

$$||a+b|| \leqq ||a|| + ||b|| \qquad (a, b \in V). \tag{1.3}$$

証明. $||a+b||^2 \leqq (||a|| + ||b||)^2$ を示せばよい．内積が満たすべき条件より

$$||a+b||^2 = \langle a+b, a+b\rangle = ||a||^2 + 2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle + ||b||^2.$$

そして

$$(||a|| + ||b||)^2 = \langle a+b, a+b\rangle = ||a||^2 + 2||a||\,||b|| + ||b||^2$$

であるから $||a+b||^2 \leqq (||a|| + ||b||)^2$ は

$$\operatorname{Re}\langle a, b\rangle \leqq ||a||\,||b||$$

と同値である．この不等式は Cauchy-Schwarz-Buniakowski の不等式 (1.1) もしくは見掛け上それより弱い不等式 (1.2) からただちに導かれる． □

練習問題: 上の定理を自分が知っているすべての内積に適用してみよ．