群の準同型定理

黒木 玄

2008 年 5 月 14 日 (火)

1　群と部分群と正規部分群

群とは集合 G と二項演算 $\cdot : G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto ab$ と G の元 $1 = 1_G \in G$ と単項演算 $(\ )^{-1} : G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$ の組 $(G, \cdot, 1, (\ )^{-1})$ で以下の条件を満たすもののことである: $a, b, c \in G$ に対して

$$(ab)c = a(bc), \quad 1a = a1 = 1, \quad a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$$

簡単のため群 $(G, \cdot, 1, (\ )^{-1})$ を単に群 G と呼ぶことにする. 以下 G は群であるとする.

群 G の部分集合 H が次の条件を満たすとき H は自然に群をなすので, H は G の部分群であると言う:

$$a, b \in H \implies ab \in H; \quad 1 \in H; \quad a \in H \implies a^{-1} \in H.$$

以下 H は G の部分群であるとする. 元 $a \in G$ で代表される左剰余類 aH を次のように定める:

$$aH = \{\, ah \mid h \in H \}.$$

このとき $a, b \in G$ に対して $aH = bH$ と $a^{-1}b \in H$ は同値である.

証明. $aH = bH$ のとき $b \in bH = aH$ なので, ある $h \in H$ が存在して $b = ah$. よって $a^{-1}b = h \in H$ である. 逆に $a^{-1}b \in H$ のとき, 任意の $h \in H$ に対して, $bh = aa^{-1}bh \in aH$, $ah = bb^{-1}ah = b(a^{-1}b)^{-1}h \in bH$ なので $bH \subset aH$, $aH \subset bH$ である. よって $aH = bH$ である. □

群 G の部分群 N が次の条件をみたすとき, N は G の正規部分群であると言う:

$$g \in G,\ n \in N \implies g^{-1}ng \in N.$$

以下 N は G の正規部分群であるとする. 集合 G/N を次のように定める:

$$G/N = \{\, aN \mid a \in G \}.$$

このとき G/N に二項演算 $\cdot$, 元 $1_{G/N}$, 単項演算 $(\ )^{-1}$ を次のように定めることができる: $a, b \in G$ に対して

$$aN \cdot bN = abN, \quad 1_{G/N} = 1N = N, \quad (aN)^{-1} = a^{-1}N.$$

証明. $\cdot$ と $(\ )^{-1}$ が well-defined であることを示せばよい.

$aN = a'N$, $bN = b'N$ のとき, $a^{-1}a', b^{-1}b' \in N$ である. N は正規部分群なので $b^{-1}a^{-1}a'b \in N$ であり, $(ab)^{-1}a'b' = b^{-1}a^{-1}a'b' = b^{-1}a^{-1}a'bb^{-1}b' \in N$. よって $abN = a'b'N$ である. これで二項演算 $\cdot$ が well-defined であることがわかった.

$aN = a'N$ のとき $a'^{-1}a \in N$ である. N は正規部分群なので $(a^{-1})^{-1}a'^{-1} = aa'^{-1} = aa'^{-1}aa^{-1} \in N$. よって $a^{-1}N = a'^{-1}N$ である. これで単項演算 $(\ )^{-1}$ が well-defined であることがわかった. □

上の定義によって G/N は群をなす. G/N を剰余群と呼ぶ.

証明. $a, b, c \in G$ に対して, $(aN \cdot bN)cN = abN \cdot cN = (ab)cN = a(bc)N = aN \cdot bcN = aN(bN \cdot cN)$., $1_{G/N}aN = 1N \cdot aN = 1aN = aN$, $aN1_{G/N} = aN \cdot 1N = a1N = aN$, $(aN)^{-1}aN = a^{-1}N \cdot aN = a^{-1}aN = 1N = 1_{G/N}$, $aN(aN)^{-1} = aN \cdot a^{-1}N = aa^{-1}N = 1N = 1_{G/N}$. □

2 群の準同型と準同型定理

以下 G, G' は群であるとする. 写像 $f : G \to G'$ が群の準同型であるとは以下の条件をみたすことである: $a, b \in G$ に対して

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

以下 $f : G \to G'$ は群の準同型であるとする. このとき次が成立する: $a \in G$ に対して

$$f(1) = 1, \quad f(a^{-1}) = f(a)^{-1}.$$

証明. $f(1)f(1) = f(11) = f(1)$ の両辺に $f(1)^{-1}$ をかけると $f(1) = 1$. $f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(1) = 1$ の両辺に右から $f(a)^{-1}$ をかけると $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. □

準同型 f が全単射であるときその逆写像 f^{-1} も準同型になる.

証明. $a', b' \in G'$ に対して $a'b' = f(f^{-1}(a'))f(f^{-1}(b')) = f(f^{-1}(a'))f^{-1}(b'))$ なので $f^{-1}(a'b') = f^{-1}(a'))f^{-1}(b')$. □

全単射準同型写像を同型写像と呼ぶ. G, G' のあいだに同型写像が存在するとき G と G' は同型であると言い, $G \cong G'$ と書く.

集合 $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ を次のように定める:

$$\mathrm{Im}\, f = \{\, f(a) \mid a \in G \,\}, \quad \mathrm{Ker}\, f = \{\, a \in G \mid f(a) = 1 \,\}.$$

このとき $\mathrm{Im}\, f$ は G' の部分群であり, $\mathrm{Ker}\, f$ は G の正規部分群である.

証明. $a, b \in G$ に対して $f(a)f(b) = f(ab) \in \mathrm{Im}\, f$, $1 = f(1) \in \mathrm{Im}\, f$, $f(a)^{-1} = f(a^{-1}) \in \mathrm{Im}\, f$. よって $\mathrm{Im}\, f$ は G' の部分群である.

$a, b \in \mathrm{Ker}\, f$, $g \in G$ に対して $f(ab) = f(a)f(b) = 11 = 1$, $f(1) = 1$, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1} = 1^{-1} = 1$ より $ab, 1, a^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f$ であり, $f(g^{-1}ag) = f(g)^{-1}f(a)f(g) = f(g)^{-1}1f(g) = 1$ より $g^{-1}ag \in \mathrm{Ker}\, f$. よって $\mathrm{Ker}\, f$ は G の正規部分群である. □

記号の簡単のため $N = \operatorname{Ker} f$ とおく.

写像 $\bar{f} : G/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ を次のように定めることができる: $a \in G$ に対して

$$\bar{f}(aN) = f(a).$$

証明. $a, b \in G$, $aN = bN$ と仮定する. このとき $a^{-1}b \in N = \operatorname{Ker} f$ であるから $1 = f(a^{-1}b) = f(a)^{-1}f(b)$. よって $f(a) = f(b)$. これで写像 $\bar{f}$ が well-defined であることが示された. □

写像 $\bar{f} : G/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ は群の同型写像である (準同型定理).

証明. 任意の $a, b \in G$ に対して $\bar{f}(aN \cdot bN) = \bar{f}(abN) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}(aN)\bar{f}(bN)$. よって $\bar{f}$ は群の準同型である.

任意の $a \in G$ に対して $f(a) = \bar{f}(aN) \in \operatorname{Im} \bar{f}$ なので $\bar{f}$ は全射である.

任意の $a, b \in G$ について $\bar{f}(aN) = \bar{f}(bN)$ ならば $f(a) = f(b)$, $f(a^{-1}b) = f(a)^{-1}f(b) = f(a)^{-1}f(a) = 1$, $a^{-1}b \in \operatorname{Ker} f = N$ なので $aN = bN$ である. よって $\bar{f}$ は単射である. □

3 例

例 3.1 $GL_n(\mathbb{C}) = \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0 \,\}$ は行列の積に関して自然に群をなす. $\mathbb{C}^\times = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \,\}$ は乗法に関して自然に群をなす. 行列式を取る写像 $\det : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ は群の全射準同型である. $SL_n(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker}(\det : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times)$ とおくと, $SL_n(\mathbb{C})$ は $GL_n(\mathbb{C})$ の正規部分群である. 準同型定理より群の同型 $GL_n(\mathbb{C})/SL_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$ が成立している. □

例 3.2 $B = \{\, A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ は上三角行列} \,\}$, $T = \{\, A \in B \mid A \text{ は対角行列} \,\}$, $U = \{\, A \in B \mid A \text{ は対角成分がすべて } 1 \,\}$ とおく. このとき B は $GL_n(\mathbb{C})$ の部分群であり, T, U はその部分群である. 写像 $f : B \to T$ を $A \in B$ に対して $f(A) = (A$ の対角成分$) = (A$ の非対角成分を 0 に置き換えたもの$)$ と定める. このとき f は群の全射準同型写像になり, $\operatorname{Ker} f = U$ である. よって群の同型 $B/U \cong T$ が成立している.

$n \geqq 2$ ならば T は B の正規部分群ではない. □