広田のD-operator入門

黒木 玄

2008年12月5日更新　(2008年12月5日作成)

目 次

1　広田のD-operator

このノートはほとんど広田良吾 [1] (もしくは青カバーの本 [2] の1-6節) からの引き写し.

1.1　定義

記号の簡単のため $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial t}$ のそれぞれを $\partial_x, \partial_y, \partial_t$ と書くことにする.

x, y, t の多項式 $P(x, y, t)$ に対して, 函数 f, g の双線形作用素 $P(D_x, D_y, D_t)$ を次のように定める:

$$P(D_x, D_y, D_t) f\cdot g = P(\partial_x - \partial_{x'}, \partial_y - \partial_{y'}, \partial_t - \partial_{t'})(f(x,y,t)g(x',y',t'))\big|_{(x',y',t)=(x,y,t)}.$$

たとえば

$$\begin{aligned}
&D_x f\cdot g = f_x g - f g_x,\\
&D_x^2 f\cdot g = f_{xx} g - 2 f_x g_x + f g_{xx},\\
&D_x^3 f\cdot g = f_{xxx} g - 3 f_{xx} g_x + 3 f_x g_{xx} - f g_{xxx},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&D_x^n f\cdot g = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \frac{\partial^{n-k} g}{\partial x^{n-k}},\\
&D_x D_t f\cdot g = f_{xt} g - f_x g_t - f_t g_x + f g_{xt}.
\end{aligned}$$

$f=g$ のとき

$$
\begin{aligned}
&P(-D_x,-D_y,-D_t)f\cdot f\\
&=P(-\partial_x+\partial_{x'},-\partial_y+\partial_{y'},-\partial_t+\partial_{t'})(f(x,y,t)f(x',y',t'))\big|_{(x',y',t)=(x,y,t)}\\
&=P(\partial_{x'}-\partial_x,\partial_{y'}-\partial_y,\partial_{t'}-\partial_t)(f(x',y',t')f(x,y,t))\big|_{(x',y',t)=(x,y,t)}\\
&=P(D_x,D_y,D_t)f\cdot f.
\end{aligned}
$$

特に $P(-x,-y,-t)=-P(x,y,t)$ (P が奇函数) のとき $P(D_x,D_y,D_t)f\cdot f=0$ となる.

1.2 対数微分の表示公式

パラメータ ε に関する Maclaurin 展開より

$$e^{\varepsilon D_x}f(x)\cdot g(x)=f(x+\varepsilon)g(x-\varepsilon).$$

$e^x=\cosh x+\sinh x$ で $\sinh x$ は x の奇函数なので

$$\cosh(\varepsilon D_x)f(x)\cdot f(x)=e^{\varepsilon D_x}f(x)\cdot f(x)=f(x+\varepsilon)f(x-\varepsilon).$$

さらに

$$2\cosh(\varepsilon\partial_x)\log f(x)=(e^{\varepsilon\partial_x}+e^{-\varepsilon\partial_x})\log f(x)=\log[f(x+\varepsilon)f(x-\varepsilon)],$$

なので次が成立している:

$$2\cosh(\varepsilon\partial_x)\log f(x)=\log\left[\cosh(\varepsilon D_x)f(x)\cdot f(x)\right].$$

右辺で $\log(1+X)=X-X^2/2+X^3/3-X^4/4+\cdots$ を用い, 両辺を ε について展開して比較すると

$$
\begin{aligned}
2\partial_x^2\log f&=\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2},\\
2\partial_x^4\log f&=\frac{D_x^4f\cdot f}{f^2}-3\left(\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2}\right)^2,\\
2\partial_x^6\log f&=\frac{D_x^6f\cdot f}{f^2}-15\frac{D_x^4f\cdot f}{f^2}\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2}+30\left(\frac{D_x^3f\cdot f}{f^2}\right)^3.
\end{aligned}
$$

さらに以上の議論の εD_x を $\varepsilon D_x+\eta D_t$ で置き換え, $\varepsilon\eta$ の係数を比較すると

$$2\partial_x\partial_t\log f=\frac{D_xD_tf\cdot f}{f^2}.$$

これらの公式は KdV 方程式や KP 方程式を双線形形式に変形するときに使われる.

1.3 商の微分の表示公式

$e^{\varepsilon D_x}a\cdot b=a(x+\varepsilon)b(x-\varepsilon)$, $\cosh(\varepsilon D_x)b\cdot b=e^{\varepsilon D_x}b\cdot b=b(x+\varepsilon)b(x-\varepsilon)$, $e^{\varepsilon\partial_x}(a/b)=a(x+\varepsilon)/b(x+\varepsilon)$ より

$$e^{\varepsilon\partial_x}\frac{a}{b}=\frac{e^{\varepsilon D_x}a\cdot b}{\cosh(\varepsilon D_x)b\cdot b}.$$

右辺で $(1+X)^{-1} = 1 - X + X^2 - X^3 + \cdots$ を用い, 両辺を ε について展開して比較すると

$$
\begin{aligned}
\partial_x \frac{a}{b} &= \frac{D_x a \cdot b}{b^2}, \\
\partial_x^2 \frac{a}{b} &= \frac{D_x^2 a \cdot b}{b^2} - \frac{a}{b}\frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2}, \\
\partial_x^3 \frac{a}{b} &= \frac{D_x^3 a \cdot b}{b^2} - 3\frac{D_x a \cdot b}{b^2}\frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2}.
\end{aligned}
$$

このノートではこれらの公式を使わない.

2 KdV と KP の 2 次形式化

2.1 KdV 方程式

KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

で $u = v_{xx}$ とおくと

$$(v_{xt} + 3v_{xx}^2 + v_{xxxx})_x = 0.$$

さらに $v = 2\log f$ $(u = 2(\log f)_{xx})$ とおくと, 対数微分を D-operators で表示する公式より,

$$
\begin{aligned}
v_{xt} &= 2\partial_x\partial_t \log\tau = \frac{D_x D_t f \cdot f}{f^2}, \\
v_{xx}^2 &= (2\partial_x^2 \log f)^2 = \left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2}\right)^2, \\
v_{xxxx} &= 2\partial_x^4 \log f = \frac{D_x^4 f \cdot f}{f^2} - 3\left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

これを上の式に代入すると $(D_x^2 f \cdot f / f^2)^2$ の項が消えて

$$\left(\frac{D_x D_t f \cdot f + D_x^4 f \cdot f}{f^2}\right)_x = 0$$

となる. したがって次の方程式は KdV 方程式の十分条件になる:

$$(D_x D_t + D_x^4) f \cdot f = 0.$$

2.2 KP 方程式

KP 方程式

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x \pm u_{yy} = 0$$

で $u = v_{xx}$ とおくと

$$(v_{tx} + 3v_{xx}^2 + v_{xxxx} \pm v_{yy})_{xx} = 0.$$

さらに $v = 2\log f$ $(u = 2(\log f)_{xx})$ と置くと

$$
\begin{aligned}
v_{xt} &= 2\partial_x\partial_t \log\tau = \frac{D_xD_t f\cdot f}{f^2},\\
v_{xx}^2 &= (2\partial_x^2\log f)^2 = \left(\frac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}\right)^2,\\
v_{xxxx} &= 2\partial_x^4\log f = \frac{D_x^4 f\cdot f}{f^2} - 3\left(\frac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}\right)^2,\\
v_{yy} &= 2\partial_y^2\log f = \frac{D_y^2 f\cdot f}{f^2}.
\end{aligned}
$$

これを上の式に代入すると $(D_x^2 f\cdot f/f^2)^2$ の項が消えて

$$
\left(\frac{D_xD_t f\cdot f + D_x^4 f\cdot f \pm D_y^2 f\cdot f}{f^2}\right)_{xx} = 0
$$

となる．したがって次の方程式は KP 方程式の十分条件になる:

$$
(D_xD_t + D_x^4 \pm D_y^2) f\cdot f = 0.
$$

Kac-Raina [3] の第 7.5 節との関係は以下の通り．KP 方程式 (7.18) は次のように書き直される:

$$
\left(u_t - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx}\right)_x - \frac{3}{4}u_{yy} = 0
$$

$u = v_{xx}$ とおくとこれは次と同値である:

$$
(4v_{xt} - 3v_{xx}^2 - v_{xxxx} - 3v_{yy})_{xx} = 0
$$

さらに $v = 2\log\tau$ とおき, 対数微分の D-operators による表示公式を代入すると, $(D_x^2\tau\cdot\tau/\tau^2)^2$ の項が消えて

$$
\left(\frac{(4D_xD_t - D_x^4 - 3D_y^2)\tau\cdot\tau}{\tau^2}\right)_{xx} = 0
$$

となる．したがって次の方程式は KP 方程式 (7.18) の十分条件になる:

$$
(4D_xD_t - D_x^4 - 3D_y^2)\tau\cdot\tau = 0.
$$

これは p. 75 の最初の式に同値である．

参考文献

[1] 広田良吾, ソリトン理論における直接法 (2 次形式化法), 月刊フィジクス SYMPOSIUM 10: 続・数理物理学, 海洋出版, 1980.4.1, 279–285

[2] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店, 202 pages, 1992

[3] Kac, V. G. and Raina, A. K., Bombay Lectures on Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras, Advanced Series in Mathematical Physics Vol. 2, World Scientific, 1987, 145 pages.