Baker-Campbell-Hausdorffの公式の証明

黒木 玄

2008年10月10日(金)作成

以下の証明法を長谷川浩司さんから教わった.

補題 1 A は正方行列値函数であるとし, $F = e^A$ とおく. $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \frac{\log x}{x-1} = \frac{\log(1+(x-1))}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^{n-1}$$

とおくと

$$d\log F = \psi(\operatorname{Ad} F)(dF\cdot F^{-1}) = \psi(\operatorname{Ad} F^{-1})(F^{-1}dF).$$

証明. $e^A A = Ae^A$ の両辺に d を作用させると $d(e^A)A + e^A dA = dA\, e^A + Ad(e^A)$. よって

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} A)(d(e^A)) &= Ad(e^A) - d(e^A)A = e^A dA - dA\, e^A \\ &= (e^A dA\, e^{-A} - dA)e^A = (\operatorname{Ad} e^A - 1)(dA)e^A.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}d\log F = dA &= \frac{\operatorname{ad} A}{\operatorname{Ad} e^A - 1}(d(e^A)e^{-A}) \\ &= \frac{\log \operatorname{Ad} F}{\operatorname{Ad} F - 1}(dF\cdot F^{-1}) = \psi(\operatorname{Ad} F)(dF\cdot F^{-1}).\end{aligned}$$

上と同様にして

$$\begin{aligned}-(\operatorname{ad} A)(d(e^A)) &= d(e^A)A - Ad(e^A) = dA\, e^A - e^A dA \\ &= e^A(e^{-A}dA\, e^A - dA) = e^A(\operatorname{Ad} e^{-A} - 1)(dA).\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}d\log F = dA &= \frac{-\operatorname{ad} A}{\operatorname{Ad} e^{-A} - 1}(e^{-A}d(e^A)) \\ &= \frac{\log \operatorname{Ad} F^{-1}}{\operatorname{Ad} F^{-1} - 1}(F^{-1}dF) = \psi(\operatorname{Ad} F^{-1})(F^{-1}\cdot dF). \quad \square\end{aligned}$$

定理 2 (Baker-Campbell-Hausdorff) 正方行列 A, B に対して

$$Z_m(A,B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum \frac{\mathrm{ad}_A^{p_1}\,\mathrm{ad}_B^{q_1} \cdots \mathrm{ad}_A^{p_{n-1}}\,\mathrm{ad}_B^{q_{n-1}}(A)}{p_1!q_1!\cdots p_{n-1}!q_{n-1}!}$$

とおく．ここで二つ目の $\sum$ は非負の整数たち $p_1, q_1, \ldots, p_{n-1}, q_{n-1}$ で $\sum_{i=1}^{n-1}(p_i+q_i) = m-1$ かつ $p_i + q_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ をみたすもの全体を走る和を意味する．このとき

$$e^A e^B = \exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(Z_m(A,B) + (-1)^{m-1} Z_m(B,A)\right)\right].$$

証明. $\widetilde{F}(s,t) = e^{sA}e^{tB}$, $F(t) = \widetilde{F}(t,t) = e^{tA}e^{tB}$ とおく．$\log F(1) = \log(e^A e^B)$ を計算すればよい．そのために $\frac{d}{dt}\log F(t)$ を計算しよう．$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial s} = A\widetilde{F}$, $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t} = \widetilde{F}B$ と 補題 1 より

$$\frac{\partial}{\partial s}(\log \widetilde{F}) = \psi(\mathrm{Ad}\,\widetilde{F})\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial s}\widetilde{F}^{-1}\right) = \psi(\mathrm{Ad}\,\widetilde{F})(A),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\log \widetilde{F}) = \psi(\mathrm{Ad}\,\widetilde{F}^{-1})\left(\widetilde{F}^{-1}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial s}\right) = \psi(\mathrm{Ad}\,\widetilde{F}^{-1})(B).$$

よって

$$\frac{d}{dt}\log F = \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\log \widetilde{F}\right]_{s=t} = \psi(\mathrm{Ad}\,F)(A) + \psi(\mathrm{Ad}\,F^{-1})(B).$$

$\psi(x)$ の定義より

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{Ad}\,F)(A) &= \psi(e^{t\,\mathrm{ad}\,A}e^{t\,\mathrm{ad}\,B})(A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\sum_{p+q>0}\frac{t^{p+q}}{p!q!}\mathrm{ad}_A^p\,\mathrm{ad}_B^q\right)^{n-1}(A) = \sum_{m=1}^{\infty} t^{m-1} Z_m(A,B).\end{aligned}$$

この公式の A, B を交換し, t を $-t$ で置き換えることによって

$$\psi(\mathrm{Ad}\,F^{-1})(B) = \psi(e^{-t\,\mathrm{ad}\,B}e^{-t\,\mathrm{ad}\,A})(B) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}t^{m-1}Z_m(B,A).$$

したがって

$$\frac{d}{dt}\log F = \sum_{m=1}^{\infty} t^{m-1}\left(Z_m(A,B) + (-1)^{m-1}Z_m(B,A)\right).$$

$\log F(0) = 1$ を用いてこの式を積分すると

$$\log F(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m}\left(Z_m(A,B) + (-1)^{m-1}Z_m(B,A)\right).$$

これより $\log F(1)$ が定理の主張の通りの形になることがわかる． □