Associated graded algebra, Rees algebra, and classical limit algebra

黒木 玄

2007年10月4日

目 次

1 Associated graded algebra

A は基礎体 $\mathbb{F}$ 上の associative algebra ($\mathbb{F}$-algebra) であるとする. A の $\mathbb{F}$ 部分空間の族 $\{F_iA\}_{i=0}^{\infty}$ が $1 \in F_0A$, $F_iA \subset F_{i+1}A$, $F_iA\,F_jA \subset F_{i+j}A$, $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_iA = A$ を満たしているとき, $\{F_iA\}_{i=0}^{\infty}$ は A の filtration であると言い, A と $\{F_iA\}_{i=0}^{\infty}$ の組を filtererd algebra と呼ぶ. $\{F_iA\}_{i=0}^{\infty}$ は A の filtration であるとする. 負の i に対して $F_iA = 0$ とおく.

$\operatorname{gr}_i A = F_iA/F_{i+1}F$ とおき, F_iA から $\operatorname{gr}_i A$ への自然な射影を σ_i と書く. $a \in F_iA \setminus F_{i-1}A$ に対して, $\sigma_i(a) \in \operatorname{gr}_i A$ を a の symbol と呼ぶ. $\operatorname{gr} A = \bigoplus_{i=0}^{\infty}$ とおく. $\operatorname{gr} A$ には $\sigma_i(a)\sigma_j(b) = \sigma_{i+j}(ab)$ ($a \in F_iA$, $b \in F_jA$) によって自然に環構造が入り, $\operatorname{gr} A$ は $\mathbb{F}$ 上の associative algebra になる. このとき $\operatorname{gr}_i A\, \operatorname{gr}_j A \subset \operatorname{gr}_{i+j} A$ が成立するので, $\operatorname{gr} A$ は graded algebra である. $\operatorname{gr} A$ を filtered algebra A の associated graded algebra と呼ぶ.

交換子を $[a, b] = ab - ba$ と定める. A が $[F_iA, F_jA] \subset F_{i+j-1}A$ を満たしているとき, A は quasi-commutative であると言う. A が quasi-commutative であることは $\operatorname{gr} A$ が commutative であることと同値である.

A は quasi-commutative であるとする. このとき $\operatorname{gr} A$ には $\{\sigma_i(a), \sigma_j(b)\} = \sigma_{i+j-1}([a, b])$ ($a \in F_iA$, $b \in F_jA$) によって Poisson algebra の構造が入る. よって quasi-commutative filtered algebra A に対して, graded Poisson algebra $\operatorname{gr} A$ が自然に対応している.

2 Classical limit algebra

Planck constant と呼ばれる不定元 $\hbar$ から生成される基礎体 $\mathbb{F}$ 上の一変数多項式環 $\mathbb{F}[\hbar]$ を考え, $\mathcal{A}$ は $\mathbb{F}[\hbar]$-algebra ($\mathbb{F}[\hbar]$ 上の associative algebra) であるとする. このとき $\mathbb{F}$-algebra $\mathcal{A}_{\hbar=0}$ が $\mathcal{A}_{\hbar=0} = \mathcal{A}/\hbar\mathcal{A}$ によって定義される. $\mathcal{A}_{\hbar=0}$ を $\mathbb{F}[\hbar]$-algebra $\mathcal{A}$ の classical limit と呼ぶ.

$\mathcal{A}$ が quasi-commutative であるとは任意の $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $[a, b] \in \hbar\mathcal{A}$ が成立することである. $\mathcal{A}$ が quasi-commutative であることと $\mathcal{A}_{\hbar=0}$ が commutative であることは同値である.

$\mathcal{A}$ は quasi-commutative であるとする. このとき $\mathcal{A}_{\hbar=0}$ には $\{a \bmod \hbar\mathcal{A}, b \bmod \hbar\mathcal{A}\} = \hbar^{-1}[a, b] \bmod \hbar\mathcal{A}$ $(a, b \in \mathcal{A})$ によって Poisson algebra の構造が入る. よって quasi-commutative $\mathbb{F}[\hbar]$-algebra $\mathcal{A}$ に対して, Poisson algebra $\mathcal{A}_{\hbar=0}$ が自然に対応している.

3 Rees algebra

A は基礎体 $\mathbb{F}$ 上の filtered algebra であるとする. $\mathcal{R}A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \hbar^i F_i A$ と置く. $\mathcal{R}A$ には $(\hbar^i a)(\hbar^j b) = \hbar^{i+j} ab \in \hbar^{i+j} F_{i+j} A$ $(a \in F_i A,\ b \in F_j A)$, $\hbar(\hbar^i a) = \hbar^{i+1} a \in \hbar^{i+1} F_{i+1} A$ $(a \in F_i A)$ によって自然に $\mathbb{F}[\hbar]$ 上の graded algebra の構造が入る. $\mathcal{R}A$ を A の Rees algebra と呼ぶ. $\mathcal{R}A$ は $\hbar^i a$ $(a \in F_i A)$ から生成される $\mathbb{F}[\hbar] \otimes A$ の $\mathbb{F}[\hbar]$-subalgebra と同一視される.

このとき, graded $\mathbb{F}$-algebras としての同型 $\operatorname{gr} A \cong (\mathcal{R}A)_{\hbar=0}$ を $\sigma_i(a) \leftrightarrow \hbar^i a \bmod \hbar\mathcal{R}A$ $(a \in F_i A)$ によって定めることができる[1]. すなわち Rees algebra $\mathcal{R}A$ の classical limit は $\operatorname{gr} A$ と同一視できる.

このことから, filtered algebra A に対して, $\operatorname{gr} A$ が commutative であること, A が filtered algebra として quasi-commutative であること, $\mathcal{R}A$ が $\mathbb{F}[\hbar]$-algebra として quasi-commutative であることは互いに同値であることがわかる.

A が quasi-commutative ならば上の同型 $\operatorname{gr} A \cong (\mathcal{R}A)_{\hbar=0}$ は Poisson algebra としての同型にもなっている.

4 Weyl 代数の場合

基礎体 $\mathbb{F}$ は標数 0 であるとする. W_n は $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ から生成される $\mathbb{F}$-algebra で定義基本関係式 $[x_i, x_j] = [\partial_i, \partial_j] = 0$, $[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}$ を持つとする. W_n は Weyl algebra と呼ばれる. W_n は自然に左 $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ 加群としての自由基底 $\partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n}$ $(i_\nu \in \mathbb{Z}_{\geqq 0})$ を持つ.

$F_i W_n$ を $\{\, \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n} \mid i_1 + \cdots + i_n \leqq i \,\}$ で $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ 上張られる W_n の部分空間であるとする. このとき $\{F_i W_n\}_{i=0}^{\infty}$ は W_n の filtration であり, W_n は quasi-commutative filtererd algebra とみなされる.

このとき W_n の Rees algebra $\mathcal{R}W_n = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \hbar^i F_i W_n$ は $x_1, \dots, x_n$, $\hbar\partial_1, \dots, \hbar\partial_n$ から生成される $\mathbb{F}[\hbar] \otimes W_n$ の $\mathbb{F}[\hbar]$-subalgebra $\mathcal{W}_n$ と自然に同一視される.

[1] $a \in F_i A \setminus F_{i-1} A$ のとき $j < i$ ならば $\hbar^j a \notin \mathcal{R}A$ であることに注意せよ.

$p_i = \hbar\partial_i$ とおく. $\mathcal{W}_n$ の classical limit $\mathcal{W}_{n.\hbar=0} = \mathrm{gr}\, W_n$ は $\bar{x}_i = x_i \bmod \hbar\mathcal{W}_n = \sigma_0(x_i)$, $\bar{p}_i = p_i \bmod \hbar\mathcal{W}_n = \sigma_1(\partial_i)$ から生成される $\mathbb{F}$ 上の多項式環になる.

$\mathcal{W}_n$ において canonical commutation relations $[p_i, x_j] = \hbar\delta_{ij}$ が成立している[2]. よって $\mathcal{W}_n$ の classical limit $\mathcal{W}_{n,\hbar=0} = \mathrm{gr}\, W_n$ における Poisson bracket は条件 $\{\bar{p}_i, \bar{x}_i\} = \delta_{ij}$ で定義される.

5 Lie 代数の universal enveloping algebra の場合

$\mathfrak{g}$ は体 $\mathbb{F}$ 上の Lie 代数であるとする. $\mathfrak{g}$ から生成される $\mathbb{F}$-algebra で $XY - YX = [X, Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ を定義基本関係式に持つものを $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra と呼び, $U(\mathfrak{g})$ と表わす.

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ はその基底であるとし, Λ は全順序集合であるとする. Poincaré-Birkhoff-Witt の定理より, $U(\mathfrak{g})$ の基底として $X_{\lambda_1}\cdots X_{\lambda_N}$ $(\lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_N,\ \lambda_\nu \in \Lambda)$ が取れる. ($N = 0$ のとき $X_{\lambda_1}\cdots X_{\lambda_N} = 1$ とみなす.)

$F_iU(\mathfrak{g})$ は $X_{\lambda_1}\cdots X_{\lambda_N}$ $(\lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_N,\ N \leqq i)$ で張られる $U(\mathfrak{g})$ の部分空間であるとする. このとき $\{F_iU(\mathfrak{g})\}_{i=0}^\infty$ は $U(\mathfrak{g})$ の filtration であり, $U(\mathfrak{g})$ は quasi-commutative filtered algebra とみなされる.

このとき $U(\mathfrak{g})$ の Rees algebra $\mathcal{R}U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=0}^\infty \hbar^i F_iU(\mathfrak{g})$ は $\hbar X$ $(X \in \mathfrak{g})$ から生成される $\mathbb{F}[\hbar] \otimes U(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{F}[\hbar]$-subalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ と自然に同一視される.

$X \in \mathfrak{g}$ に対して $X_\hbar = \hbar X$ とおく. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の classical limit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{\hbar=0} = \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ は $\overline{X} = X_\hbar \bmod \hbar\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \sigma_1(X)$ $(X \in \mathfrak{g})$ から生成される $\mathbb{F}$ 上の多項式環になる.

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ は $X_\hbar$ $(X \in \mathfrak{g})$ で生成される $\mathbb{F}[\hbar]$-algebra であり, 定義基本関係式 $[X_\hbar, Y_\hbar] = \hbar[X, Y]_\hbar$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ を持つ. よって $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の classical limit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{\hbar=0} = \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ における Poisson bracket は条件 $\{\overline{X}, \overline{Y}\} = \overline{[X, Y]}$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ で定義される.

[2] 物理学における通常の流儀に合わせるためには $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ と仮定し, $\hbar$ を $-i\hbar$ (i は虚数単位) で置き換えなければいけない.