

非可換環の局所化の演習問題

黒木 玄 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

2007年02月16日更新 (2006年5月19日作成)

目次

1	非可換環の積閉集合による局所化	1
1.1	はじめに	1
1.2	左分母条件に基づいた非可換環の局所化	2
1.3	Ore 整域	8
1.4	左分母条件の十分条件	9
2	追記 (2007年2月16日)	10

1 非可換環の積閉集合による局所化

1.1 はじめに

可換環とその積閉集合から商環を作る操作 (この操作一般を局所化と呼ぶことが多い) は算数で習う分数の計算の直接的な一般化である。

積閉集合による局所化は任意の非可換環に対して一般化できる。しかし非可換環の局所化は一般に可換環よりもかなり複雑になる (たとえば谷崎 [T] 定理 1.31)。非可換の場合には可換の場合と違って分数の集合で商環を構成できるとは限らない。さらに非可換性より、たとえ分数の集合で商環を構成できたとしても、分母を左に置いた分数 $s^{-1}a$ と分母を右に置いた分数 as^{-1} を区別しなければいけない。

谷崎 [T] §1.5 では積閉集合が左分母条件を満たしているとき分母を左においた分数の集合として商環を構成できることが解説されている。

非可換環の局所化は線形微分方程式の代数解析 (超局所解析, D 加群の理論), Lie 代数の理論, 量子群の理論などで基本的である。導来圏 (derived category) の構成でも左右の分母条件に基づいた非可換環の局所化と同様の操作を行なう。導来圏の理論は可換環上の加群の理論で必要になるので、結果的に非可換環の局所化の理論 (の加法圏への一般化) が必要になる。

線形微分方程式の代数解析への応用については谷崎 [T] およびその参考文献欄を見よ。導来圏の構成については Gelfand–Manin [GM1] Chapter III, [GM2] Chapter 4 を見よ。(日本語で読みたければたとえばイヴァセン [I] 第 XI 章を見よ)。Gelfand–Manin [GM1] p.147, 6. Definition の条件 b), c) と (もしくは [GM2] pp.89–90 の 1.7. Definition の条件

b, c もしくはイヴァセン [I] 第 XI 章における加法圏 \mathcal{K} の乗法系 S に関する条件 FR2, FR3 と) 谷崎 [T] §1.5, p.24 における (可換とは限らない) 環 A の積閉集合 S に関する左分母条件 (i), (ii) を比較してみよ. Lie 代数や量子群への応用に知りたければ筆者に直接相談して欲しい.

小学生のときに習う分数の考え方は基本的であり, 可換環論, 非可換環論, 線形微分方程式の代数解析, 導来圏の構成などなどで使われている. 算数で習った基礎的な考え方はどこまで行っても有用である.

1.2 左分母条件に基づいた非可換環の局所化

[1] (左分母条件に基づいた非可換環の局所化, 40 点) A は (可換とは限らない) 環であるとし, S はその部分集合であり, 以下の条件を満たしていると仮定する:

- (a) $1 \in S$ かつ S は乗法で閉じている ($s, s' \in S$ ならば $ss' \in S$).
- (b) 任意の $a \in A, s \in S$ に対してある $a' \in A, s' \in S$ で $s'a = a's$ を満たすものが存在する.
- (c) $a \in A, s \in S$ が $as = 0$ を満たしているならばある $s' \in S$ で $s'a = 0$ を満たすものが存在する.

S が条件 (a) を満たしているとき S を A の積閉集合と呼ぶ. 条件 (b), (c) を左分母条件と呼ぶことにする ([T], p.24). 最後の条件 (c) は次の条件 (c') と同値である:

- (c') $a, a' \in A, s \in S$ が $as = a's$ を満たしているならばある $s' \in S$ で $s'a = s'a'$ を満たすものが存在する.

以上の仮定のもとで以下が成立することを示せ:

1. 任意の $s_1, \dots, s_n \in S$ に対してある $a_1, \dots, a_n \in A$ で $a_1s_1 = \dots = a_ns_n \in S$ を満たすものが存在する.
2. $a_i, b_i \in A, s_i \in S$ が $a_is_i = b_is_i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たしているならばある $s' \in S$ で $s'a_i = s'b_i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすものが存在する.
3. $S \times A$ に二項関係 \sim を次のように定める:

$$(s, a) \sim (s', a')$$

\iff ある $c, c' \in A$ で $cs = c's' \in S$ かつ $ca = c'a'$ を満たすものが存在する.

このとき \sim は $S \times A$ の同値関係である. 集合として $S^{-1}A = S \times A / \sim$ と定め, $(s, a) \in S \times A$ で代表される $S^{-1}A$ の元を $s \setminus a$ と書くことにする.

4. 集合 $S^{-1}A$ に乗法と加法を次の条件によって定めることができる:

$$\begin{aligned} (s \setminus a)(s' \setminus a') &= (s'' \setminus s) \setminus (a'' \setminus a'), & s''a &= a''s', & s'' \in S, & a'' \in A, \\ s \setminus a + s' \setminus a' &= s'' \setminus (ca + c'a'), & s'' &= cs = c's' \in S, & c, c' \in A. \end{aligned}$$

これによって $S^{-1}A$ は (可換とは限らない) 環になる.

5. 写像 $i_s : A \rightarrow S^{-1}A$ を $i_s(a) = 1 \setminus a$ ($a \in A$) と定めると i_s は環の準同型になり, 任意の $s \in S$ に対して $i_s(a)$ は $S^{-1}A$ の可逆元になる.
6. $\text{Ker } i_s = \{a \in A \mid \text{ある } s \in S \text{ で } sa = 0 \text{ となるものが存在する}\}$.
7. S が零因子を含まなければ i_s は単射なので, $a \in A$ と $a/1 \in S^{-1}R$ を同一視して, A を $S^{-1}A$ の部分環とみなせる. そのとき $a \in A, s \in S$ に対して $s \setminus a = s^{-1}a$ である. \square

この問題に関しては黒板での詳細な証明の発表はおそらく無理. 容易だが長い議論がだらだら続く. 問題 [1] をいきなり解き始めるより, 問題 [2] を最初に解こうとした方が左分母条件や加法と乗法の定義の意味がつかみ易いと思う.

ヒント. 以下の証明で省略されている部分を埋めよ. (より単純な証明に書き変える余地も残っているように思われる.)

1. n に関する帰納法. $n = 1$ のとき $a_1 = 1$ が条件を満たしている. n まで成立していると仮定し, $s_1, \dots, s_{n+1} \in S$ であるとする. 仮定よりある $a'_1, \dots, a'_n \in A$ で $a := a'_1 s_1 = \dots = a'_n s_n \in S$ を満たすものが存在する. この a と $s = s_{n+1}$ に (b) を適用するとある $a' \in A, s' \in S$ で $s'' := s' a'_1 s_1 = \dots = s' a'_n s_n = a' s_{n+1}$ を満たすものが存在することがわかる. (a) より $s'' \in S$ である. したがって $a_1 = s' a'_1, \dots, a_n = s' a'_n, a_{n+1} = a'$ と置けば $n+1$ の場合も成立することがわかる.

2. n に関する帰納法. $n = 1$ のとき (c') より成立している. n まで成立していると仮定し, $a_i, b_i \in A, s_i \in S, a_i s_i = b_i s_i$ ($i = 1, \dots, n+1$) であるとする. 仮定よりある $s' \in S$ で $s' a_i = s' b_i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすものが存在する. (c') よりある $s'' \in S$ で $s'' a_{n+1} = s'' b_{n+1}$ を満たすものが存在する. 1の $n = 2$ の場合より, ある $c', c'' \in A$ で $c' s' = c'' s'' \in S$ を満たすものが存在する. よって $s''' = c' s' = c'' s'' \in S$ と置けば $s''' a_i = s''' b_i$ ($i = 1, \dots, n, n+1$).

3. 推移律以外は易しい. 推移律を示すために $a, a', a'' \in A, s, s', s'' \in S$ が $(s, a) \sim (s', a')$, $(s', a') \sim (s'', a'')$ を満たしていると仮定する. このときある $c, c', d', d'' \in A$ で $ca = c' a', s_1 := cs = c' s' \in S, d' a' = d'' a'', s_2 := d' s' = d'' s'' \in S$ を満たすものが存在する. s_1, s_2 に対する 1 より, ある $a_1, a_2 \in A$ で $a_1 c s = a_1 c' s' = a_2 d' s' = a_2 d'' s'' \in S$ を満たすものが存在する. $a_1 c s' = a_2 d' s'$ を $(a_1 c - a_2 d') s' = 0$ と書き直して (c) を使えばある $t \in S$ で $ta_1 c = ta_2 d'$ を満たすものが存在することがわかる. (a) より $ta_1 c s = ta_1 c' s' = ta_2 d' s' = ta_2 d'' s'' \in S$ である. このとき $ta_1 c a = ta_1 c' a' = ta_2 d' a' = ta_2 d'' a''$ である. したがって $(s, a) \sim (s'', a'')$ である.

小問 3 で定義した記号のもとで, 小問 1 の結果は複数の分数 $s_1 \setminus a_1, \dots, s_n \setminus a_n$ の通分可能性を意味していることに注意せよ.

4. 加法と乗法が well-defined であることとそれらが環の公理を満たしていることを証明しなければいけない. 面倒なのは well-definedness の証明である.

4.1. 乗法が well-defined であることを示そう.

4.1.1. (b) より任意の $a, a' \in A, s, s' \in S$ に対してある $s'' \in S, a'' \in A$ が存在して $s'' a = a'' s'$.

4.1.2. $(s'' s) \setminus (a'' a')$ が s'', a'' の取り方によらないこと. $s''_i a = a''_i s', s''_i \in S, a''_i \in A$ と仮定する. 1 よりある $b_1, b_2 \in A$ が存在して $b_1 s''_1 = b_2 s''_2 \in S$. このとき $b_1 a''_1 s' = b_1 s''_1 a = b_2 s''_2 a = b_2 a_2 a'$. よって (c') よりある $t \in S$ が存在して $tb_1 a''_1 = tb_2 a''_2$. このとき $tb_1 s''_1 s = tb_2 s_2 s \in S, tb_1 a''_1 a = tb_2 a''_2 a$. したがって $(s''_1 s) \setminus (a''_1 a') = (s''_2 s) \setminus (a''_2 a')$.

4.1.3. $c \in A, cs \in S$ のとき (s, a) を (cs, ca) で置き換えても $(s''s) \setminus (a''a')$ が変わらないこと. $s''a = a''s', tca = bs', s'', t \in S, a'', b \in A$ のとき $(tcs) \setminus (ba') \sim (s''s) \setminus (a''a')$ を示せばよい. c, s'' に関する (b) より, ある $t' \in S, b' \in A$ が存在して $t'c = b's''$. t, t' に関する (b) より, ある $t'' \in S, b'' \in A$ が存在して $t''t = b''t'$. このとき $t''bs' = t''tca = b''t'ca = b''b's''a = b''b'a''s'$. よって (c') より, ある $t''' \in S$ が存在して $t'''t''b = t'''b''b'a''$. このとき $S \ni t'''t''tcs = t'''b''b's''s, t'''t''ba' = t'''b''b'a''a'$. したがって $(tcs) \setminus (ba') \sim (s''s) \setminus (a''a')$.

4.1.4. $(s''s) \setminus (a''a')$ が $s \setminus a$ の代表元の取り方によらないこと. $(s_1, a_1) \sim (s_2, a_2), s_i \in S, a_i \in A$ とする. そのときある $c_1, c_2 \in A$ が存在して $t := c_1s_1 = c_2s_2 \in S, b := c_1a_1 = c_2a_2$. b, s' に関する (b) より, ある $t' \in S, b' \in A$ が存在して $t'b = b's'$. 4.1.3 より $(s''_1s_1, a''_1a'_1) \sim (t't, b'a')$.

4.1.5. $c' \in A, c's' \in S$ のとき (s', a') を $(c's', c'a')$ で置き換えても $(s''s) \setminus (a''a')$ が変わらないこと. $s''a = a''s', ta = bc's', s'', t \in S, a'', b \in A$ のとき $(ts, bc'a') \sim (s''s, a''a')$ を示せばよい. s'', t に関する (b) よりある $t' \in S, b' \in A$ が存在して $t's'' = b't$. このとき $b'bc's' = b'ta = t's''a = t'a''s'$. よって (c') より, ある $t'' \in S$ が存在して $t''b'bc' = t''t'a''$. このとき $t''b'ts = t''t's''s \in S, t''b'bc'a' = t''t'a''a'$. したがって $(ts, bc'a') \sim (s''s, a''a')$.

4.1.6. $(s''s) \setminus (a''a')$ が $s' \setminus a'$ の代表元の取り方によらないこと. $(s'_1, a'_1) \sim (s'_2, a'_2), s'_i \in S, a'_i \in A$ とする. そのときある $c'_1, c'_2 \in A$ が存在して $t := c'_1s'_1 = c'_2s'_2 \in S, b := c'_1a'_1 = c'_2a'_2$. $s''_i a = a''_i s'_i, s''_i \in S, a''_i \in A$ と仮定して, $(s''_1s, a''_1a'_1) \sim (s''_2s, a''_2a'_2)$ を示せばよい. a, t に関する (b) より, ある $t' \in S, b' \in A$ が存在して $t'a = b't$. 4.1.5 より $(s''_1s, a''_1a'_1) \sim (t's'', b'b) \sim (s''_2s, a''_2a'_2)$.

4.1.7. $(s''s) \setminus (a''a')$ が $s \setminus a$ と $s' \setminus a'$ の代表元の取り方によらないこと. $(s_1, a_1) \sim (s_2, a_2), (s'_1, a'_1) \sim (s'_2, a'_2), s''_{ij}a_i = a''_{ij}s'_j, s_i, s'_j, s''_{ij} \in S, a_i, a'_j, a''_{ij} \in A$ とする. 4.1.4, 4.1.6 より $(s''_{11}s_1, a''_{11}a'_1) \sim (s''_{21}s_2, a''_{21}a'_1) \sim (s''_{22}s_2, a''_{22}a'_2)$.

以上によって乗法が well-defined であることがわかった.

4.2. 加法が well-defined であることを示そう.

4.2.1. 2 より任意の $a, a' \in A, s, s' \in S$ に対してある c, c' が存在して $s'' := cs = c's' \in S$.

4.2.2. $s'' \setminus (ca + c'a')$ が c, c' の取り方によらないこと. $s''_i := c_i s = c'_i s' \in S, c_i, c'_i \in A$ とする. s''_1, s''_2 に関する 2 より, ある $b_1, b_2 \in A$ が存在して $b_1s''_1 = b_2s''_2 \in S$. このとき $b_1c_1s = b_1c'_1s' = b_2c_2s = b_2c'_2s'$. よって 2 の $n = 2$ の場合より, ある $t \in S$ が存在して $tb_1c_1 = tb_2c_2, tb_1c'_1 = tb_2c'_2$. このとき $tb_1s''_1 = tb_2s''_2 \in S, tb_1(c_1a + c'_1a') = tb_1c_1a + tb_1c'_1a' = tb_2c_2a + tb_2c'_2a' = tb_2(c_2a + c'_2a')$. したがって $(s''_1, c_1a + c'_1a') \sim (s''_2, c_2a + c'_2a')$.

4.2.3. $s'' \setminus (ca + c'a')$ が $s \setminus a$ の代表元の取り方によらないこと. $(s_1, a_1) \sim (s_2, a_2), s_i \in S, a_i \in A$ とする. そのときある $d_1, d_2 \in A$ が存在して $t := d_1s_1 = d_2s_2 \in S, d_1a_1 = d_2a_2$. $s''_i := c_i s_i = c'_i s', c_i, c'_i \in A$ とする. t, s''_1, s''_2 に関する 2 より, ある $b, b_1, b_2 \in A$ が存在して $bt = b_1s''_1 = b_2s''_2 \in S$. このとき $bd_1s_1 = td_2s_2 = b_1c_1s_1 = b_1c'_1s' = b_2c_2s_2 = b_2c'_2s'$. よって 2 の $n = 3$ の場合より, ある $t' \in S$ が存在して $t'bd_1 = t'b_1c_1, t'td_2 = t'b_2c_2, t'b_1c'_1 = t'b_2c'_2$. このとき $t'b_1s''_1 = t'b_2s''_2 \in S, t'b_1c_1a_1 = t'bd_1a_1 = t'bd_2a_2 = t'b_2c_2a_2, t'b_1(c_1a_1 + c'_1a') = t'b_1c_1a_1 + t'b_1c'_1a' = t'b_2c_2a_2 + t'b_2c'_2a' = t'b_2(c_2a_2 + c'_2a')$. したがって $(s''_1, c_1a_1 + c'_1a') \sim (s''_2, c_2a_2 + c'_2a')$.

4.2.4. $s'' \setminus (ca + c'a')$ が $s' \setminus a'$ の代表元の取り方によらないことも 4.2.3 と同様にして (もしくは 4.2.3 の結果を用いて) 示される.

4.2.5. $s'' \setminus (ca + c'a')$ が $s \setminus a$ と $s' \setminus a'$ の代表元の取り方によらないこと. $(s_1, a_1) \sim (s_2, a_2), (s'_1, a'_1) \sim (s'_2, a'_2), s''_{ij} := c_{ij}s_i = c'_{ij}s'_j \in S, s_i, s'_j \in S, a_i, a'_j, c_{ij}, c'_{ij} \in A$ とする. 4.2.3,

4.2.4 より $(s''_{11}, c_{11}a_1 + c'_{11}a'_1) \sim (s''_{21}, c_{21}a_2 + c'_{21}a'_1) \sim (s''_{22}, c_{22}a_2 + c'_{22}a'_2)$.

以上によって加法が well-defined であることがわかった.

4.3. 乗法が加法が環の公理を満たしていることを示そう. $s, s', s'' \in S, a, a', a'' \in A$ とする.

4.3.1. 乗法の結合法則. (b) を a', s'' に適用するとある $t \in S, b \in A$ が存在して $ta' = bs''$. (b) を a, ts' に適用するとある $t' \in S, b' \in A$ が存在して $t'a = b'ts'$. そのとき

$$\begin{aligned} (s \setminus a)((s' \setminus a')(s'' \setminus a'')) &= (s \setminus a)((ts') \setminus (ba'')) = (t's) \setminus (b'ba'') \\ ((s \setminus a)(s' \setminus a'))(s'' \setminus a'') &= ((t's) \setminus (b'ta'))(s'' \setminus a'') = ((t's) \setminus (b'bs''))(s'' \setminus a'') = (t's) \setminus (b'ba'') \end{aligned}$$

ここで後者の計算では, 1 番目の等号では $t'a = b'ts'$ を, 2 番目の等号では $ta' = bs''$ を, 3 番目の等号では $1(b'bs'') = (b'b)s''$ を使った. したがって $((s \setminus a)(s' \setminus a'))(s'' \setminus a'') = (s \setminus a)((s' \setminus a')(s'' \setminus a''))$.

4.3.2. $1 \setminus 1$ が乗法の単位元になっていること. $s1 = 1s, s \in S, 1 \in A$ であるから $(1 \setminus 1)(s \setminus a) = (s1) \setminus (1a) = s \setminus a$. $1a = a1, 1 \in S, a \in A$ であるから $(s \setminus a)(1 \setminus 1) = (1s) \setminus (a1) = s \setminus a$.

4.3.3. 加法の結合法則. s, s', s'' に関する 2 の $n = 3$ の場合より, ある $c, c' \in A$ が存在して $s''' := cs = c's' = c''s'' \in S$. よって $((s \setminus a) + (s' \setminus a')) + (s'' \setminus a'') = (s''', ca + c'a' + c''a'') = (s \setminus a) + ((s' \setminus a') + (s'' \setminus a''))$.

4.3.4. 加法の可換性. $s'' := cs = c's' \in S, c, c' \in A$ とすると, $(s \setminus a) + (s' \setminus a') = s'' \setminus (ca + c'a') = s'' \setminus (c'a' + ca) = (s' \setminus a') + (s \setminus a)$.

4.3.5. $1 \setminus 0$ が零元になっていること. $s = s1 = 1s$ より $(1 \setminus 0) + (s \setminus a) = s \setminus (s0 + 1a) = s \setminus a$.

4.3.6. $s \setminus (-a)$ が加法に関する $s \setminus a$ の逆元になっていること. $s = s1, 0 = s0$ より $s \setminus 0 = 1 \setminus 0$ である. よって $s \setminus (-a) + s \setminus a = s \setminus (a - a) = s \setminus 0 = 1 \setminus 0$.

4.3.7. 分配法則. $t = cs = c's' \in S, ua'' = a'''t, u \in S, c, c', a''' \in A$ とすると

$$\begin{aligned} (s'' \setminus a'')((s \setminus a) + (s' \setminus a')) &= (s'' \setminus a'')(t \setminus (ca + c'a')) = (us''') \setminus (a'''(ca + c'a')) \\ &= (us''') \setminus (a'''ca + a'''c'a') = (us''') \setminus (a'''ca) + (us''') \setminus (a'''c'a') \\ &= (s'' \setminus a'')(t \setminus (ca)) + (s'' \setminus a'')(t \setminus (c'a')) \\ &= (s'' \setminus a'')((cs) \setminus (ca)) + (s'' \setminus a'')((c's') \setminus (c'a')) \\ &= (s'' \setminus a'')(s \setminus a) + (s'' \setminus a'')(s' \setminus a') \end{aligned}$$

(b) よりある $v, v' \in S, b, b' \in A$ が存在して, $vca = bs'', v'c'a' = b's''$. 2 よりある $d, d' \in A$ が存在して $w := dv = d'v' \in S$. そのとき $wca = dvca = dbs'', w'c'a' = d'v'c'a' = d'b's'', w(ca + c'a') = (db + d'b')s''$ したがって

$$\begin{aligned} ((s \setminus a) + (s' \setminus a'))(s'' \setminus a'') &= (t \setminus (ca + c'a'))(s'' \setminus a'') = (wt) \setminus ((db + d'b')a'') \\ &= (wt) \setminus (dba'' + d'b'a'') = (wt) \setminus (dba'') + (wt) \setminus (d'b'a'') \\ &= (t \setminus (ca))(s'' \setminus a'') + (t \setminus (c'a'))(s'' \setminus a'') \\ &= ((cs) \setminus (ca))(s'' \setminus a'') + ((c's') \setminus (c'a'))(s'' \setminus a'') \\ &= (s \setminus a)(s'' \setminus a'') + (s' \setminus a')(s'' \setminus a''). \end{aligned}$$

以上によって集合 $S^{-1}A$ に自然に環構造が入ることが示された.

5, 6, 7. 容易 (もしくは可換の場合とほぼ同様). \square

[2] ($S^{-1}A$ の普遍性, 20 点) A は (可換とは限らない) 環であり, S は A の積閉集合であるとする (すなわち問題 [1] の条件 (a) を仮定する). (可換とは限らない) 環 \tilde{A} と環の準同型写像 $i: A \rightarrow \tilde{A}$ で以下の条件を満たすものが存在すると仮定する:

(i) 任意の $s \in S$ に対して $i(s)$ は \tilde{A} の単元 (可逆元) である.

(ii) $\tilde{A} = \{i(s)^{-1}i(a) \mid s \in S, a \in A\}$.

(iii) $\text{Ker } i = \{a \in A \mid \text{ある } s \in S \text{ で } sa = 0 \text{ を満たすものが存在する}\}$.

(問題 [1] の結果より左分母条件のもとでの $i_s: A \rightarrow S^{-1}A$ はこれらの条件を満たしている.) 以上の仮定のもとで以下が成立している:

1. $f: A \rightarrow B$ は A から (可換とは限らない) 環 B への環準同型であり, 任意の $s \in S$ に対して $f(s)$ は B の単元 (可逆元) であると仮定する. このとき $s \in S, a, c \in A, cs \in S$ ならば $f(cs)^{-1}f(ca) = f(s)^{-1}f(a)$.

2. 左分母条件が成立している (すなわち問題 [1] の条件 (b), (c) が成立している).

3. 任意の $s, s' \in S, a, a' \in A$ に対して

$$i(s)^{-1}i(a) = i(s')^{-1}i(a')$$

\iff ある $c, c' \in A$ で $cs = c's' \in S$ かつ $ca = c'a'$ を満たすものが存在する.

4. 写像 $\Phi: \tilde{A} \rightarrow S^{-1}A$ を $\Phi(i(s)^{-1}i(a)) = s^{-1}a$ ($s \in S, a \in A$) と定めることができる. この写像は環の同型写像であり, $\Phi \circ i = i_s$ が成立している. よって Φ を通して \tilde{A} と $S^{-1}A$ を同一視できる.

5. $f: A \rightarrow B$ は A から (可換とは限らない) 環 B への環準同型であり, 任意の $s \in S$ に対して $f(s)$ は B の単元 (可逆元) であると仮定する. このときある環準同型 $\phi: \tilde{A} \rightarrow B$ で $\phi \circ i = f$ をみたすものが唯一存在する. したがって $i: A \rightarrow \tilde{A}$ を $i_s: A \rightarrow S^{-1}A$ で置き換えた同様の結果も成立している ($S^{-1}A$ の普遍性). \square

ヒント. 1. $f(cs)^{-1}f(ca) = f(cs)^{-1}f(c)f(a) = f(cs)^{-1}f(cs)f(s)^{-1}f(a) = f(s)^{-1}f(a)$.

2. (b) を示そう. $s \in S, a \in A$ とする. (i), (ii) よりある $t \in S, b \in A$ で $i(a)i(s)^{-1} = i(t)^{-1}i(b)$ を満たすものが存在する. このとき $i(ta - bs) = 0$ であるから, (iii) よりある $u \in S$ で $u(ta - bs) = 0$ を満たすものが存在する. このとき $s' = ut \in S, a' = ub \in A$ とおくと $s'a = a's$.

(c) を示そう. $s \in S, a \in A, as = 0$ とする. このとき $i(a)i(s) = i(as) = 0$ であるから, (i) より $i(a) = 0$. よって (iii) よりある $s' \in S$ で $s'a = 0$ を満たすものが存在する.

3. \Rightarrow を示そう. $s, s' \in S, a, a', c, c' \in A, cs = c's' \in S, ca = c'a'$ とする. このとき (i) と 1 より $i(s)^{-1}i(a) = i(cs)^{-1}i(ca) = i(c's')^{-1}i(c'a') = i(s')^{-1}i(a')$.

\Leftarrow を示そう. $s, s' \in S, a, a' \in A, i(s)^{-1}i(a) = i(s')^{-1}i(a')$ とする. (b) よりある $b \in A, s \in S$ で $ts = bs'$ を満たすものが存在する. このとき (i) より $i(ta) = i(ts)i(s)^{-1}i(a) = i(bs')i(s')^{-1}i(a') = i(bs'a')$. よって (c) よりある $u \in S$ で $uta = uba'$ を満たすものが存在する. このとき $S \ni uts = ubs'$. したがって $c = ut, c' = ub$ と置くと $cs = c's' \in S$ かつ $ca = c'a'$.

4. 上の 3 の結果を使えば容易.

5. 最後の一文は 4 の結果からただちに得られる.

ϕ の一意性. 環準同型 $\phi: \tilde{A} \rightarrow B$ は $\phi \circ i = f$ を満たしていると仮定する. (i), (ii) より, \tilde{A} の元は $\alpha = i(s)^{-1}i(a)$ ($s \in S, a \in A$) の形をしている. $f(a) = \phi(i(a)) = \phi(i(s)i(s)^{-1}i(a)) = \phi(i(s))\phi(i(s)^{-1}i(a)) = f(s)\phi(\alpha)$ なので $\phi(\alpha) = f(s)^{-1}f(a)$ である. 別の環準同型 $\phi': \tilde{A} \rightarrow B$ が $\phi' \circ i = f$ を満たしているならば, 同様にして $\phi'(\alpha) = f(s)^{-1}f(a)$ が導かれるので, $\phi' = \phi$ となることがわかる.

ϕ の存在. 写像 $\phi: \tilde{A} \rightarrow B$ を $\phi(i(s)^{-1}i(a)) = f(s)^{-1}f(a)$ ($s \in S, a \in A$) と定めることができる. 実際 3 の結果より $s, s' \in S, a, a' \in A, i(s)^{-1}i(a) = i(s')^{-1}i(a')^{-1}$ ならばある $c, c' \in A$ で $cs = c's' \in S, ca = c'a'$ を満たすものが存在するので, 1 の結果より $f(s)^{-1}f(a) = f(cs)^{-1}f(ca) = f(c's')^{-1}f(c'a') = f(s')^{-1}f(a')$. これで ϕ が写像として well-defined であることがわかった. ϕ の定義より $\phi \circ i = f$ は明らか. 後は ϕ が環準同型であることを示せば良い.

$s, s' \in S, a, a' \in A$ を任意に取り, $\alpha = i(s)^{-1}i(a), \alpha' = i(s')^{-1}i(a')$ と置く.

s, s' に (b) を適用するとある $c \in S, c' \in S$ で $s'' := cs = c's' \in S$ を満たすものが存在する. このとき 1 より $\alpha = i(s'')^{-1}i(ca), \alpha' = i(s'')^{-1}i(c'a')$ であるから $\alpha + \alpha' = i(s'')^{-1}i(ca + c'a')$ かつ $f(s'')^{-1}f(ca) = f(s)^{-1}f(a) = \phi(\alpha), f(s'')^{-1}f(c'a') = f(s')^{-1}f(a') = \phi(\alpha')$. したがって $\phi(\alpha + \alpha') = f(s'')^{-1}f(ca + c'a') = \phi(\alpha) + \phi(\alpha')$.

a, s' に (b) を適用するとある $s'' \in S, a'' \in A$ で $s''a = a''s'$ を満たすものが存在する. このとき $i(a)i(s')^{-1} = i(s'')^{-1}i(a'')$ かつ $f(a)f(s')^{-1} = f(s'')^{-1}f(a'')$. したがって $\phi(\alpha\alpha') = \phi(i(s)^{-1}i(a)i(s')^{-1}i(a')) = \phi(i(s)^{-1}i(s'')^{-1}i(a'')i(a')) = \phi(i(s''s)^{-1}i(a''a')) = f(s''s)^{-1}f(a''a') = f(s)^{-1}f(s'')^{-1}f(a'')f(a') = f(s)^{-1}f(a)f(s')^{-1}f(a') = \phi(\alpha)\phi(\alpha')$.

$\phi(1) = \phi(i(1)) = f(1) = 1$. \square

参考 1.1 左分母条件に基づいた非可換環の局所化の構成の詳しい証明が手もとにある教科書で見付からなかったので, 問題 [1], [2] には詳しいヒントを与えておいた. 詳しいヒントは後でより進んだ数学 (線形微分方程式の代数解析, Lie 代数, 量子群, 導来圏などなど) を学ぶときに役に立つはずである. 導来圏を構成するときに使われる加法圏の局所化の構成の証明はほとんど [1] のヒントと同じである. 図式を描きながらヒントの内容を追うようにした方がわかり易いだろう. \square

[3] (可換な場合との関係) A は可換環であり, S はその積閉集合であるとする. このとき $S \times A$ における次の二項関係 (結果的に双方が同値関係になる) は互いに等しい:

$$(a) (s, a) \sim (s', a')$$

\iff ある $c, c' \in A$ で $cs = c's' \in S$ かつ $ca = c'a'$ を満たすものが存在する.

$$(b) (s, a) \approx (s', a')$$

\iff ある $t \in S$ で $t(s'a - sa') = 0$ を満たすものが存在する.

したがって A が可換環であるとき問題 [1] で構成された $S^{-1}A$ は同値関係 (b) を用いて構成された $S^{-1}A$ と一致している. \square

ヒント. $(s, a) \sim (s', a') \Rightarrow (s, a) \approx (s', a')$. $(s, a) \sim (s', a')$ のとき, ある $c, c' \in A$ で $cs = c's' \in S, ca = c'a'$ を満たすものが存在する. このとき $t = csc's' \in S$ と置くと

A の可換性より $t(s'a - sa') = csc's's'a - csc's'sa' = ss'(c's'ca - csc'a') = 0$. よって $(s, a) \approx (s', a')$.

$(s, a) \approx (s', a') \Rightarrow (s, a) \sim (s', a')$. $(s, a) \approx (s', a')$ のとき, ある $t \in S$ で $t(s'a - sa') = 0$ を満たすものが存在する. このとき $c = ts'$, $c' = ts$ と置くと $c, c' \in S$, $cs = ts's = tss' = c's' \in S$, $ca = ts'a = tsa' = c'a'$. よって $(s, a) \sim (s', a')$. \square

1.3 Ore 整域

定義 1.2 (Ore 整域) (可換とは限らない) 環 A が Ore 整域 (Ore domain) であるとは, A が 0 以外の零因子を持たず, 任意の 0 でない $a, b \in A$ に対して $Aa \cap Ab \neq 0$, $aA \cap bA \neq 0$ が成立することである. \square

[4] (Ore 整域の商斜体) A は Ore 整域であるとし, $S = A \setminus \{0\}$ と置くと, S は左分母条件を満たし, $D := S^{-1}A$ が定まる. この D は以下を満たしている:

1. D は斜体であり, A を部分環として含む.
2. $D = \{s^{-1}a \mid a, s \in A, s \neq 0\} = \{bt^{-1} \mid b, t \in A, t \neq 0\}$.

逆にこの二つの条件を満たす斜体 D は同型を除いて一意である. \square

ヒント. まず $S = A \setminus \{0\}$ に関する左分母条件 (b), (c) を示そう.

(b) $a \in A$, $s \in S$ に対してある $a' \in A$, $s' \in S$ で $s'a = a's$ を満たすものが存在することを示したい. $a = 0$ ならば $s' = 1$, $a' = 0$ と取れる. $a \neq 0$ と仮定する. A は Ore 整域なので $Aa \cap As \neq 0$. よってある $a', s' \in S$ で $s'a = a's$ を満たしているものが存在する.

(c) $a \in A$, $s \in S$ が $as = 0$ を満たしているならば, A は零因子を持たないので $a = 0$ である. よって $1 \in S$ が $1a = 0$ を満たしている.

$D = S^{-1}A$ が 1, 2 を満たしていることを示そう.

1. A が 0 以外の零因子を持たないことから S は零因子を含まないので, A は $D = S^{-1}A$ の部分環とみなせ, $D = \{a^{-1}b \mid a, b \in A, a \neq 0\}$ が成立する. $a, b \in A$, $a^{-1}b \neq 0$ ならば $b \neq 0$ なので $a^{-1}b$ は逆元 $b^{-1}a$ を持つ. よって D は斜体である.

2. $D = S^{-1}A$ の構成の仕方から D の元は $s^{-1}a$ ($a, s \in A$, $s \neq 0$) という表示を持つ. $a = 0$ ならば $s^{-1}a = 0 = 01^{-1}$. $a \neq 0$ ならば A は Ore 整域なので $aA \cap sA \neq 0$. よってある $b, t \in S$ で $at = sb$ を満たすものが存在するので $s^{-1}a = bt^{-1}$.

D と同様の条件を満たす斜体の一意性は問題 [2] の小問 5 の結果を使えば容易に証明できる. \square

[5] (Ore 整域の十分条件) A は (可換とは限らない) 環であり, 体 K を部分環として含み, K の元は A の任意の元と可換であるとする (A は K 代数). A は K の元の積によって自然に K 上のベクトル空間とみなせる. さらに A は以下の条件を満たしていると仮定する:

- (a) A は 0 以外の零因子を持たない.
- (b) A の K 部分空間の増加列 $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ で $A_i A_j \subset A_{i+j}$ と $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ を満たすものが与えられている (A_i は A の増大フィルター).

- (c) ある正の整数 n と正の定数 C で $\dim A_i \sim Ci^n$ ($i \rightarrow \infty$) を満たすものが存在する (次元が多項式増加). (ここで $f(i) \sim g(i)$ ($i \rightarrow \infty$) $\iff \lim_{i \rightarrow \infty} f(i)/g(i) = 1$.)

このとき A は Ore 整域である. \square

ヒント. A が Ore 整域ではないと仮定して矛盾を導く. A が Ore 整域でないならば 0 でない $a, b \in A$ で $Aa \cap Ab = 0$ または $aA \cap bA = 0$ を満たすものが存在する. $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ より $a, b \in A_{i_0}$ を満たす i_0 が存在する. $A_i A_j \subset A_{i+j}$ より $A_i a, A_i b \subset A_{i+i_0}$. もしも $Aa \cap Ab = 0$ ならば $A_i a + A_i b$ は直和になる. A は零因子を持たないので $\dim_K A_i a = \dim_K A_i b = \dim_K A_i \sim Ci^n$ ($i \rightarrow \infty$). したがって

$$\dim_K A_{i+i_0} \sim C(i+i_0)^n \sim Ci^n \quad (i \rightarrow \infty),$$

$$\dim_K A_{i+i_0} \geq \dim_K(A_i a + A_i b) = \dim_K A_i a + \dim_K A_i b \sim 2Ci^n \quad (i \rightarrow \infty).$$

これは矛盾. $aA \cap bA = 0$ の場合も全く同様に矛盾を導ける. \square

参考 1.3 上の問題の結果は「次元が多項式増加の増大フィルターを持つ零因子を持たない K 代数は Ore 整域である」と要約できる. この結果はよく使われる. たとえば Weyl 代数や有限次元 Lie 代数の普遍展開環が Ore 整域であることを容易に証明できる. \square

1.4 左分母条件の十分条件

[6] (左分母条件の十分条件) A は (可換とは限らない) 環であり, 体 K を部分環として含み, K の元は A の任意の元と可換であるとする (A は K 代数). 以下を仮定する:

- (i) S は $F \subset A$ から生成される積閉集合 (F を含む最少の積閉集合) であり, 任意の $a \in A, f \in F$ に対してある $n \in \mathbb{Z}_{>0}, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$ で次を満たすものが存在する:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i f^{n-i} a f^i = \alpha_0 f^n a + \alpha_1 f^{n-1} a f + \alpha_2 f^{n-2} a f^2 + \dots + \alpha_n a f^n = 0, \quad \alpha_0 \neq 0.$$

- (ii) S は零因子を含まない.

このとき S は左分母条件を満たしている. \square

注意 1.4 $\alpha_0 \neq 0$ の代わりに $\alpha_n \neq 0$ を仮定すれば右分母条件が導かれる. \square

ヒント. 問題 [1] の条件 (b), (c) を示せば十分である. 条件 (c) は (ii) より明らかなので (b) のみを示せばよい.

任意の $f \in F, a \in A$ に対して, (i) より $t = f^n \in S$,

$$b = -\alpha_0^{-1}(\alpha_1 f^{n-1} a + \alpha_2 f^{n-2} a f + \dots + \alpha_n a f^{n-1})$$

と置くと $ta = bf$ となる.

S の元はある $f_1, \dots, f_m \in S$ によって $s = f_m f_{m-1} \dots f_1$ と表わせる. m に関する帰納法で任意の $a \in A$ に対してある $t \in S, b \in A$ で $ta = bs$ を満たすものが存在することを示そう. $m = 1$ の場合は上で示した. $m - 1$ まで成立していると仮定する. ある $t' \in S, b' \in S$ で $t'a = b' f_{m-1} \dots f_1$ を満たすものが存在する. $m = 1$ の場合よりある $t'' \in S, b \in A$ で $t'' b' = b f_m$ を満たすものが存在する. このとき $t'' t' a = t'' b' f_{m-1} \dots f_1 = b f_m f_{m-1} \dots f_1 = bs$ である. これで m の場合も成立することがわかる. \square

参考 1.5 上の問題の結果は左分母条件を満たす積閉集合を構成するために有用である。上の問題の結果を使えば symmetrizable Kac-Moody Lie 代数 \mathfrak{g} に対応する量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ の下べき零部分代数 $U_q(\mathfrak{n}_-)$ において Chevalley generators $\{f_1, \dots, f_\ell\}$ の任意の部分集合から生成される積閉集合 S が左分母条件を満たしていることがわかる。□

2 追記 (2007年2月16日)

非可換環の教科書を幾つか調べてみた。左分母条件に基づいた非可換環の局所化に関する問題 [1], [2] に関する詳しい解説が以下の文献にある:

- Goodearl and Warfield [GW], Chapter 10
- McConnell and Robson [MR], Chapter 2

参考文献

- [GM1] Gelfand, S. I. and Manin, Yu. I., Methods of Homological Algebra, Springer, 1996
- [GM2] Gelfand, S. I. and Manin, Yu. I., Homological Algebra, Algebra V, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 38, Springer-Verlag, 1994
- [GW] Goodearl, K. R. and Warfield, R. B., Jr., An introduction to noncommutative Noetherian rings. Second edition, London Mathematical Society Student Texts, 61, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, xxiv+344 pp.
- [MR] McConnell, J. C. and Robson, J. C., Noncommutative Noetherian rings, With the cooperation of L. W. Small, Revised edition, Graduate Studies in Mathematics, 30, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, xx+636 pp.
- [I] イヴァセン, B., 層とコホモロジー, 前田博信訳, シュプリンガー・フェアラーク東京, 原書 1986, 翻訳 1997
- [T] 谷崎俊之, 環と体 3—非可換環論, 岩波講座 現代数学の基礎 17, 岩波書店, 1998