Fredholm 行列式

黒木 玄

2008 年 5 月 31 日 (土)

目 次

1 Fredholm 行列式とその応用

a, b は $a < b$ を満たす実数であるとし, 閉区間 $[a, b]$ 上の積分 $\int_a^b$ を $\int$ と省略して書くことにする.

$K(x, y)$ は $[a, b] \times [a, b]$ 上の複素数値連続函数であるとし, 核函数 $K(x, y)$ の積分作用素を K と書くことにする:

$$Kf(x) = \int K(x, y) f(y)\, dy.$$

複素数 λ に対する積分作用素 $1 - \lambda K$ について考えたい.

1.1 Fredholm 行列式, Fredholm 余因子, Fredholm 小行列式の導入

$[a, b]^{2n}$ 上の函数 $K\binom{x_1, \dots, x_n}{y_1, \dots, y_n}$ を次のように定める:

$$K\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) & \cdots & K(x_1, y_n) \\ K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) & \cdots & K(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K(x_n, y_1) & K(x_n, y_2) & \cdots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

Fredholm 行列式 $D(\lambda)$ と Fredholm 余因子 $D(x, y, \lambda)$ と m 次の Fredholm 小行列式 $D\binom{x_1, \dots, x_m}{y_1, \dots, y_m}(\lambda)$ を次のように定める:

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n A_n,$$

$$
\begin{aligned}
&D(x,y,\lambda) = K(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda)^n A_n(x,y),\\
&D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_m \\ y_1,\dots,y_m \end{pmatrix}(\lambda) = K\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_n \\ y_1,\dots,y_n \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda)^n A_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_m \\ y_1,\dots,y_m \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ここで A_n, $A_n(x,y)$, $A_n\binom{x_1,\dots,x_m}{y_1,\dots,y_m}$ は次のように定義される:

$$
\begin{aligned}
&A_n = \frac{1}{n!}\int\cdots\int K\begin{pmatrix} z_1,\dots,z_n \\ z_1,\dots,z_n \end{pmatrix} dz_1\cdots dz_n.\\
&A_n(x,y) = \frac{1}{n!}\int\cdots\int K\begin{pmatrix} x, z_1,\dots,z_n \\ y, z_1,\dots,z_n \end{pmatrix} dz_1\cdots dz_n,\\
&A_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_m \\ y_1,\dots,y_m \end{pmatrix} = \frac{1}{n!}\int\cdots\int K\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_m, z_1,\dots,z_n \\ y_1,\dots,y_m, z_1,\dots,z_n \end{pmatrix} dz_1\cdots dz_n.
\end{aligned}
$$

これらの収束半径が無限大であることを示そう. $K(x,y)$ は連続なのである正の定数 C が存在して $|K(x,y)| \leqq C$ $(x,y\in[a,b])$ が成立する. 一般に複素 n 次正方行列 A に対して, その第 j 列ベクトル a_j の Euclid ノルムを $||a_j||$ と書くと

$$
|\det A| \leqq ||a_1||\,||a_2||\,\cdots\,||a_n||
$$

が成立している (Hadamard の不等式). よって

$$
\left|K\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_n \\ y_1,\dots,y_n \end{pmatrix}\right| \leqq (\sqrt{n}C)^n = (n^n)^{1/2}\, C^n.
$$

よって

$$
\left|A_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_m \\ y_1,\dots,y_m \end{pmatrix}\right| \leqq \frac{1}{n!}|b-a|^n \left((m+n)^{(m+n)}\right)^{1/2} C^{m+n}.
$$

この不等式の右辺を a_n と書くと

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1}{n+1}|b-a|(m+n+1)^{1/2}\left(\left(\frac{m+n+1}{m+n}\right)^{m+n}\right)^{1/2} C\\
&= \frac{C|b-a|}{(n+1)^{1/2}}\left(1+\frac{m}{n+1}\right)^{1/2}\left(\left(1+\frac{1}{m+n}\right)^{m+n}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

ゆえに $n\to\infty$ で分母の $(n+1)^{1/2}$ が効いてきて $a_{n+1}/a_n \to 0$ となることがわかる. これで Fredholm 小行列式の収束半径が無限大になることがわかった. しかもその収束は x_i, y_j について一様なので Fredholm 小行列式は x_i, y_j の連続函数になることもわかる. Fredholm 行列式と Fredholm 余因子はこの特別の場合である.

1.2 $D(\lambda)\neq 0$ の場合

$D(\lambda)\neq 0$ のとき, 作用素 $1-\lambda K$ の逆作用素を Fredholm 行列式と Fredholm 余因子によって表示できることを示そう.

補題 1.1 核函数を $\Gamma(x,y,\lambda)$ とする積分作用素 $\Gamma(\lambda)$ が与えられたとき, 作用素 $1+\lambda\Gamma(\lambda)$ が $1-\lambda K$ の逆作用素であるための必要十分条件は次が成立することである:

$$\Gamma(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda \int K(x,z)\Gamma(z,y,\lambda)\,dz,$$
$$\Gamma(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda \int \Gamma(x,z,\lambda)K(z,y)\,dz.$$

証明. $1-\lambda K$ と $1+\lambda\Gamma(\lambda)$ の積を計算すると

$$(1-\lambda K)(1+\lambda\Gamma(\lambda)) = 1 - \lambda(K - \Gamma(\lambda) + \lambda K\Gamma(\lambda)),$$
$$(1-\lambda\Gamma(\lambda))(1+\lambda K) = 1 - \lambda(K - \Gamma(\lambda) + \lambda\Gamma(\lambda)K).$$

これより $1+\lambda\Gamma(\lambda)$ が $1-\lambda K$ の逆作用素であるための必要十分条件は

$$\Gamma(\lambda) = K + \lambda K\Gamma(\lambda) = K + \lambda\Gamma(\lambda)K$$

が成立することである. この条件を核函数の条件で書き直せば補題の条件になる. □

定理 1.2 $D(\lambda) \neq 0$ のとき積分作用素

$$(1-\lambda K)f(x) = f(x) - \lambda \int K(x,y)f(y)\,dy$$

は可逆であり, その逆作用素は次のように表わされる:

$$(1-\lambda K)^{-1}g(x) = g(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int D(x,y,\lambda)g(y)\,dy. \quad \square$$

証明. 行列式 $K\binom{x,z_1,\dots,z_n}{y,z_1,\dots,z_n}$ の第 1 行, 第 1 列に関する余因子展開によってそれぞれ以下の公式が得られる:

$$K\begin{pmatrix} x,z_1,\dots,z_n \\ y,z_1,\dots,z_n \end{pmatrix} = K(x,y)K\begin{pmatrix} z_1,\dots,z_n \\ z_1,\dots,z_n \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n K(x,z_i)K\begin{pmatrix} z_i,z_1,\dots,\widehat{z_i},\cdots,z_n \\ y,z_1,\dots,\widehat{z_i},\cdots,z_n \end{pmatrix},$$
$$K\begin{pmatrix} x,z_1,\dots,z_n \\ y,z_1,\dots,z_n \end{pmatrix} = K(x,y)K\begin{pmatrix} z_1,\dots,z_n \\ z_1,\dots,z_n \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n K\begin{pmatrix} x,z_1,\dots,\widehat{z_i},\cdots,z_n \\ z_i,z_1,\dots,\widehat{z_i},\cdots,z_n \end{pmatrix}K(z_i,y).$$

ここで $\widehat{z_i}$ は z_i を除くことを意味している. これらの式の両辺を $z_1,\dots,z_n$ で積分し $n!$ で割ることによって次の公式を得る:

$$A_n(x,y) = K(x,y)A_n - \int K(x,z)A_{n-1}(z,y)\,dz,$$
$$A_n(x,y) = K(x,y)A_n - \int A_{n-1}(x,z)K(z,y)\,dz.$$

これらの式の両辺に $(-\lambda)^n$ をかけて n について足し上げると次が得られる:

$$D(x,y,\lambda) = K(x,y)D(\lambda) + \lambda \int K(x,z)D(z,y,\lambda)\,dz,$$
$$D(x,y,\lambda) = K(x,y)D(\lambda) + \lambda \int D(x,z,\lambda)K(z,y)\,dz.$$

よって $D(\lambda) \neq 0$ のとき補題 1.1 より, 核函数

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{D(x, y, \lambda)}{D(\lambda)}$$

を持つ積分作用素を $\Gamma(\lambda)$ と書くと作用素 $1 + \lambda\Gamma(\lambda)$ が $1 - \lambda K$ の逆作用素になることがわかる. $\square$

系 1.3 $\varphi(x)$ に関する積分方程式

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y)\varphi(y)\, dy = 0$$

の非自明な解は $D(\lambda) \neq 0$ のとき存在しない. $\square$

以上の続きについては寺沢寛一著『自然科学者のための数学概論 [増訂版]』, 岩波書店 (1983) の pp.580–588 を参照せよ.

1.3 $D(\lambda)$ の導函数

1.4 $D(\lambda) = 0$ の場合