モノドロミー保存系の量子化について

黒木 玄

2006 年 3 月 9 日 (2006 年 6 月 14 日訂正)

目 次

0 はじめに

モノドロミー保存系の量子化はまだ分野として確立していない. しかしここ数年の考察によってかなり形ができて来たように思われる. この論説では未発表の結果を含めて最近の考察について説明したい. 説明を簡単にするために数学的に厳密な定式化は避け, 本質的な内容について説明することにする.

1 量子化が構成されている古典モノドロミー保存系

この節では量子化が構成されている古典モノドロミー保存系 (classical monodromy-preserving system) について簡単に説明する.

1.1 モノドロミー保存変形の理論の概略

複素解析的線形常微分方程式の基本的な考え方は次の通りである:

1. まず各特異点で何らかの意味で正規化された形式解を構成する.

2. 次に特異点における展開が形式解に一致する局所解の存在を示す. 特異点が不確定特異点の場合には特異点を頂点に持つあるセクターの上で定義された正則函数で特異点における漸近展開が形式解に一致するものの存在を示す.

3. 異なる定義域を持つ局所解たちを繋げるモノドロミーデータ (モノドロミー行列と接続行列) について考える.

4. 逆に与えられたモノドロミーデータを持つような線形常微分方程式が存在するかどうかについて考える (Riemann-Hilbert 問題).

モノドロミー保存変形の理論ではさらに次のように考える:

5. モノドロミー行列と接続行列を保つような線形常微分方程式の変形がどれだけあるかを調べる. そのような変形を線形常微分方程式のモノドロミー保存変形と呼ぶ. モノドロミー保存変形は線形常微分方程式の係数に関する非線形微分方程式で記述される. (たとえば古典的な 6 種類の Painlevé 方程式はモノドロミー保存系の特殊な場合になっている.)

6. モノドロミー保存変形方程式の離散的対称性を記述する. (Bäcklund 変換や Schlesinger 変換の理論).
7. モノドロミー保存変形方程式の解の構成と性質を研究する (τ 函数の理論).

モノドロミー保存変形の理論では, 連続的なモノドロミー保存変形を記述する非線形微分方程式だけではなく, その方程式の離散的な対称性も合わせて扱うことが重要である. そこでモノドロミー保存変形方程式とその離散的な対称性を合わせて**モノドロミー保存系**と呼ぶことにする.

1.2 Painlevé IV の対称形式とその高階化の Lax 表示

モノドロミー保存系の典型的な例で最もわかり易いものは Painlevé IV の対称形式とその高階化の Lax 表示である.

記号の準備. $n \times n$ の行列単位を E_{ij} と書くことにし, 行列単位の添字を n 周期的に整数全体に拡張しておく. n 次の単位行列をも 1 と書くことにする. 2 つの整数 i, j が $\operatorname{mod} n$ で等しいとき $i \equiv j$ と書くことにする. さらに $i \equiv j$ のとき 1 となり, それ以外のとき 0 になる $\operatorname{mod} n$ の Kronecker の delta を $\delta_{i \equiv j}$ と書くことにする. $n \times n$ 行列 $\Lambda(z)$ を次のように定める:

$$\Lambda(z) = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + zE_{n1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & 0 \end{bmatrix}.$$

以下の構成において, 0 でない複素定数 κ を固定し, n は 3 以上の奇数であると仮定する. (偶数の場合は様々な議論が複雑になる.)

1.2.1 モノドロミー保存変形を記述する微分方程式の記述

パラメータ $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ を成分に持つ対角行列を ε と書き, 従属変数 $f_1, \dots, f_n$ を成分に持つ対角行列を f と書くことにする:

$$\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \quad f = \operatorname{diag}(f_1, \dots, f_n).$$

ε_i, f_i の添字を次の条件によって整数全体に拡張しておく:

$$\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i + \kappa, \quad f_{i+n} = f_i.$$

$n \times n$ 行列 A の $\Lambda(z)^k$ による相似変換を $A^{[k]} = \Lambda(z)^k A \Lambda(z)^{-k}$ と書くことにする. たとえば

$$\varepsilon^{[k]} = \operatorname{diag}(\varepsilon_{1+k}, \dots, \varepsilon_{n+k}), \quad f^{[k]} = \operatorname{diag}(f_{1+k}, \dots, f_{n+k}).$$

モノドロミー保存変形される線形常微分方程式として次を考える:

$$\kappa z \frac{\partial Y}{\partial z} = L(z)Y. \tag{1.1}$$

ここで

$$
L(z) = \varepsilon + f\Lambda(z) + \Lambda(z)^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & f_1 & 1 & & \\ & \varepsilon_2 & f_2 & \ddots & \\ & & \varepsilon_3 & \ddots & 1 \\ z & & & \ddots & f_{n-1} \\ zf_n & z & & & \varepsilon_n \end{bmatrix}. \tag{1.2}
$$

この線形常微分方程式は原点 $z=0$ に確定特異点を持ち, 無限遠点 $z=\infty$ に rank 2 の不確定特異点を持つ. 解 $Y=Y(z)$ について考える場合には $GL_n(\mathbb{C})$ 値の解を考える.

天下り的になってしまうがさらに次の線形微分方程式を考える:

$$
\frac{\partial Y}{\partial t} = B(z)Y. \tag{1.3}
$$

ここで

$$
B(z) = (f + f^{[2]} + \cdots + f^{[2g]}) + \Lambda = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & & \\ & b_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & b_n \end{bmatrix}, \tag{1.4}
$$

$$
b_i = f_i + f_{i+2} + \cdots + f_{i+2g}.
$$

以上の 2 つの線形微分方程式 (1.2), (1.4) の両立条件は次の零曲率方程式になる:

$$
\left[\frac{\partial}{\partial t} - B(z),\ \kappa z\frac{\partial}{\partial z} - L(z)\right] = 0. \tag{1.5}
$$

ここで [,] は行列値函数係数の線形微分作用素の交換子である. この零曲率方程式は

$$
\frac{\partial L(z)}{\partial t} = [B(z), L(z)] + \kappa z\frac{\partial B(z)}{\partial z}.
$$

と書き直せ, これは f_i たちに関する非線形微分方程式の形になっている.

実はこれらの非線形微分方程式が線形微分方程式 (1.1) **のモノドロミー保存変形を記述している.** モノドロミー保存変形の定義は解析的だがそれを記述する微分方程式は以上のように純代数的に記述可能である. この事実はここで扱っている特別な場合に限らず一般的に成立している. (一般の場合について [8], [9] を参照せよ.)

例 1.1 (Painlevé IV の対称形式) n は 3 以上の奇数であると仮定したのであった. $n=3$ のときモノドロミー保存変形を記述する零曲率方程式は次の連立方程式と同値である:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial t} &= f_3 f_1 - f_1 f_2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\
\frac{\partial f_2}{\partial t} &= f_1 f_2 - f_2 f_3 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\
\frac{\partial f_3}{\partial t} &= f_2 f_3 - f_3 f_1 - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \kappa).
\end{aligned}
$$

この微分方程式系は Painlevé IV の対称形式と呼ばれている. この連立一階の微分方程式を一つの高階単独の微分方程式に書き直すと古典的な Painlevé IV 方程式が現われる. モノドロミー保存変形を考えるためには $\kappa \neq 0$ でなければいけないが, もしも $\kappa = 0$ ならば Painlevé IV の対称形式は Lotka-Volterra 型の可積分系になる. □

n が 5 以上の奇数の場合でも方程式を具体的に書き下すこともできる. n が 3 以上の奇数のとき零曲率方程式 (1.5) は次と同値である:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \left(\sum_{k=1}^{g} f_{i+2k}\right) f_i - f_i \left(\sum_{k=1}^{g} f_{i+2k-1}\right) - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}).$$

$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1 + \kappa$ と仮定したので $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \varepsilon_1 - \kappa$ である. これは Painlevé IV の (対称形式の) 高階への一般化であると考えることができる. そこで (1.5) を Painlevé IV の対称形式の高階化もしくはその Lax 表示と呼ぶことにする.

以上の結果の証明は易しい. [12], [10] では n が偶数の場合も扱われている.

Lax 表示 (1.5) の重要な点は $A^{(1)}_{n-1}$ 型の拡大アフィン Weyl 群対称性が容易に記述できることと無限自由度を持つソリトン系との関係が見易くなることである. 実はソリトン系との関係と拡大アフィン Weyl 群対称性の両方をアフィン Lie 群の言葉によって統一的に記述することができる. しかしソリトン系との関係はモノドロミー保存系の量子化の問題とは直接関係しないのでこのレポートでは省略することにする.

1.2.2 モノドロミー保存変形を記述する微分方程式の離散対称性

α_i, $G_i(z)$ を次のように定める:

$$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \qquad G_i(z) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\alpha_i}{f_i} E_{i+1,i} & (i \not\equiv n), \\ 1 + z^{-1} \dfrac{\alpha_i}{f_i} E_{i+1,i} & (i \equiv n). \end{cases}$$

$\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i + \kappa$, $f_{i+n} = f_i$ と仮定したので次が成立する:

$$\alpha_{i+n} = \alpha_i, \quad G_{i+n}(z) = G_i(z).$$

ω, s_i で生成され次の関係式を持つ離散群を $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ と表わし, $A^{(1)}_{n-1}$ 型の拡大アフィン Weyl 群と呼ぶことにする:

$$\begin{aligned} &\omega s_i = s_{i+1} \omega, \quad s_{i+n} = s_i, \\ &s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i \ \ (j \not\equiv i, i \pm 1), \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}. \end{aligned}$$

$\omega^n = 1$ と仮定していないことに注意せよ. $\kappa = 0$ の場合には $\omega^n = 1$ と仮定できるが, $\kappa \neq 0$ の場合は $\omega^n = 1$ と仮定してはいけない.

$\kappa z \partial/\partial z - L(z)$ を ε_j, f_j たちの母函数とみなし, 拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の双有理作用を次のように定めることができる:

$$\omega \left(\kappa z \frac{\partial}{\partial z} - L(z)\right) = \Lambda(z) \left(\kappa z \frac{\partial}{\partial z} - L(z)\right) \Lambda(z)^{-1}, \tag{1.6}$$

$$s_i \left(\kappa z \frac{\partial}{\partial z} - L(z)\right) = G_i(z) \left(\kappa z \frac{\partial}{\partial z} - L(z)\right) G_i(z)^{-1}. \tag{1.7}$$

この双有理作用は具体的には次のように書ける:

$$\omega(\varepsilon_j) = \varepsilon_{j+1}, \qquad\qquad \omega(f_j) = f_{j+1},$$

$$s_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} \varepsilon_{j+1} & (j \equiv i), \\ \varepsilon_{j-1} & (j \equiv i+1), \\ \varepsilon_j & (j \not\equiv i, i+1), \end{cases} \qquad s_i(f_j) = \begin{cases} f_j \pm \dfrac{\alpha_i}{f_i} & (j \equiv i \pm 1), \\ f_j & (j \not\equiv i \pm 1). \end{cases}$$

$\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i + \kappa$ と仮定したので特に

$$s_n(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1 + \kappa, \quad s_n(\varepsilon_1) = s_n(\varepsilon_{n+1} - \kappa) = \varepsilon_n - \kappa.$$

これが実際に拡大アフィン Weyl 群作用として well-defined であることは直接的な計算でも確かめられるし, ソリトン系 (戸田系) からの簡約を用いて証明することもできる. しかもこの作用は (1.6), (1.7) よりモノドロミー保存変形方程式 (1.5) を明らかに保っている.

以上によってモノドロミー保存変形方程式 (1.5) は拡大アフィン Weyl 群対称性を持つことがわかった. 公式 (1.6), (1.7) をモノドロミー保存変形方程式 (1.5) の拡大アフィン Weyl 群対称性の Lax 表示と呼ぶことにする.

注意 1.2 拡大アフィン Weyl 群対称性の Lax 表示 (1.6), (1.7) は形式的には $\kappa z\partial/\partial z$ の Y への作用 (1.1) と ω, s_i の Y への作用

$$\omega(Y) = \Lambda(z)Y, \quad s_i(Y) = G_i(z)Y.$$

の可換性に同値である. 実は $\kappa z\partial/\partial z$, ω, s_i の作用はアフィン Lie 群に基づいたソリトン系 (戸田系) の言葉で綺麗に記述することができる. □

一般に線形常微分方程式のモノドロミー保存変形を記述する微分方程式は離散的な対称性を持っている. モノドロミー保存変形を記述する微分方程式とその離散的対称性の双有理作用を合わせてモノドロミー保存系と呼ぶことにする. **モノドロミー保存系を量子化する場合には微分方程式だけではなく, 離散的対称性をも同時に量子化しなければいけない.**

1.2.3 モノドロミー保存系の Hamiltonian 構造

Poisson 括弧と Hamiltonian と呼ばれる函数の組を Hamiltonian 構造 (Hamiltonian structure) と呼ぶことにする. モノドロミー保存系の正準量子化を考えるためにはまず最初にその Hamiltonian 構造を構成する必要がある. (ここでは Poisson 括弧を交換子に置き換えることによる量子化を正準量子化と呼んでいる.)

筆者が知る限りにおいて一般のモノドロミー保存系に対する自然な Hamiltonian 構造を構成する方法はまだ知られていない. しかし上で説明した Painlevé IV の対称形式の高階化に関しては Hamiltonian 構造を表現論的に自然に構成することができる. しかしここでは天下り的な構成で満足することにする.

Poisson 括弧を次のように定める:

$$\{\varepsilon_i, \varepsilon_j\} = 0, \quad \{\varepsilon_i, f_j\} = 0, \quad \{f_i, f_j\} = \begin{cases} \mp 1 & (i \equiv j \pm 1), \\ 0 & (i \not\equiv j \pm 1). \end{cases}$$

この Poisson 括弧は拡大アフィン Weyl 群の双有理作用 (1.6), (1.7) で保たれる. そのことは次の公式からただちに導き出される:

$$s_i(f_j) = e^{-\alpha_i\{\log f_i, \cdot\}} f_j = f_j - \alpha_i\{\log f_i, f_j\} + \frac{\alpha_i^2}{2}\{\log f_i, \{\log f_i, f_j\}\} - \cdots.$$

この公式は $\{\log f_i, \{\log f_i, f_j\}\} = 0$ となることからすぐに得られる.

注意 1.3 Poisson 括弧を保つ Weyl 群作用は n を奇数と限らなくても完全に同じ式で定義可能である. s_i の f_j への作用を Hamiltonian $-\alpha_i \log f_i$ に付随する時間発展の時刻 1 における値で定義することは一般の Kac-Moody Lie 代数の上三角の場合に拡張可能である ([13]). □

n は 3 以上の奇数であると仮定していたのであった. そこで n を $n = 2g+1$ と表わしておく. このとき $\operatorname{tr} L(z)^{g+2}$ は $n = 3$ ならば z の 2 次式になり, $n \geqq 5$ ならば z の 1 次式になる. Hamiltonian と呼ばれる ε_i, f_i たちの函数 H を次のように定める:

$$H = \left(\frac{1}{g+2} \operatorname{tr} L(z)^{g+2} \text{ における } z \text{ の係数} \right).$$

一般に H は f_i たちに関する 3 次式になり, 具体的な形も書き下すことができるがここでは省略する. 具体形に関しては [12], [10] を参照せよ.

Poisson 括弧の表現論的な構成法に関する易しい一般論によって (Hamiltonian の具体形を使わずに) 次を容易に示すことができる:

$$\{H, L(z)\} = [B(z), L(z)].$$

ここで左辺は H と $L(z)$ の各成分の Poisson 括弧を取ってできる行列を意味している.

ε_i, f_i で生成される代数に derivation $a \mapsto a_t$ を次のように定める:

$$\varepsilon_{i,t} = 0, \quad f_{i,t} = \kappa \delta_{i \equiv n}$$

ここで $\delta_{i \equiv j}$ は $\operatorname{mod} n$ の Kronecker の delta である. この derivation は Poisson 括弧に関しても derivation になっている. よってこの derivation に関する時間発展は Poisson algebra の自己同型を与える. このとき次が成立している:

$$L(z)_t = \kappa z \frac{\partial B(z)}{\partial z}.$$

したがってモノドロミー保存変形を記述する微分方程式 (1.5) は次と同値である:

$$\frac{\partial L(z)}{\partial t} = \{H, L(z)\} + L(z)_t.$$

これは解析力学における正準方程式の形をしている.

以上によって Painlevé IV の対称形式とその高階化は自然な Hamiltonian 構造を持つことがわかった.

例 1.4 (Painlevé IV の対称形式の場合) $n = 3$ のとき

$$H = f_1 f_2 f_3 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) f_1 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) f_2 + (\varepsilon_3 + \varepsilon_1) f_3.$$

したがって $\{f_{i\pm1}, f_i\} = \pm 1$ より容易に

$$\{H, f_i\} = f_{i-1} f_i - f_i f_{i+1} - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})$$

となることがわかる. これは $\{H, L(z)\} = [B(z), L(z)]$ と同値である. □

注意 1.5 (歴史) Painlevé IV の対称形式とその高階化の Hamiltonian は [12] などによってすでに知られていた. しかしそれが $L(z)$ のべきのトレースの形で表示できることは知られていなかった. (そもそも [12] では Lax 表示を基礎に議論が進められていない.)

筆者が Painlevé IV の対称形式とその高階化の Hamiltonian が $L(z)$ のべきのトレース型になっていることに気付いたのは 2003 年の秋頃である. そのとき筆者は古典の場合だけではなく [10] で量子化された Painlevé IV の対称形式の Hamiltonian も $L(z)$ のべきのトレースに完全に一致していることにも気付いた. Painlevé IV の対称形式 (n=3 の場合) の量子化の Hamiltonian は形式的には古典の場合の Hamiltonian に $\hbar$ に比例した補整項を付ける必要がある. その補整項も含めて $L(z)$ のべきのトレースで再現される. ($n \geqq 5$ ではそのような補整項は必要ない.)

このことに気付いたことによって Hamiltnian の構成法に関する明確な方針が立てられた. この方針を実際に実行したのが名古屋創氏の仕事 [11] である.

多くの可積分系において Hamiltonian を L-operator のべきのトレースの形で表示できる (その表示は古典 r 行列の理論に大幅に一般化される). モノドロミー保存系でもその考え方は有効である. □

注意 1.6 (可積分系への極限) Painlevé IV の対称形式とその高階化は $\kappa = 0$ のとき可積分系になる. $L(z)$ の変数 w に関する特性多項式は z, w の多項式になる. その係数として互いに可換な Hamiltonians が得られる. □

1.3 量子化が構成されている他の場合

筆者が知る限りにおいて, 現在量子化が構成されているモノドロミー保存系は本質的に以下に挙げるものしか存在しない. (明らかな変種を除く. たとえば KZ 方程式を楕円 KZ 方程式に一般化したり, A 型の場合を一般の型に一般化した場合は除く.)

1.3.1 すべての特異点が確定特異点の場合

変形される線形微分方程式は次の通り:

$$\kappa \frac{\partial Y}{\partial z} = L(z) Y, \quad L(z) = \sum_{a=1}^{N} \frac{L_a}{z - z_a}.$$

ここで κ は 0 でない定数であり, であり, L_a は $L_{a;ij}$ を (j, i) 成分として持つ $n \times n$ 行列である. モノドロミー保存変形を記述する方程式は上の次の線形微分方程式の両立条件によって与えられる:

$$\kappa \frac{\partial Y}{\partial z_a} = B_a(z) Y, \quad B_a(z) = -\frac{L_a}{z - z_a}.$$

確定特異点の位置 z_a たちが変形パラメータになり, モノドロミー保存変形を記述する方程式は次の形になる:

$$\kappa \frac{\partial L(z)}{\partial z_a} = [B_a(z), L(z)] + \kappa \frac{\partial B_a(z)}{\partial z}.$$

この微分方程式は Schlesinger 方程式と呼ばれている.

この系の自然な Poisson 括弧は次のように定義される:

$$\{L_{a;ij}, L_{b;kl}\} = \delta_{ab}(\delta_{jk} L_{a;il} - \delta_{li} L_{a;kj}).$$

古典 r 行列 $r(z-w)$ を次のように定める:

$$r(z-w) = \frac{\sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji}}{z-w}.$$

このとき上の Poisson 括弧は次の母函数表示を持つことがわかる:

$$\{L(z)^1, L(w)^2\} = [L(z)^1 + L(w)^2,\ r(z-w)]. \tag{1.8}$$

ここで $L(z)^1 = L(z) \otimes 1$, $L(w)^2 = 1 \otimes L(w)$ であり, $\{A^1, B^2\}$ の定義は次の通り:

$$\left\{ \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} \otimes 1,\ \sum_{k,l} b_{kl}\, 1 \otimes E_{kl} \right\} = \sum_{i,j,k,l} \{a_{ij}, b_{kl}\} E_{ij} \otimes E_{kl}.$$

Hamiltonians の母函数 $H(z)$ と Hamiltonians H_a が次のように定義される:

$$H(z) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(z)^2 = \sum_{a=1}^{N} \left(\frac{C_a}{(z-z_a)^2} + \frac{H_a}{z-z_a} \right).$$

C_a, H_a の具体的形は次のようになる:

$$C_a = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L_a^2, \quad H_a = \sum_{b(\neq a)} \frac{\operatorname{tr}(L_a L_b)}{z_a - z_b}.$$

このとき $L(z)$ が陽に含んでいる z_a に関する偏微分を $L(z)_{z_a}$ と書くと次が成立している:

$$\{L(z), H_a\} = [B_a(z), L(z)], \quad L(z)_{z_a} = \frac{\partial B}{\partial z}. \tag{1.9}$$

よって Schlesinger 方程式は次と同値である:

$$\kappa \frac{\partial L(z)}{\partial z_a} = \{L(z), H_a\} + \kappa L(z)_{z_a}.$$

これで Schlesinger 方程式が Hamiltonian 構造を持つことがわかった.

(1.9) **の前者の等式の証明.** (1.8) と Poisson 括弧の Leibnitz 性より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{L(z)^1, (L(w)^2)^2\} = \frac{1}{2}\big(&[L(z)^1 + L(w)^2, r(z-w)]L(w)^2 \\ &+ L(w)^2[L(z)^1 + L(w)^2, r(z-w)]\big).\end{aligned}$$

この等式に第 2 成分に関するトレース $\operatorname{tr}_2 : A \otimes B \mapsto A \operatorname{tr}(B)$ を作用させる[1]. すると $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ だけを使って次が示される[2]:

$$\{L(z), H(z)\} = \operatorname{tr}_2(L(z)^1 r(z-w) L(w)^2) - \operatorname{tr}_2(L(w)^2 r(z-w) L(z)^1)$$

[1]2007 年 6 月 14 日追記. tr_2 の定義 $\operatorname{tr}_2(A \otimes B) = A \operatorname{tr}(B)$ は行列 A, B の成分が可換環の元である場合には well-defined だが, 非可換環の元である場合には well-defined ではない. $\mathcal{A}$ が $\mathbb{C}$ 上の非可換環であるとき, $\operatorname{tr}_2 : M_n(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{A})$ は自然な同型 $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} M_n(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} M_n(\mathcal{A})$ の逆写像と $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \operatorname{tr}_2 : \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C})$ と 自然な同型 $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} M_n(\mathcal{A})$ の合成として定義される. 具体的には $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ と $\alpha \in \mathcal{A}$ に対して $\operatorname{tr}_2(\alpha A \otimes B) = \alpha A \operatorname{tr}(B)$.

[2]2006 年 6 月 14 日追記. $\operatorname{tr}_2(AB) = \operatorname{tr}_2(BA)$ は行列 A, B の成分が可換環の元である場合には成立するが, 非可換環の元である場合には必ずしも成立するとは限らない. 以下 A, B, C, D は成分が可換環の元であるよ

$$
\begin{aligned}
&= L(z)\,\mathrm{tr}_2(r(z-w)L(z)^2) - \mathrm{tr}_1(r(z-w)L(w)^2)L(z) \\
&= -[\mathrm{tr}_2(r(z-w)L(w)^2), L(z)].
\end{aligned}
$$

$\mathrm{tr}_2(r(z-w)L(w)^2)$ は次のように計算される:

$$
\mathrm{tr}_2(r(z-w)L(w)^2) = \frac{L(w)}{z-w} = \frac{1}{z-w}\sum_{a=1}^{N}\frac{L_a}{w-z_a}.
$$

よって $\mathrm{tr}_2(r(z-w)L(w)^2)$ の $w = z_a$ での留数は $-B_a(z) = L_a/(z-z_a)$ に等しい. これより (1.9) が成立することがわかる. □

Schlesinger 方程式の量子化 (の Schrödinger 表示) はアフィン Lie 代数をゲージ対称性を持つ量子共形場理論における Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) 方程式に一致している ([15], [4]). この事実よりモノドロミー保存系の量子化は量子共形場理論と深く関係していそうなことがわかる.

Schlesinger 方程式は Schlesinger 変換と呼ばれる離散的な対称性を持つがその量子化はまだ構成されていない. 共形場理論において Schlesinger 変換の量子化はどのような意味を持っているのだろうか? このようにモノドロミー保存系の量子化を考えることによって量子共形場理論の側にも新しい視点がもたらされる.

KZ 方程式の解を多変数超幾何積分で構成することができることが知られている. 他の場合にも同様になっていると予想できる. ただし不確定特異点を持つ線形常微分方程式のモノドロミー保存変形の量子化の解を構成するために多変数合流型超幾何函数が必要になるだろう. このように共形場理論との関係を考えることによってモノドロミー保存系の量子化の解の形におおまかな予想を立てることが可能になる.

1.3.2 無限遠点にのみ rank 1 の不確定特異点を持つ場合

Babujian と Kitaev は [2] で次の形の線形常微分方程式のモノドロミー保存変形を量子化した:

$$
\frac{\partial Y}{\partial z} = L(z)Y, \quad L(z) = \mathrm{diag}(w_1, \cdots, w_n) + \mathrm{diag}\sum_{a=1}^{N}\frac{L_a}{z-z_a}.
$$

うな n 次正方行列であるとし, $AB = BA$ と仮定する. このとき $\mathrm{tr}_2((A\otimes C)(B\otimes D)) = \mathrm{tr}_2((B\otimes D)(A\otimes C))$ である. 実際

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_2((A\otimes C)(B\otimes D)) = \mathrm{tr}_2(AB\otimes CD) = AB\otimes \mathrm{tr}_2(CD) \\
&= BA\otimes \mathrm{tr}_2(DC) = \mathrm{tr}_2(BA\otimes DC) = \mathrm{tr}_2((B\otimes D)(A\otimes C)).
\end{aligned}
$$

特に $C^2 = 1\otimes C$, $a = B\otimes D$ について $\mathrm{tr}_2(C^2 a) = \mathrm{tr}(aC^2)$ である. これを $C = L(w)$ に適用することによって以下が導かれる:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_2\left([L(z)^1, r(z-w)]L(w)^2\right) = \mathrm{tr}_2\left(L(z)^1 r(z-w)L(w)^2\right) - \mathrm{tr}_2\left(L(w)^2 r(z-w)L(z)^1\right), \\
&\mathrm{tr}_2\left(L(w)^2[L(z)^1, r(z-w)]\right) = \mathrm{tr}_2\left(L(z)^1 r(z-w)L(w)^2\right) - \mathrm{tr}_2\left(L(w)^2 r(z-w)L(z)^1\right), \\
&\mathrm{tr}_2\left([L(w)^2, r(z-w)]L(w)^2\right) = 0, \\
&\mathrm{tr}_2\left(L(w)^2[L(w)^2, r(z-w)]\right) = 0, \\
&\mathrm{tr}_2\left(L(w)^2 r(z-w)\right) = \mathrm{tr}_2\left(r(z-w)L(w)^2\right).
\end{aligned}
$$

ここで L_a は $n \times n$ 行列である．ただし [2] で扱われているのは $n = 2$ の場合だけである．変形パラメータは z_a と w_b になる．Poisson 構造と z_a に対応する Hamiltonian は前節とまったく同じように構成される．しかし w_b に対応する Hamiltonian は別に構成しなければいけない．

この場合の量子化 (の Schrödinger 表示) は KZ 方程式を一般化した形になる．Felder たちの論文 [3] によってこの場合に量子化された場合の解が多変数合流型超幾何函数で構成できることが証明されている．しかし, この場合も Schlesinger 変換の量子化は構成されていない．

1.3.3 $A^{(1)}_{n-1}$ 型のアフィン Lie 代数に付随する系

これは Painlevé IV の対称形式とその高階化のさらなる一般化になっているので, その場合と同じ記号法をここでも使うことにする．(ただし n は奇数でなくても構わない.) 変形されるべき線形常微分方程式は次の通り:

$$\kappa z \frac{\partial Y}{\partial z} = L(z)Y, \quad L(z) = \sum_{k=0}^{m} f_k \Lambda(z)^k.$$

ここで $f_k = \mathrm{diag}(f_{1,1+k}, \ldots, f_{n,n+k})$ である．名古屋創は [11] で n, m に関するある条件のもとでモノドロミー保存系のある部分系の量子化を構成した．実はその仕事は量子化する前の段階での Hamiltonian 構造に関する新しい結果を含んでいる．不確定特異点があるケースのモノドロミー保存系で Hamiltonian 構造が明確に構成されている場合はあまり多くない．

拡大アフィン Weyl 群の双有理作用の構成は Painlevé IV の対称形式とその高階化の場合と完全に同様である．その量子化もかなり易しい．

1.3.4 奇数の準周期を持つ dressing chain

古典の場合の dressing chain に関しては [16], [17], [1] を参照せよ．3 以上の奇数の準周期 $n = 2g + 1$ を持つ dressing chain は第 2.3.1 節で説明した Painlevé IV とその高階化と同値である．この場合の量子化は筆者によって構成された．

1.3.5 Weyl 群の双有理作用の q 差分版

長谷川浩司は [7] で Kajiwara-Noumi-Yamada [5] の q 差分版の Weyl 群作用の量子化を構成した．この場合の理論は量子展開環の理論と関係しているはずなのだが, まだその点は解明されていない．

1.3.6 $A^{(1)}_1 \times A^{(1)}_{2g}$ 型の Weyl 群の双有理作用の $A^{(1)}_{2g}$ の部分

古典の場合の $A^{(1)}_{m-1} \times A^{(1)}_{n-1}$ 型の Weyl 群の双有理作用に関しては [6], [14] を参照せよ．この場合の量子化における最初の困難は出発点になる古典系で Poisson 構造が一切考慮されていないことである．

しかし筆者は $(m,n)=(2,2g+1)$ の場合は適当な q 交換関係を設定することによって $A_{2g}^{(1)}$ 型の Weyl 群作用の部分が量子化可能であることを発見した. さらにその Weyl 群作用は適当な変数変換によって長谷川が構成した q 差分版の Weyl 群作用の量子化と一致することも示せる.

古典の場合の $A_{m-1}^{(1)}\times A_{n-1}^{(1)}$ 型の Weyl 群の双有理作用の片側はある種の unipotent crystal への自然な Weyl 群双有理作用とみなせる. したがって筆者による $(m,n)=(2,2g+1)$ の場合の結果は一般の unipotent crystal の量子化という問題の出発点を与えていることになる. この問題の最初の困難は unipotent crystal の理論では Poisson 構造が一切考慮されていないことである.

2 モノドロミー保存系の量子化の例

2.1 Schlesinger 方程式の量子化

Schlesinger 方程式の量子化は [15], [4] によって得られた.

$L_{a;ij}$ $(a=1,\dots,N,\ i,j=1,\dots,n)$ は次の交換関係をみたしていると仮定する:

$$[L_{a;ij}, L_{b;kl}] = \delta_{ab}(\delta_{jk}L_{a;il} - \delta_{li}L_{a;kj}).$$

$L_{a;ij}$ たちで生成される代数は $U(\mathrm{gl}_n)^{\otimes N}$ に同型である. 各 a に対して $L_{a;ij}$ を j,i 成分に持つ行列を $L_a=\sum_{ij}L_{a;ij}E_{ij}$ と置き, 古典の場合と形式的には同様に L-operator $L(z)$ と B-operator $B_a(z)$ を次のように定義する:

$$L(z)=\sum_{a=1}^{N}\frac{L_a}{z-z_a},\quad B_a(z)=-\frac{L_a}{z-z_a}.$$

$r(z-w)$ を古典の場合と同様に次のように定める:

$$r(z-w)=\frac{\sum_{i,j}E_{ij}\otimes E_{ji}}{z-w}. \tag{2.1}$$

このとき上の交換関係は次の母函数表示を持つことがわかる:

$$[L(z)^1, L(w)^2] = [L(z)^1 + L(w)^2,\ r(z-w)]. \tag{2.2}$$

ここで $L(z)^1=L(z)\otimes 1$, $L(w)^2=1\otimes L(w)$ であり, 自然な交換子の計算より次が成立している:

$$\left[\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}\otimes 1,\ \sum_{k,l}b_{kl}\,1\otimes E_{kl}\right]=\sum_{i,j,k,l}[a_{ij},b_{kl}]E_{ij}\otimes E_{kl}.$$

Schlesinger 系の量子化の Hamilitonians H_a は古典の場合とまったく同様に次の式で定義される:

$$H(z)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}L(z)^2=\sum_{a=1}^{N}\left(\frac{C_a}{(z-z_a)^2}+\frac{H_a}{z-z_a}\right).$$

C_a, H_a の具体的形も古典の場合と完全に同じ形になる:

$$C_a=\frac{1}{2}\operatorname{tr}L_a^2,\quad H_a=\sum_{b(\neq a)}\frac{\operatorname{tr}(L_aL_b)}{z_a-z_b}.$$

このとき $L(z)$ が陽に含んでいる z_a に関する偏微分を $L(z)_{z_a}$ と書くと次が成立している:

$$[L(z), H_a] = [B_a(z), L(z)], \quad L(z)_{z_a} = \frac{\partial B_a(z)}{\partial z}. \tag{2.3}$$

したがって Hamiltonian H_a に関する Heisenberg 方程式

$$\kappa \frac{\partial L(z)}{\partial z_a} = [L(z), H_a] + \kappa L(z)_{z_a}$$

は次の Lax 方程式と同値になる:

$$\kappa \frac{\partial L(z)}{\partial z_a} = [B_a(z), L(z)] + \kappa \frac{\partial B_a(z)}{\partial z}.$$

これらの方程式を量子 Schlesinger 方程式の Heisenberg 表示と呼ぶことにする.

(2.3) の前者の等式を証明しよう.

注意 2.1 (2006 年 6 月 14 日の修正) 2006 年 3 月版における (2.3) の前者の等式の証明は誤りであった. そこでは well-defined でない tr_2 を用いていた. □

$L_{a;ij}$ たちから体 $K := \mathbb{C}(z, w, z_1, \dots, z_N)$ 上生成される代数を $\mathcal{A}$ と書き, n 次の単位行列を E と書くことにする. 線形写像 $\mathrm{tr}_2 : M_n(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{A})$ を次のように定義できる:

$$\mathrm{tr}_2(\alpha A \otimes B) = \alpha A \,\mathrm{tr}(B) \quad (A, B \in M_n(K),\ \alpha \in \mathcal{A}).$$

補題 2.2　(1) $X \in M_n(\mathcal{A})$ に対して $X^1 = X \otimes 1$ と書くと

$$\mathrm{tr}_2(X^1 y) = X \,\mathrm{tr}_2(y), \quad \mathrm{tr}_2(y X^1) = \mathrm{tr}_2(y) X \quad (y \in M_n(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} M_n(\mathcal{A})).$$

(2) $X \in M_n(\mathcal{A})$ に対して $X^2 = 1 \otimes X$ と書くと,

$$\mathrm{tr}_2(X^2 a) = \mathrm{tr}_2(a X^2) \quad (a \in M_n(K) \otimes_K M_n(K)).$$

(3) ある $c \in K$ が存在して $\mathrm{tr}_2\big((r(z-w))^2\big) = cE$.

証明. (1) $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $A, B, D \in M_n(K)$, $X = \alpha A$, $y = \beta B \otimes D$ の場合に示せば十分であり,

$$\mathrm{tr}_2(X^1 y) = \mathrm{tr}_2(\alpha\beta AB \otimes D) = \alpha\beta AB \,\mathrm{tr}(D) = \alpha A \beta B \,\mathrm{tr}(\beta D) = X \,\mathrm{tr}_2(y),$$

$$\mathrm{tr}_2(y X^1) = \mathrm{tr}_2(\beta\alpha BA \otimes D) = \beta\alpha BA \,\mathrm{tr}(D) = \beta B \,\mathrm{tr}(D) \alpha A = \mathrm{tr}_2(y) X.$$

(2) $\alpha \in \mathcal{A}$, $B, C, D \in M_n(K)$, $X = \alpha C$, $a = B \otimes D$ の場合に示せば十分であり,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_2(X^2 a) &= \mathrm{tr}_2((1 \otimes \alpha C)(B \otimes D)) = \mathrm{tr}_2(\alpha B \otimes CD) = \alpha B \,\mathrm{tr}(CD) \\ &= \alpha B \,\mathrm{tr}(DC) = \mathrm{tr}_2(\alpha B \otimes DC) = \mathrm{tr}_2((B \otimes D)(1 \otimes \alpha C)) = \mathrm{tr}_2(a X^2). \end{aligned}$$

(3) $r(z-w)$ の定義 (2.1) より

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_2\big((r(z-w))^2\big) &= \frac{1}{(z-w)^2} \sum_{i,j,k,l} \mathrm{tr}_2(E_{ij}E_{kl} \otimes E_{ji}E_{lk}) \\ &= \frac{1}{(z-w)^2} \sum_{i,j,k,l} E_{ij}E_{kl} \,\mathrm{tr}(E_{ji}E_{lk}) = \frac{1}{(z-w)^2} \sum_{i,j,k,l} E_{ij}E_{kl}\delta_{kj}\delta_{li} \\ &= \frac{1}{(z-w)^2} \sum_{i,j} E_{ij}E_{ji} = \frac{1}{(z-w)^2} \sum_{i} E_{ii} = \frac{1}{(z-w)^2} E. \quad \square \end{aligned}$$

(2.3) の前者の等式の証明. 記号の簡単のため $L^1 = L(z)^1$, $L^2 = L(w)^2$, $r = r(z-w)$ と書くことにする. 補題 2.2 (1) を $X = L(z)$, $y = (L(w)^2)^2$ に適用すると

$$[L(z), H(w)] = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_2[L(z)^1, (L(w)^2)^2] = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_2[L^1, (L^2)^2].$$

(2.2) と交換子の Leibnitz 性より,

$$\begin{aligned}
[L^1, (L^2)^k] &= \sum_{l=1}^{k} (L^2)^{l-1}[L^1 + L^2, r](L^2)^{k-l} \\
&= \sum_{l=1}^{k} (L^2)^{l-1}[L^1, r](L^2)^{k-l} + \sum_{l=1}^{k} (L^2)^{l-1}[L^2, r](L^2)^{k-l} \\
&= \sum_{l=1}^{k} (L^2)^{l-1}[L^1, r](L^2)^{k-l} + [(L^2)^k, r]
\end{aligned}$$

よって $k = 2$ のとき

$$\begin{aligned}
&[L^1, (L^2)^2] \\
&= L^2[L^1, r] + [L^1, r]L^2 + [(L^2)^2, r] \\
&= L^2L^1r - L^2rL^1 + L^1rL^2 - rL^1L^2 + [(L^2)^2, r] \\
&= (L^1L^2r - [L^1, L^2]r) - L^2rL^1 + L^1rL^2 - (rL^2L^1 + r[L^1, L^2]) + [(L^2)^2, r] \\
&= (L^1rL^2 + L^1L^2r) - (L^2rL^1 + rL^2L^1) + [(L^2)^2, r] - ([L^1 + L^2, r]r + r[L^1 + L^2, r]) \\
&= (L^1rL^2 + L^1L^2r) - (L^2rL^1 + rL^2L^1) + [(L^2)^2, r] - [L^1 + L^2, r^2] \\
&= (L^1rL^2 + L^1L^2r) - (rL^2L^1 + L^2rL^1) + [(L^2)^2, r] - [L^1, r^2] - [L^2, r^2].
\end{aligned}$$

4 つ目の等号で (2.2) を用いた. 補題 2.2 (1), (2) より

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}_2(L^1rL^2) = L(z)\operatorname{tr}_2(rL^2), \quad \operatorname{tr}_2(L^1L^2r) = L(z)\operatorname{tr}_2(L^2r) = L(z)\operatorname{tr}_2(rL^2), \\
&\operatorname{tr}_2(rL^2L^1) = \operatorname{tr}_2(rL^2)L(z), \quad \operatorname{tr}_2(L^2rL^1) = \operatorname{tr}_2(L^2r)L(z) = \operatorname{tr}_2(rL^2)L(z).
\end{aligned}$$

補題 2.2 (2) より

$$\operatorname{tr}_2[(L^2)^2, r] = 0, \quad \operatorname{tr}_2[L^2, r^2] = 0.$$

補題 2.2 (1), (3) より

$$\operatorname{tr}_2[L^1, r^2] = [L(z), \operatorname{tr}_2(r^2)] = [L(z), cE] = 0.$$

したがって

$$[L(z), H(w)] = L(z)\operatorname{tr}_2(rL^2) - \operatorname{tr}_2(rL^2)L(z) = \left[L(z), \operatorname{tr}_2\bigl(r(z-w)L(w)^2\bigr)\right].$$

$\operatorname{tr}_2(r(z-w)L(w)^2)$ は次のように計算される:

$$\operatorname{tr}_2(r(z-w)L(w)^2) = \frac{L(w)}{z-w} = \frac{1}{z-w}\sum_{a=1}^{N}\frac{L_a}{w-z_a}.$$

よって $\operatorname{tr}_2(r(z-w)L(w)^2)$ の $w = z_a$ での留数は $-B_a(z) = L_a/(z-z_a)$ に等しい. したがって $k = 2$ の場合の上の公式より (2.3) の前者の等式が導かれる. □

注意 2.3 補題 2.2 (3) が成立していなくても次が成立している:

$$[L(z), H(w)] = \left[L(z), \mathrm{tr}_2\big(r(z-w)L(w)^2 - r(z-w)^2\big)\right]. \quad \square$$

量子系では Heisenberg 表示よりも Schrödinger 表示を扱う方が便利な場合が多い. 量子 Schlesinger 方程式の Heisenberg 表示に対応する Schrödinger 方程式は次の形になる:

$$\kappa\frac{\partial\Psi}{\partial z_a} = H_a\Psi = \sum_{b(\neq a)} \frac{\Omega_{ab}}{z_a - z_b}\Psi, \quad \Omega_{ab} = \sum_{i,j} L_{a;ij}L_{b;ji}.$$

これは量子共形場理論における Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) 方程式である. すなわち Schlesinger 方程式の量子化は KZ 方程式になる.

2.2 モノドロミー保存系の量子化と量子共形場理論の関係

KZ 方程式の解を多変数超幾何積分によって構成できることが知られている. その解を KZ 方程式をそのまま扱うことによって構成することもできるが, おそろしく複雑な計算が必要になってしまう. しかし, 共形場理論の定式化でアフィン Lie 代数の boson 化 (Wakimoto 表現) を使えば系統的に多変数超幾何積分解が構成できる.

上で量子化した Schlesinger 方程式は変形される線形微分方程式の特異点がすべて確定特異点の場合である. 無限遠点だけに rank 1 の不確定特異点を持つように拡張された場合もすでに量子化が構成されている. その量子化は KZ 方程式を少し一般化した形になっている ([2]). しかもその解を合流型の多変数超幾何積分によって構成できることが示されている ([3]).

しかし Schlesinger 方程式の離散的対称性 (Schlesinger 変換) はまだ量子化されていない. 量子共形場理論でも Schlesinger 変換の対応物はまだ構成されていない.

それとは対照的に Painlevé IV の対称形式とその高階化およびそれらのさらなる一般化ではむしろ離散的対称性である Weyl 群双有理作用の量子化の方が易しくなっている (後で詳しく説明する). そちらの方ではモノドロミー保存系の量子化の Schrödinger 方程式の解は KZ 方程式とその一般化の場合と違ってまだ構成されていない.

筆者は最も楽観的に「ある特定の系に示された結果は実は一般的にすべての系で成立しているだろう」と予想している. 基本的な予想は以下のようにまとめられる.

予想 2.4 モノドロミー保存系はどれも量子共形場理論の枠組みを使って量子化可能である. ただし必要があれば量子共形場理論の枠組み自体を拡張しなければいけない. また q 差分版のモノドロミー保存系の量子化では量子共形場理論の q 差分版が必要になる. $\square$

予想 2.5 モノドロミー保存系の量子化の Schrödinger 方程式の解を多変数超幾何積分によって構成可能である. ただし不確定特異点がある場合には合流型の超幾何積分が必要になる. しかもその解はアフィン Lie 代数の boson 化を用いて構成可能である. $\square$

予想 2.4 と予想 2.5 は Schlesinger 方程式に関してはすでに証明されている. しかし Schlesinger 変換の量子化はまだ構成されていないし, 離散的対称性が量子化されている場合でも量子共形場理論の枠組みで解釈できてない.

2.3 Painlevé IV の対称形式とその高階化の量子化

離散的対称性も含めた量子化に関しては第 2.3.1 節で詳しく解説した Painlevé IV とその高階化の量子化がもっともわかり易い.

$n \times n$ の行列単位を E_{ij} と書き, その添字 i, j を n 周期的に整数全体に拡張しておき, $\Lambda(z) = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + zE_{n1}$ と置く.

2.3.1 代数の量子化と L-operator

古典の場合 (第 2.3.1 節) とは違って ε_i, f_i たちは互いに可換ではなく, 次の交換関係を満たしていると仮定する:

$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0, \quad [\varepsilon_i, f_j] = 0, \quad [f_i, f_j] = \begin{cases} \mp\hbar & (i \equiv j \pm 1), \\ 0 & (i \not\equiv j \pm 1). \end{cases}$$

第 2.3.1 節と同様に次を仮定する:

$$\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i + \kappa, \quad f_{i+n} = f_i, \quad \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}.$$

このとき $\alpha_{i+n} = \alpha_i$ である. さらに $A_{n-1}^{(1)}$ 型の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の生成元 ω, s_i のコピー $\tilde{\omega}$, $\tilde{s}_i$ を用意し, 次の関係式を仮定する:

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}\varepsilon_j\tilde{\omega}^{-1} = \varepsilon_{j+1}, && \tilde{\omega}f_j\tilde{\omega}^{-1} = f_{j+1}, \\ &\tilde{s}_i\varepsilon_j\tilde{s}_i^{-1} = \begin{cases} \varepsilon_{j+1} & (j \equiv i), \\ \varepsilon_{j-1} & (j \equiv i+1), \\ \varepsilon_j & (j \not\equiv i, i+1), \end{cases} && \tilde{s}_i f_j \tilde{s}_i^{-1} = f_j. \end{aligned}$$

$\tilde{s}_i$ による conjugation は ε_j だけに非自明に作用し, その作用は形式的に の s_i の ε_j たちへの作用に一致していることに注意せよ.

$\tilde{\omega}$, $\tilde{s}_i$ による conjugation は α_j には次のように作用している:

$$\tilde{\omega}\alpha_j\tilde{\omega}^{-1} = \alpha_{j+1}, \quad \tilde{s}_i\alpha_j\tilde{s}_i^{-1} = \begin{cases} -\alpha_i & (j \equiv i), \\ \alpha_j + \alpha_i & (j \equiv i \pm 1), \\ \alpha_j & (j \not\equiv i, i \pm 1). \end{cases}$$

L-operator を次のように定める:

$$L(z) = \varepsilon + f\Lambda(z) + \Lambda(z)^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & f_1 & 1 & & \\ & \varepsilon_2 & f_2 & \ddots & \\ & & \varepsilon_3 & \ddots & 1 \\ z & & & \ddots & f_{n-1} \\ zf_n & z & & & \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

ここで $\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $f = \mathrm{diag}(f_1, \dots, f_n)$ である.

2.3.2 Weyl 群作用の量子化

U_i を次のように定める:

$$U_i = f_i^{-\alpha_i/\hbar}\tilde{s}_i.$$

$\tilde{\omega}$, U_i は $A_{n-1}^{(1)}$ 型の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の関係式を満たしている:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\omega}U_i = U_{i+1}\tilde{\omega}, \quad U_{i+n} = U_i, \\
&U_i^2 = 1, \quad U_iU_j = U_jU_i \ \ (j \not\equiv i \pm 1), \quad U_iU_{i+1}U_i = U_{i+1}U_iU_{i+1}.
\end{aligned}$$

注意 2.6 f_i たちの交換関係は Serre 関係式

$$[f_i, f_j] = 0 \ \ (j \not\equiv i \pm 1), \quad [f_i, [f_i, f_j]] = 0 \ \ (j \equiv i \pm 1)$$

の十分条件になっている. 実は U_i たちが上の関係式を満たしていることを Serre 関係式のみを使って示すことができる. □

したがって ε_i, f_i で生成される斜体に拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の作用を次のように定めることができる:

$$\omega(a) = \tilde{\omega}a\tilde{\omega}^{-1}, \quad s_i(a) = U_iaU_i^{-1} \qquad (a = \varepsilon_j, f_j).$$

この作用を量子化された拡大アフィン Weyl 群双有理作用と呼ぶことにする. この作用は形式的には古典の場合と完全に同じ形をしている:

$$\begin{aligned}
&\omega(\varepsilon_j) = \varepsilon_{j+1}, && \omega(f_j) = f_{j+1}, \\
&s_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} \varepsilon_{j+1} & (j \equiv i), \\ \varepsilon_{j-1} & (j \equiv i+1), \\ \varepsilon_j & (j \not\equiv i, i+1), \end{cases} && s_i(f_j) = \begin{cases} f_j \pm \dfrac{\alpha_i}{f_i} & (j \equiv i \pm 1), \\ f_j & (j \not\equiv i \pm 1). \end{cases}
\end{aligned}$$

Weyl 群作用の Lax 表示も古典の場合と完全に同じ形で成立している. すなわち

$$G_i(z) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\alpha_i}{f_i}E_{i+1,i} & (i \not\equiv n), \\ 1 + z^{-1}\dfrac{\alpha_i}{f_i}E_{i+1,i} & (i \equiv n) \end{cases}$$

と置くと次が成立している:

$$\begin{aligned}
\omega\left(\kappa z\frac{\partial}{\partial z} - L(z)\right) &= \Lambda(z)\left(\kappa z\frac{\partial}{\partial z} - L(z)\right)\Lambda(z)^{-1}, \\
s_i\left(\kappa z\frac{\partial}{\partial z} - L(z)\right) &= G_i(z)\left(\kappa z\frac{\partial}{\partial z} - L(z)\right)G_i(z)^{-1}.
\end{aligned}$$

注意 2.7 古典の場合と形式的に完全に同じ式で量子の場合も作用が定義できることは名古屋 [10] で初めて注意された. f_i のべきによる conjugation でその作用が実現できることは筆者によって発見された新事実である. f_i のべきによる conjugation で Weyl 群の作用が構成できるという結果は Serre 関係式だけを使って証明できるので一般の Kac-Moody Lie 代数に対応する場合に拡張可能である. □

2.3.3 Hamiltonian の量子化

簡単のため $n=2g+1$ は 3 以上の奇数であると仮定する. この節で説明する結果は名古屋創の仕事 [10], [11] の部分集合である.

Hamiltonian H を古典の場合と同じように次の式で定める:

$$H = \left(\frac{1}{g+2}\operatorname{tr} L(z)^{g+2} \text{ における } z \text{ の係数}\right).$$

ε_i, f_i で生成される代数に derivation $a \mapsto a_t$ を

$$\varepsilon_{i,t} = 0, \quad f_{i,t} = \kappa\delta_{i\equiv n}$$

と定めることができる. この derivation は可積分系の構成では必要ないが, モノドロミー保存系の構成においては本質的な役割を果たす.

このとき古典の場合とまったく同様に

$$B(z) = (f + f^{[2]} + \cdots + f^{[2g]}) + \Lambda(z). \tag{2.4}$$

と定めると次が成立している:

$$\hbar^{-1}[H, L(z)] = [B(z), L(z)], \quad L(z)_t = \kappa z\frac{\partial B(z)}{\partial z}.$$

したがって Hamiltonian H に関する Heisenberg 方程式

$$\frac{\partial L(z)}{\partial z} = \hbar^{-1}[H, L(z)] + L(z)_t$$

は次の Lax 方程式と同値になる:

$$\frac{\partial L(z)}{\partial z} = [B(z), L(z)] + \kappa z\frac{\partial B(z)}{\partial z}.$$

例 2.8 (量子 Painlevé IV の対称形式の場合) $n=3$ のとき

$$H = f_1f_2f_3 + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)f_1 + (\varepsilon_2+\varepsilon_3)f_2 + (\varepsilon_3+\varepsilon_1)f_3 + \hbar\left(-\frac{1}{3}f_1 + \frac{2}{3}f_2 - \frac{1}{3}f_3\right).$$

この式は古典の場合の式に $\hbar$ に比例した補整項が付け加わった形をしている. f_i たちの並べる順番を工夫すれば $n \geqq 5$ では補整項を消すことができる. $n=3$ の H の具体的な形および $[f_{i\pm1}, f_i] = \pm\hbar$ から直接的計算によって容易に次が成立することを示せる:

$$\hbar^{-1}[H, f_i] + f_{i,t} = f_{i-1}f_i - f_if_{i+1} - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}).$$

これは $\hbar^{-1}[H, L(z)] + L(z)_t = [B(z), L(z)] + \kappa\partial B(z)/\partial z$ と同値である. □

n が 5 以上の奇数の場合でも方程式を具体的に書き下すこともできる. n が 3 以上の奇数のとき上の方程式は次と同値である:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \left(\sum_{k=1}^{g} f_{i+2k}\right)f_i - f_i\left(\sum_{k=1}^{g} f_{i+2k-1}\right) - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}).$$

$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1 + \kappa$ と仮定したので $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \varepsilon_1 - \kappa$ である.

2.4 奇数の準周期を持つ dressing chain の量子化

$n = 2g+1$ は 3 以上の奇数であるとし, κ は固定された定数であるとする.

2.4.1 代数の量子化と L-operator

ε_i, v_i から生成され, 次の基本関係式を持つ代数を考える:

$$\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i + \kappa, \quad v_{i+n} = v_i,$$
$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0, \quad [\varepsilon_i, v_j] = 0, \quad [v_i, v_j] = (-1)^{j-i}\hbar \quad (i < j < i+n).$$

もしも n が偶数であれば $i < j < i+n$ のとき $j < i+n < j+n$ より

$$[v_i, v_j] = [v_{i+n}, v_j] = -[v_j, v_{i+n}] = (-1)^{i+n-j+1}\hbar = -(-1)^{i-j}\hbar = -[v_i, v_j]$$

となり矛盾する. 最初に仮定したように n は奇数でなければいけない.

v_i たちから生成される代数は第 2.3 節 における f_i たちから生成される代数と次の対応によって同一視される:

$$f_i = v_i + v_{i+1}, \quad v_i = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f_{i+k} = \frac{1}{2}(f_i - f_{i+1} + \cdots - f_{i+n-2} + f_{i+n-1}).$$

変数変換 $f_i = v_i + v_{i+1}$ が v_i について逆に解けるための必要十分条件は n が奇数であることである.

ε_i, v_i たちで生成される代数の自己同型 ω を次のように定める:

$$\omega(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i+1}, \quad \omega(v_i) = v_{i+1}.$$

局所 L-operator $V_i(w)$ を次のように定める:

$$V_i(w) = \begin{bmatrix} v_i & 1 \\ v_i^2 - \varepsilon_i + w & v_i \end{bmatrix}.$$

$V_i(w)$ は $\omega(V_i(w)) = V_{i+1}(w)$ および次の準周期性を満たしている:

$$V_{i+n}(w) = V_i(w-\kappa).$$

モノドロミー行列 $\mathbb{V}_i(w)$ を次のように定める:

$$\mathbb{V}_i(w) = V_i(w)V_{i+1}(w)\cdots V_{i+n-1}(w).$$

注意 2.9 (行列式公式) $\hbar = 0$ のとき次の公式が成立していることを示せる:

$$\det(L(z) - w) = \det(\mathbb{V}_1(w) + (-1)^{n-1}z).$$

ここで $L(z)$ は 第 2.3.1 節 で定義した $n \times n$ の L-operator である. この形の公式が n の偶奇によらず一般的に成立していることを直接的計算によって示せる. そのためにはまず余因子展開によって左辺を n に関して帰納的に計算するための公式を作る. 次に

$$V_i(w) = P_i F_i(w) P_{i+1}^{-1}, \quad F_i(w) = \begin{bmatrix} f_i & 1 \\ w - \varepsilon_i & 0 \end{bmatrix}, \quad P_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v_i & 1 \end{bmatrix}$$

であることに注意し, $F_1(w)\cdots F_n(w)$ を n に関して帰納的に計算するための公式を作る. 最後にそれらを比較すれば上の公式が証明される. □

2.4.2 Weyl 群作用の量子化

整数 i, j が $\operatorname{mod} n$ で等しいとき $i \equiv j$ と書く.

s_i の ε_j, v_j たちへの作用を $V_j(w)$ を用いた次の母函数表示によって定義できる:

$$\begin{aligned}
&\det s_i(V_i(w)) = \det V_{i+1}(w),\\
&\det s_i(V_{i+1}(w)) = \det V_i(w),\\
&s_i(V_i(w))s_i(V_{i+1}(w)) = V_i(w)V_{i+1}(w),\\
&s_i(V_j(w)) = V_j(w) \quad (j \not\equiv i, i+1).
\end{aligned}$$

各 ε_j, v_j への s_i の作用の具体形の計算には ε_j, v_j の交換関係は必要ない. その結果は次のようになる:

$$s_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} \varepsilon_{j+1} & (j \equiv i), \\ \varepsilon_{j-1} & (j \equiv i+1), \\ \varepsilon_j & (j \not\equiv i, i+1), \end{cases} \qquad s_i(v_j) = \begin{cases} v_j - \dfrac{\alpha_i}{v_i + v_{i+1}} & (j \equiv i), \\ v_j + \dfrac{\alpha_i}{v_i + v_{i+1}} & (j \equiv i), \\ v_j & (j \not\equiv i, i+1). \end{cases}$$

ここで第 2.3 節と同様に $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ と置いた.

証明の方針. $\det s_i(V_i(w)) = \det V_{i+1}(w)$, $\det s_i(V_{i+1}(w)) = \det V_i(w)$ はそれぞれ $s_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i+1}$, $s_i(\varepsilon_{i+1}) = \varepsilon_i$ と同値である. $s_i(V_i(w))s_i(V_{i+1}(w)) = V_i(w)V_{i+1}(w)$ の両辺の第 $(1,2)$ 成分の比較より $s_i(v_i + v_{i+1}) = v_i + v_{i+1}$ である. よって両辺の第 $(1,1)$, $(2,2)$ 成分の比較よりそれぞれ $s_i(v_i) = v_i - \frac{\alpha_i}{v_i+v_{i+1}}$, $s_i(v_{i+1}) = v_{i+1} + \frac{\alpha_i}{v_i+v_{i+1}}$ が出る. これらの結果から両辺の第 $(2,1)$ 成分が等しいことが導かれる. □

上の s_i の作用が v_j たちの交換関係を保つことは容易に確かめられる. さらに s_i の $f_j = v_j + v_{j+1}$ たちへの作用が第 2.3 節で構成された s_i の作用に一致していることも容易に確かめられる. 特に s_i の v_j たちへの作用は $f_i^{-\alpha_i/\hbar} = (v_i + v_{i+1})^{-(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})/\hbar}$ による conjugation で実現可能である.

ω の作用はモノドロミー行列 $\mathbb{V}_i(w)$ のゲージ変換として解釈されることを説明しよう. $V_{i+n}(w) = V_i(w-\kappa)$ より差分作用素として次の公式が成立している:

$$e^{\kappa\partial/\partial w} V_{i+n}(w) e^{-\kappa\partial/\partial w} = V_i(w).$$

ここで $e^{\kappa\partial/\partial w}$ は w を $w+\kappa$ に移す差分作用素である. よって

$$\begin{aligned}
&V_{i+n}(w)^{-1} e^{-\kappa\partial/\partial w} \mathbb{V}_i(w) V_{i+n}(w)\\
&= e^{-\kappa\partial/\partial w} V_i(w)^{-1} V_i(w) V_{i+1}(w) \cdots V_{i+n-1}(w) V_{i+n}(w)\\
&= e^{-\kappa\partial/\partial w} V_{i+1}(w) \cdots V_{i+n-1}(w) V_{i+n}(w) = e^{-\kappa\partial/\partial w} \mathbb{V}_{i+1}(w) = \omega(e^{-\kappa\partial/\partial w} \mathbb{V}_i(w)).
\end{aligned}$$

すなわち ω の作用は形式的に 2 つの差分方程式

$$Y_{i+n}(w+\kappa) = \mathbb{V}_i(w) Y_{i+n}(w), \quad Y_{i+n+1}(w+\kappa) = \mathbb{V}_{i+1}(w) Y_{i+n+1}(w)$$

のあいだをつなぐ $V_{i+n}(w)$ による次のゲージ変換を誘導する:

$$Y_{i+n}(w) = V_{i+n}(w) Y_{i+n+1}(w).$$

注意 2.10 $Y_i(w) = V_i(w) Y_{i+1}(w)$ が成立しているならば $Y_i(w) = \mathbb{V}_i(w) Y_{i+n}$ が成立している. そのとき $Y_{i+n}(w+\kappa) = \mathbb{V}_i(w) Y_{i+n}(w)$ は $Y_{i+n}(w) = Y_i(w-\kappa)$ に同値である. □

2.4.3 Hamiltonian の量子化

転送行列 (transfer matrix) $T_i(w)$ を次のように定める:

$$T_i(w) = \operatorname{tr} \mathbb{V}_i(w) = \operatorname{tr}\left(V_i(w)V_{i+1}(w)\cdots V_{i+n-1}(w)\right).$$

次が成立している:

$$T_{i+1}(w) = T_i(w)|_{\varepsilon_i\mapsto\varepsilon_i+\kappa} = \operatorname{tr}\left(V_i(w-\kappa)V_{i+1}(w)\cdots V_{i+n-1}(w)\right).$$

定義より

$$T_{i+1}(w) = \operatorname{tr}\left(V_{i+1}(w)\cdots V_{i+n-1}(w)V_{i+n}(w)\right) = \operatorname{tr}\left(V_{i+1}(w)\cdots V_{i+n-1}(w)V_i(w-\kappa)\right)$$

であるから, もしも $V_j(w)$ たちの成分が互いに可換であれば上の公式は自明である. しかし非可換環の元を成分に持つ行列 A, B に関しては一般に $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ が成立しないので上の公式は非自明である. さらに次のように転送行列の可換性も成立している:

$$T_i(z)T_i(w) = T_i(w)T_i(z).$$

この公式も非自明である. 転送行列の可換性から互いに可換な Hamiltonians を以下のように構成できる.

$T_i(w)$ は w の g 次式になる ($n = 2g+1$). そこで Hamiltonian $H_{i;k}$ を次のように定める:

$$H_{i;k} = (T_i(w) \text{ における } w^{g-k} \text{ の係数}).$$

$H_{i;k}$ は v_j たちの $2k+1$ 次式になる. 転送行列の可換性より各 i ごとに $H_{i;0}, H_{i;1}, \dots, H_{i;g}$ は互いに可換である. $H_{i;0} = 2\sum_{i=1}^n v_i$ はすべての v_j と可換になるので 3 次式の $H_{i;1}$ が非自明な Hamiltonian で次数が最低のものになる. 上の $T_{i+1}(w) = T_i(w)|_{\varepsilon_i\mapsto\varepsilon_i+\kappa}$ という公式より $H_{i+1;k} = H_{i;k}|_{\varepsilon_i\mapsto\varepsilon_i+\kappa}$ となるので, 本質的には $H_{1;k}$ だけを扱えば十分である. そこで次のように置く:

$$H = H_{1;1} = \left(\operatorname{tr}\left(V_1(w)\cdots V_n(w)\right) \text{ における } w^{g-1} \text{ の係数}\right).$$

この H の具体形は次のようになる:

$$H = \sum_{1\le i<j\le n}(v_i v_j^2 + v_i^2 v_j) + 2\sum_{1\le i<j<k\le n} v_i v_j v_k + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i - \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \sum_{i=1}^n v_i.$$

最後の項はすべての v_j と可換である. たとえば $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} H &= v_1^2 v_2 + v_1 v_2^2 + v_1^2 v_3 + v_1 v_3^2 + v_2^2 v_3 + v_2 v_3^2 + 2v_1 v_2 v_3 \\ &\quad + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_3 v_3 - (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)(v_1+v_2+v_3). \end{aligned}$$

直接的計算によって次が成立していることを示せる:

$$\hbar^{-1}[H, v_i] = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k v_{i+k}^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \varepsilon_{i+k} + (1-(-1)^{i-1})\frac{\kappa}{2} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

この公式をすべての整数 i に拡張できないことに注意せよ.

2.4.4 Heisenberg 方程式の Lax 表示

第 2.3.3 節で定義した derivation

$$\varepsilon_{i,t} = 0, \quad f_{i,t} = \kappa\delta_{i\equiv n}$$

は $v_i = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f_{i+k}$ より $v_1, \dots, v_n$ に次のように作用する:

$$v_{i,t} = (-1)^{n-i}\frac{\kappa}{2} = (-1)^{i-1}\frac{\kappa}{2} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

n は奇数なのでこの公式をすべての整数 i には拡張できないことに注意せよ.

次の Heisenberg 方程式を準周期 $n = 2g + 1$ を持つ量子 dressing chain と呼ぶ:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \hbar^{-1}[H, v_i] + v_{i,t} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k v_{i+k}^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \varepsilon_{i+k} + \frac{\kappa}{2} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

n は奇数なのでこの公式はすべての整数 i に拡張可能である:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \varepsilon_{i+n+k} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \varepsilon_{i+k} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \kappa = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \varepsilon_{i+k}.$$

$W_i(w)$ を次のように定める:

$$W_i(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ w_i + w & 0 \end{bmatrix}, \quad w_i = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_{i+k}^2 - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \varepsilon_{i+k} + \frac{\kappa}{2}.$$

このとき $w_{i+n} = w_i - \kappa$, $W_{i+n}(w) = W_i(w - \kappa)$ が成立している.

直接的計算によって Lax 方程式

$$\frac{\partial V_i(w)}{\partial t} = W_i(w)V_i(w) - V_i(w)W_{i+1}(w)$$

が次と同値であることを確認できる:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = w_i - v_i^2 - \varepsilon_i = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k v_{i+k}^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \varepsilon_{i+k} + \frac{\kappa}{2}.$$

これは上の Heisenberg 方程式そのものである. したがって次が成立している:

$$\hbar^{-1}[H, V_i(w)] + V_i(w)_t = W_i(w)V_i(w) - V_i(w)W_{i+1}(w).$$

注意 2.11 上の Lax 方程式は形式的に次の線形微分方程式系の両立条件に等しい:

$$Y_i(w) = V_i(w)Y_{i+1}(w), \quad \frac{\partial Y_i(w)}{\partial t} = W_i(w)Y_i(w). \quad \square$$

注意 2.12 量子 dressing chain の Hamiltonian を単に H と書き, 第 2.3.3 節で定義された Painlevé IV とその高階化の量子化の Hamiltonian を H' と書くことにする. $f_i = v_i + v_{i+1}$ より

$$\hbar^{-1}[H, f_i] + f_{i,t} = v_i^2 - v_{i+1}^2 - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}).$$

これに $v_i = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f_{i+k}$ を代入すれば

$$\hbar^{-1}[H, f_i] + f_{i,t} = \left(\sum_{k=1}^{g} f_{i+2k}\right) f_i - f_i \left(\sum_{k=1}^{g} f_{i+2k-1}\right) - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}).$$

この公式の H を H' で置き換えた公式も成立しているのであった. したがって H と H' の差は f_i たちで生成される代数の中心に属する. より精密には次が成立している:

$$H' = H + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i + \frac{g}{g+2}\hbar\right)\sum_{i=1}^{n} v_i. \quad \square$$

2.5　$(2, 2g+1)$ 型の unipotent crystal の量子化

$n = 2g+1$ は 3 以上の奇数であるとし, p, q は可逆な定数もしくは不定元であるとし, $q^2 \neq 1$ と仮定する. q は q 差分化のパラメータであり, $p = q^{\kappa/\hbar}$ と考える. 2 つの整数 i, j が $\bmod n$ で等しいとき $i \equiv j$ と書く.

2.5.1　代数の量子化

x_i, y_i は以下の基本関係式を満たしていると仮定する:

$$\begin{aligned}
&x_{i+n} = p^{-1} x_i, \quad y_{i+n} = p^{-1} y_i, \\
&x_i y_i = y_i x_i, \\
&x_j x_i = q^{(-1)^{j-i-1}} x_i x_j && (i < j < i+n), \\
&y_j x_i = q^{(-1)^{j-i}} x_i y_j && (i < j < i+n), \\
&x_j y_i = q^{(-1)^{j-i}} y_i x_j && (i < j < i+n), \\
&y_j y_i = q^{(-1)^{j-i-1}} y_i y_j && (i < j < i+n).
\end{aligned}$$

例えば $n \geqq 5$ のとき

$$\begin{aligned}
&x_{i+1} x_i = q x_i x_{i+1}, \quad x_{i+2} x_i = q^{-1} x_i x_{i+2}, \ x_{i+3} x_i = q x_i x_{i+3}, \quad x_{i+4} x_i = q^{-1} x_i x_{i+4}, \\
&y_{i+1} x_i = q^{-1} x_i y_{i+1}, \ y_{i+2} x_i = q x_i y_{i+2}, \quad y_{i+3} x_i = q^{-1} x_i y_{i+3}, \ y_{i+4} x_i = q x_i y_{i+4}.
\end{aligned}$$

もしも n が偶数ならば $i < j < i+n$ のとき $j < i+n < j+n$ より

$$p^{-1} x_i x_j = x_{i+n} x_j = q^{(-1)^{i+n-j-1}} x_j x_{i+n} = p^{-1} q^{(-1)^{i-j-1}} x_j x_i = p^{-1} q^{2(-1)^{j-i-1}} x_i x_j$$

となり $q^2 = 1$ が導かれてしまう. 最初に仮定したように n は奇数でなければならない.

上の関係式のもとで

$$t_i = x_i y_i, \quad c_{x,i} = x_i x_{i+1} \cdots x_{i+n-1}, \quad c_{y,i} = y_i y_{i+1} \cdots y_{i+n-1}$$

はすべての x_j, y_j と可換になり, 次が成立している:

$$t_{i+n} = p^{-2} t_i, \quad c_{x,i+1} = p^{-1} c_{x,i}, \quad c_{y,i+1} = p^{-1} c_{y,i}.$$

2.5.2 $A_{2g}^{(1)}$ 型の Weyl 群作用

拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の x_j, y_j たちで生成される斜体への作用を次によって定めることができる:

$$
\begin{aligned}
&\omega(x_j) = x_{j+1}, \quad \omega(y_j) = y_{j+1},\\
&s_i(x_j) = \begin{cases} x_j - \dfrac{t_j - t_{j+1}}{y_j + x_{j+1}} = (x_j + y_{j+1})x_{j+1}(y_j + x_{j+1})^{-1} & (j \equiv i),\\ x_j + \dfrac{t_{j-1} - t_j}{x_{j-1} + y_j} = (x_{j-1} + y_j)^{-1}x_{j-1}(y_{j-1} + x_j) & (j \equiv i+1),\\ x_j & (j \not\equiv i, i+1),\end{cases}\\
&s_i(y_j) = \begin{cases} y_j - \dfrac{t_j - t_{j+1}}{x_j + y_{j+1}} = (y_j + x_{j+1})y_{j+1}(x_j + y_{j+1})^{-1} & (j \equiv i),\\ y_j + \dfrac{t_{j-1} - t_j}{y_{j-1} + x_j} = (y_{j-1} + x_j)^{-1}y_{j-1}(x_{j-1} + y_j) & (j \equiv i+1),\\ x_j & (j \not\equiv i, i+1).\end{cases}
\end{aligned}
$$

ω, s_i は $t_j = x_j y_j$ たちに次のように作用する:

$$
\omega(t_i) = t_{i+1}, \quad s_i(t_j) = \begin{cases} t_{j+1} & (j \equiv i),\\ t_{j-1} & (j \equiv i+1),\\ t_j & (j \not\equiv i, i+1).\end{cases}
$$

$y_j = t_j/x_j$ より, s_i の作用が x_j, y_j たちの基本関係式を保つことを示すためには s_i の作用が x_j たちの基本関係式を保つことのみを示せば十分であり, そのことを示すのは易しい. しかし上の作用が拡大アフィン Weyl 群の基本関係式を満たしていることを直接示そうとするとかなり面倒な計算が必要になる.

s_i の作用が x_j たちの基本関係式を保つことの証明. $s_i(x_i)$, $s_i(x_{i+1})$ を次のように表わすこともできる:

$$
\begin{aligned}
s_i(x_i) &= (x_i + y_{i+1})x_{i+1}(x_i(x_{i+1} + y_i))^{-1}x_i\\
&= \frac{x_i x_{i+1} + t_{i+1}}{x_i x_{i+1} + t_i}x_i = x_i\frac{q x_i x_{i+1} + t_{i+1}}{q x_i x_{i+1} + t_i}, \qquad (2.5)\\
s_i(x_{i+1}) &= x_{i+1}((x_i + y_{i+1})x_{i+1})^{-1}x_i(x_{i+1} + y_i)\\
&= x_{i+1}\frac{x_i x_{i+1} + t_i}{x_i x_{i+1} + t_{i+1}} = \frac{q x_i x_{i+1} + t_i}{q x_i x_{i+1} + t_{i+1}}x_{i+1}. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

よって

$$
s_i(x_{i+1})s_i(x_i) = x_{i+1}x_i = q x_i x_{i+1} = q s_i(x_i)s_i(x_{i+1}).
$$

$i+2 \le j \le i+n-2$ のとき

$$
\begin{aligned}
x_j(x_{i+1} + y_i) &= q^{(-1)^{j-(i+1)-1}}x_{i+1}x_j + q^{(-1)^{j-i}}y_i x_j = q^{(-1)^{j-i}}(x_{i+1} + y_i)x_j,\\
x_j(x_i + y_{i+1}) &= q^{(-1)^{j-i-1}}x_i x_j + q^{(-1)^{j-(i+1)}}y_{i+1}x_j = q^{(-1)^{j-i-1}}(x_i + y_{i+1})x_j
\end{aligned}
$$

より

$$x_j(x_{i+1}+y_i)^{-1} = q^{(-1)^{j-i-1}}(x_{i+1}+y_i)^{-1}x_j,$$
$$x_j(x_i+y_{i+1})^{-1} = q^{(-1)^{j-(i+1)-1}}(x_i+y_{i+1})^{-1}x_j$$

であるから,

$$\begin{aligned}
&s_i(x_j)s_i(x_i) = x_j(x_i - \alpha_i(x_{i+1}+y_i)^{-1}) \\
&\quad = q^{j-i-1}(x_i - \alpha_i(x_{i+1}+y_i)^{-1})x_j = q^{j-i-1}s_i(x_i)s_i(x_j), \\
&s_i(x_j)s_i(x_{i+1}) = x_j(x_{i+1} + \alpha_i(x_i+y_{i+1})^{-1}) \\
&\quad = q^{(-1)^{j-(i+1)-1}}(x_{i+1} + \alpha_i(x_i+y_{i+1})^{-1})x_j = q^{(-1)^{j-(i+1)-1}}s_i(x_{i+1})s_i(x_j). \quad \square
\end{aligned}$$

2.5.3 Weyl 群作用の 2×2 行列による Lax 表示

2×2 の局所 L-operator $K_i(w)$ を次のように定める:

$$K_i(w) = \begin{bmatrix} x_i & 1 \\ w & y_i \end{bmatrix}.$$

ω,s_i の x_j, y_j たちへの作用は次の条件で一意に特徴付けられる:

$$\begin{aligned}
&\det s_i(K_i(w)) = \det K_{i+1}(w), \\
&\det s_i(K_{i+1}(w)) = \det K_i(w), \\
&s_i(K_i(w))s_i(K_{i+1}(w)) = K_i(z)K_{i+1}(w), \\
&s_i(K_j(w)) = K_j(w) \quad (j \not\equiv i, i+1).
\end{aligned}$$

この特徴付けの証明には x_j, y_j たちの基本関係式を使わない. 第 2.4.2 節との類似に注意せよ.

ω の x_i, y_i たちへの作用は以下のようにモノドロミー行列のゲージ変換として解釈される. p 差分作用素 $T_{w,p}$ を次のように定義する:

$$T_{w,p} = p^{-2w\partial/dw - H_P}, \quad H_P = \mathrm{diag}(1/2, -1/2).$$

すなわち

$$T_{w,p}Y(w) = \mathrm{diag}(p^{-1/2}, p^{1/2})Y(p^{-2}w).$$

$U_i(w)$ を次のように定める:

$$U_i(w) = w^{-1/2}K_i(w).$$

モノドロミー行列 $\mathbb{K}_i(w)$ を次のように定める:

$$\mathbb{U}_i(w) = U_i(w)U_{i+1}(w)\cdots U_{i+n-1}(w).$$

$\omega(\mathbb{U}_i(w)) = \mathbb{U}_{i+1}(w)$ が成立している.

このとき p 差分作用素として次の等式が成立している:

$$T_{w,p}U_{i+n}(w)T_{w,p}^{-1} = U_i(w).$$

よって

$$
\begin{aligned}
&U_{i+n}(w)^{-1}T_{w,p}^{-1}\mathbb{U}_i(w)U_{i+n}(w)\\
&= T_{w,p}^{-1}U_i(w)^{-1}U_i(w)U_{i+1}(w)\cdots U_{i+n-1}(w)U_{i+n}(w)\\
&= T_{w,p}^{-1}U_{i+1}(w)\cdots U_{i+n-1}(w)U_{i+n}(w) = T_{w,p}^{-1}\mathbb{U}_{i+1}(w) = \omega(T_{w,p}^{-1}\mathbb{U}_i(w)).
\end{aligned}
$$

すなわち ω の作用は形式的に 2 つの p 差分方程式

$$
T_{w,p}Y_{i+n}(w) = \mathbb{U}_i(w)Y_{i+n}(w), \quad T_{w,p}Y_{i+n+1}(w) = \mathbb{U}_{i+1}(w)Y_{i+n+1}(w)
$$

のあいだをつなぐ $U_{i+n}(w)$ による次のゲージ変換を誘導する:

$$
Y_{i+n}(w) = U_{i+n}(w)Y_{i+n+1}(w) = w^{-1/2}K_{i+n}(w)Y_{i+n+1}(w).
$$

注意 2.13 $Y_i(w) = U_i(w)Y_{i+1}(w)$ が成立しているならば $Y_i(w) = \mathbb{U}_i(w)Y_{i+n}$ が成立している. そのとき $T_{w,p}Y_{i+n}(w) = \mathbb{U}_i(w)Y_{i+n}(w)$ は $Y_{i+n}(w) = T_{w,p}^{-1}Y_i(w)$ に同値である. □

2.5.4 Weyl 群作用の $\infty\times\infty$ 行列による Lax 表示

∞ 次の行列単位を E_{ij} $(i,j\in\mathbb{Z})$ と書くことにし, Λ を次のように定める:

$$
\Lambda = \sum_{i\in\mathbb{Z}} E_{i,i+1}.
$$

$\infty\times\infty$ の局所 L-operator L_1, L_2 を次のように定める:

$$
L_1 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} x_i E_{ii} + \Lambda, \quad L_2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} y_i E_{ii} + \Lambda.
$$

L_1 は次のような形をしている:

$$
L_1 = \begin{bmatrix}
\ddots & \ddots & & & & \\
& x_{-1} & 1 & & & \\
& & x_0 & 1 & & \\
& & & x_1 & 1 & \\
& & & & x_2 & \ddots \\
& & & & & \ddots
\end{bmatrix}.
$$

L_2 は L_1 の中の x_i を y_i で置き換えたものに等しい.

$G_{1;i}$, $G_{2;i}$ を次のように定める:

$$
G_{1;i} = 1 + \sum_{j\in i+n\mathbb{Z}} \frac{t_j - t_{j+1}}{x_j + y_{j+1}} E_{j+1,j}, \quad G_{2;i} = 1 + \sum_{j\in i+n\mathbb{Z}} \frac{t_j - t_{j+1}}{y_j + x_{j+1}} E_{j+1,j}.
$$

構成の仕方より $G_{1;i+n} = G_{1;i}$, $G_{2;i+n} = G_{2;i}$ である.

ω, s_i の x_j, y_j たちへの作用は次の条件で一意に特徴付けられる:

$$
\begin{aligned}
\omega(L_1) &= \Lambda L_1 \Lambda^{-1}, & \omega(L_2) &= \Lambda L_2 \Lambda^{-1},\\
s_i(L_1) &= G_{1;i} L_1 G_{2;i}^{-1}, & s_i(L_2) &= G_{2;i} L_2 G_{1;i}^{-1}.
\end{aligned}
$$

2.6 A 型の拡大アフィン Weyl 群の双有理作用の q 差分版の量子化

n は任意の正の整数であるとし (偶数でも構わない), p, q は可逆な定数もしくは不定元であるとし, $q^2 \neq 1$ と仮定する. q は q 差分化のパラメータであり, $p = q^{\kappa/\hbar}$ と考える. 2 つの整数 i, j が $\operatorname{mod} n$ で等しいとき $i \equiv j$ と書く.

2.6.1 代数の量子化

t_i, φ_i から生成され, 次の基本関係式を持つ斜体を考える:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{i+n} = p^2\varphi_i, \quad t_{i+n} = p^{-2}t_i,\\
&\varphi_{i+1}\varphi_i = q\varphi_i\varphi_{i+1}, \quad \varphi_j\varphi_i = \varphi_i\varphi_j \quad (j \not\equiv i \pm 1),\\
&t_jt_i = t_it_j, \quad t_j\varphi_i = \varphi_it_j.
\end{aligned}$$

このとき $t_i\varphi_i$ と $t_{i+1}\varphi_i$ は i を n ずらす変換で不変である.

さらに $A^{(1)}_{n-1}$ 型の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の生成元 ω, s_i のコピー $\tilde{\omega}$, $\tilde{s}_i$ を用意し, 次の関係式を仮定する:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\omega}t_j\tilde{\omega}^{-1} = t_{j+1}, && \tilde{\omega}\varphi_j\tilde{\omega}^{-1} = \varphi_{j+1},\\
&\tilde{s}_it_j\tilde{s}_i^{-1} = \begin{cases} t_{j+1} & (j \equiv i),\\ t_{j-1} & (j \equiv i+1),\\ t_j & (j \not\equiv i, i+1),\end{cases} && \tilde{s}_i\varphi_j\tilde{s}_i^{-1} = \varphi_j.
\end{aligned}$$

$\tilde{s}_i$ による conjugation は t_j だけに非自明に作用する.

2.6.2 q 差分版 Weyl 群作用の量子化

函数 $E_q(x)$ を次のように定める:

$$E_q(x) = \prod_{k=0}^{\infty}(1 + q^kx) = (1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots.$$

このとき $E_q(x)$ が本質的に指数函数の q 差分類似であることより, $yx = qxy$ ならば次が成立することを示せる:

$$E_q(y)E_q(x) = E_q(x+y), \quad E_q(x)E_q(y) = E_q(y)E_q(xy)E_q(x).$$

この後者の公式だけを使って次を示せる:

$$\frac{E_q(\mu x)}{E_q(\lambda x)}\frac{E_q(\nu y)}{E_q(\lambda y)}\frac{E_q(\nu x)}{E_q(\mu x)} = \frac{E_q(\nu y)}{E_q(\mu y)}\frac{E_q(\nu x)}{E_q(\lambda x)}\frac{E_q(\mu y)}{E_q(\lambda y)}.$$

ここで λ, μ, ν は互いに可換で x, y とも可換であると仮定する. これより

$$U_i = \frac{E_q(t_{i+1}\varphi_i)}{E_q(t_i\varphi_i)}\tilde{s}_i$$

と置くと次が成立することを示せる:

$$\tilde{\omega} U_i = U_{i+1}\tilde{\omega}, \quad U_{i+n} = U_i,$$
$$U_i^2 = 1, \quad U_i U_j = U_j U_i \ \ (j \not\equiv i \pm 1), \quad U_i U_{i+1} U_i = U_{i+1} U_i U_{i+1}.$$

したがって t_i, φ_i で生成される斜体に拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の作用を次のように定めることができる:

$$\omega(a) = \tilde{\omega} a \tilde{\omega}^{-1}, \quad s_i(a) = U_i a U_i^{-1} \qquad (a = t_j, \varphi_j).$$

この作用を拡大アフィン Weyl 群の q 差分版双有理作用の量子化と呼ぶことにする．この作用は次のように書き下される:

$$\begin{aligned}
&\omega(\varphi_i) = \varphi_{i+1}, \quad \omega(t_i) = t_{i+1} \\
&s_i(t_i) = t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_j) = t_j \ \ (j \not\equiv i, i+1), \\
&s_i(\varphi_{i-1}) = \varphi_{i-1}\frac{1 + t_i\varphi_i}{1 + t_{i+1}\varphi_i} = \frac{1 + q^{-1}t_i\varphi_i}{1 + q^{-1}t_{i+1}\varphi_i}\varphi_{i-1}, \\
&s_i(\varphi_{i+1}) = \frac{1 + t_{i+1}\varphi_i}{1 + t_i\varphi_i}\varphi_{i+1} = \varphi_{i+1}\frac{1 + q^{-1}t_{i+1}\varphi_i}{1 + q^{-1}t_i\varphi_i}, \\
&s_i(\varphi_j) = \varphi_j \ \ (j \not\equiv i \pm 1).
\end{aligned}$$

2.6.3 Lax 表示

$n \times n$ 行列 $\mathcal{L}_1(z), \mathcal{L}_2(z)$ を次のように定める:

$$\mathcal{L}_1(z) = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & & \\ & t_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & t_n \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{L}_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \varphi_{n-1} \\ z\varphi_n & & & 1 \end{bmatrix}.$$

$i = 1, \dots, n-1$ に対して, ある 2×2 ブロックを除いて単位行列に等しい $\mathcal{L}$ の元を成分に持つ $n \times n$ 行列 $\mathcal{G}_{1,i}, \mathcal{G}_{2,i}$ を次のように定める:

$$\mathcal{G}_{1,i} = \begin{bmatrix} 1_{i-1} & & & \\ & A_i & 0 & \\ & B_i & 1 & \\ & & & 1_{n-i-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{G}_{2,i} = \begin{bmatrix} 1_{i-1} & & & \\ & 1 & 0 & \\ & B_i & A_i & \\ & & & 1_{n-i-1} \end{bmatrix}.$$

ここで 1_k は $k \times k$ の単位行列であり,

$$A_i = \frac{1 + t_{i+1}\varphi_i}{1 + t_i\varphi_i}, \qquad B_i = \frac{t_i - t_{i+1}}{1 + t_i\varphi_i}.$$

A_i, B_i は次の条件で一意に特徴付けられる:

$$A_i t_i - B_i = t_{i+1}, \tag{2.7}$$
$$A_i + B_i\varphi_i = 1. \tag{2.8}$$

s_i $(i = 1, \dots, n-1)$ の t_i, φ_j たちへの作用は次の条件を満たしている:

$$s_i(\mathcal{L}_1(z)) = \mathcal{G}_{1,i}\mathcal{L}_1(z)\mathcal{G}_{2,i}^{-1}, \qquad s_i(\mathcal{L}_2(z)) = \mathcal{G}_{2,i}\mathcal{L}_2(z)\mathcal{G}_{1,i}^{-1}. \tag{2.9}$$

ここで $s_i(\mathcal{L}_i(z))$ は行列 $\mathcal{L}_i(z)$ の各成分に s_i を作用させて得られる行列である．逆に s_i $(i = 1, \dots, n-1)$ の t_j, φ_j たちへの作用はこの条件で一意に特徴付けられる．この結果を s_i の t_j, φ_j たちへの作用の **Lax 表示**と呼び, $\mathcal{L}_i(z)$ を **local L-operators** と呼ぶ.

2.6.4 長谷川による実現との関係

長谷川の仕事 [7] との関係をここで明確にしておこう.

a_i, F_i から生成され, 次の基本関係式を持つ斜体を考える:

$$\begin{aligned}
&F_{i+n} = F_i, \quad a_{i+n} = a_i, \\
&F_{i+1}F_i = qF_iF_{i+1}, \quad F_jF_i = F_iF_j \ \ (j \not\equiv i \pm 1), \\
&a_ja_i = a_ia_j, \quad a_jF_i = F_ia_j.
\end{aligned}$$

この斜体は $\sqrt{t_i}$, φ_i で生成される斜体の中で次のように実現可能である:

$$a_i = \sqrt{\frac{t_i}{t_{i+1}}}, \quad F_i = q^{-1}\sqrt{t_it_{i+1}}\,\varphi_i.$$

このとき

$$t_i\varphi_i = qa_iF_i, \quad t_{i+1}\varphi_i = qa_i^{-1}F_i, \quad a_1 \cdots a_n = \sqrt{\frac{t_1}{t_{n+1}}} = p.$$

さらに $A_{n-1}^{(1)}$ 型の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の生成元 ω, s_i のコピー $\bar{\omega}$, $\bar{s}_i$ を用意し, 次の関係式を仮定する:

$$\begin{aligned}
&\bar{\omega}a_j\bar{\omega}^{-1} = a_{j+1}, && \bar{\omega}F_j\bar{\omega}^{-1} = F_{j+1}, \\
&\bar{s}_ia_j\bar{s}_i^{-1} = \begin{cases} a_i^{-1} & (j \equiv i), \\ a_ja_i & (j \equiv i \pm 1), \\ a_j & (j \not\equiv i, i \pm 1), \end{cases} && \bar{s}_iF_j\bar{s}_i^{-1} = F_j.
\end{aligned}$$

$\bar{s}_i$ による conjugation は a_j だけに非自明に作用する.

a_i, F_i を $\sqrt{t_i}$, φ_i で表わしたとき, $\bar{\omega}$ は $\tilde{\omega}$ と同一視できる．しかし

$$\tilde{s}_ia_j\tilde{s}_i^{-1} = \begin{cases} a_i^{-1} & (j \equiv i), \\ a_ja_i & (j \equiv i \pm 1), \\ a_j & (j \not\equiv i, i \pm 1), \end{cases} \qquad \tilde{s}_iF_j\tilde{s}_i^{-1} = \begin{cases} a_i^{\pm 1}F_j & (j \equiv i \pm 1), \\ F_j & (j \not\equiv i \pm 1). \end{cases}$$

が成立しているので, F_i への $\bar{s}_i$ と $\tilde{s}_i$ の conjugation の作用は一致していない．そこで $\bar{r}_i = \tilde{s}_i\bar{s}_i^{-1}$ と置く．そのとき

$$\bar{r}_ia_j\bar{r}_i^{-1} = a_j, \quad \bar{r}_iF_j\bar{r}_i^{-1} = \begin{cases} a_i^{\pm 1}F_j & (j \equiv i \pm 1), \\ F_j & (j \not\equiv i \pm 1). \end{cases}$$

天下り的に F_i の函数 r_i を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
r_i &= \frac{E_q(F_i^{-1})E_q(qF_i)}{E_q(a_iF_i^{-1})E_q(qa_i^{-1}F_i)} \\
&= \cdots \frac{1+qF_i^{-1}}{1+qa_iF_i^{-1}} \cdot \frac{1+F_i^{-1}}{1+a_iF_i^{-1}} \cdot \frac{1+qF_i}{1+qa_i^{-1}F_i} \cdot \frac{1+q^2F_i}{1+q^2a_i^{-1}F_i} \cdots \\
&= \cdots a_i^{-1}\frac{1+q^{-1}F_i}{1+q^{-1}a_i^{-1}F_i} \cdot a_i^{-1}\frac{1+F_i}{1+a_i^{-1}F_i} \cdot \frac{1+qF_i}{1+qa_i^{-1}F_i} \cdot \frac{1+q^2F_i}{1+q^2a_i^{-1}F_i} \cdots
\end{aligned}
$$

このとき $F_iF_{i-1} = qF_{i-1}F_i$, $F_iF_{i+1} = q^{-1}F_{i+1}F_i$ より

$$
r_iF_{i-1} = F_{i-1}a_i^{-1}r_i, \quad r_iF_{i-1} = F_{i+1}a_ir_i.
$$

この公式を満たす r_i の取り方は変換 $F_i \mapsto qF_i$ で不変な函数倍の違いを除いて一意的である.

これらの公式より $r_i = \bar{r}_i = \tilde{s}_i\bar{s}_i^{-1}$ と同一視可能であることがわかる. その同一視のもとで $\tilde{s}_i = r_i\bar{s}_i$ であり, U_i は a_i, F_i で次のように表わされる:

$$
U_i = \frac{E_q(qa_i^{-1}F_i)}{E_q(qa_iF_i)}\frac{E_q(F_i^{-1})E_q(qF_i)}{E_q(a_iF_i^{-1})E_q(qa_i^{-1}F_i)}\bar{s}_i = \frac{E_q(F_i^{-1})E_q(qF_i)}{E_q(a_iF_i^{-1})E_q(qa_iF_i)}\bar{s}_i.
$$

これは長谷川が求めた Weyl 群作用の生成元に本質的に一致している. (長谷川の F_i は上の記号では $-F_i$ に対応している.)

U_i の conjugation による Weyl 群作用を具体的に書き下すと次のようになる:

$$
\begin{aligned}
&\omega(a_i) = a_{i+1}, \quad \omega(F_i) = F_{i+1}, \\
&s_i(a_i) = a_i^{-1}, \quad s_i(a_{i\pm1}) = a_ia_{i\pm1}, \quad s_i(a_j) = a_j \;\; (j \not\equiv i, i\pm1), \\
&s_i(F_{i-1}) = F_{i-1}\frac{1+qa_iF_i}{a_i+qF_i} = \frac{1+a_iF_i}{a_i+F_i}F_{i-1}, \\
&s_i(F_{i+1}) = \frac{a_i+qF_i}{1+qa_iF_i}F_{i+1} = F_{i+1}\frac{a_i+F_i}{1+a_iF_i}, \\
&s_i(F_j) = F_j \;\; (j \not\equiv i\pm1).
\end{aligned}
$$

2.6.5 微分極限

第 2.3 節の ε_i, f_i を用いて t_i, φ を次のように実現することができる:

$$
q = e^{\eta^2\hbar}, \quad p = e^{\eta^2\kappa} = q^{\kappa/\hbar}, \quad t_i = e^{-\eta^2\varepsilon_i} = q^{-\varepsilon_i/\hbar}, \quad \varphi_i = -e^{\eta f_i}.
$$

このとき第 2.3 節の $\tilde{\omega}$, $\tilde{s}_i$ による conjugation は上の方で定義した t_i, φ への $\tilde{\omega}$, $\tilde{s}_i$ の conjugation 作用を誘導する.

さらに $\eta \to 0$ の極限で U_i が本質的に $f^{-\alpha_i/\hbar}\tilde{s}_i$ に収束することも示せる:

$$
\lim_{\eta\to0}(-\eta)^{\alpha_i/\hbar}U_i = f^{-\alpha_i/\hbar}\tilde{s}_i.
$$

2.6.6 $(2, 2g+1)$ 型の unipotent crystal の量子化との関係

n が 3 以上の奇数 $(n = 2g+1)$ と仮定する．このとき第 2.5 節の結果と以上の結果を次によって関係付けることができる:

$$t_i = x_i y_i = y_i x_i, \quad \varphi_i = y_{i+1}^{-1} y_i^{-1}.$$

この同一視で第 2.5 節で構成された x_i, y_i たちへの Weyl 群作用は上で扱っている t_i, φ_i たちへの Weyl 群作用を誘導する．

参考文献

[1] Adler, V. E., Nonlinear chains and Painlevé equations. Phys. D 73 (1994), no. 4, 335–351.

[2] Babujian, H., Kitaev, A., Generalized Knizhnik-Zamolodchikov equations and isomonodromy quantization of the equations integrable via the inverse scattering transform: Maxwell–Bloch system with pumping. J. Math. Phys. **39**, 2499–2506 (1998).

[3] Felder, G., Markov, Y., Tarasov, V., and Varchenko, A., Differential Equations Compatible with KZ Equations. Math. Phys. Anal. Geom. 3 (2000), no. 2, 139–177. `math.QA/0001184`

[4] Harnad, J., Quantum isomonodromic deformations and the Knizhnik-Zamolodchikov qquations. in Symmetries and Integrability of Difference Equations, CRM Proc. Lecture Notes 9, 155–161 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996) (eds. D. Levi, L. Vinet and P. Winternitz). `hep-th/9406078`

[5] Kajiwara, K., Noumi, M., and Yamada, Y., A study on the fourth q-Painleve' equation. J. Phys. A 34 (2001), no. 41, 8563–8581. `nlin.SI/0012063`

[6] Kajiwara, K., Noumi, M., and Yamada, Y., Discrete dynamical systems with $W(A^{(1)}_{m-1} \times A^{(1)}_{n-1})$ symmetry. Lett. Math. Phys. 60(2002), 211–219. `nlin.SI/0106029`

[7] Hasegawa, K., Deforming Kajiwara-Noumi-Yamada's rational representation of Weyl groups. A talk given at the Newton Institute 17 April 2001, preprint 2001.

[8] Jimbo, M., Miwa, T., and Ueno K., Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coeefficients I. Physica 2D, 306–352 (1981).

[9] Jimbo, M. and Miwa, T., Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coeefficients II, III. Physica 2D, 407–448 (1981); ibid., 4D, 26–46 (1981).

[10] Nagoya, H., Quantum Painlevé systems of type $A^{(1)}_l$. Internat. J. Math. 15 (2004), no. 10, 1007–1031. `math.QA/0402281`

[11] Nagoya, H., Quantum Painlevé systems. Thesis, Tohoku University, 2006.

[12] Noumi, M. and Yamada, Y., Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$. Funkcialaj Ekvacioj 41 (1998) 408–503. `math.QA/9808003`

[13] Noumi, M. and Yamada, Y., Birational Weyl group action arising from a noilpotent Poisson algebra. in Physics and Combinatorics 1999, Proceedings of the Nagoya 1999 International Workshop (Eds. A. N. Kirillov, A. Tsuchiya, H. Umemura), 287–319, World Scientific, 2001. `math.QA/0012028`

[14] Noumi, M. and Yamada, Y., Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions. Advanced Studies in Pure Mathematics 40 (2004), Representation Theory of Algebraic Groups and Quanatum Groups, 371–442. `math-ph/0203030`

[15] Reshetikhin, N., The Knizhnik-Zamolodchikov system as a deformation of the isomonodromy problem. Lett. Math. Phys. 26 (1992), 167-172.

[16] Shabat, A. B. and Yamilov, R. I., Symmetries of nonlinear lattices. Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 2, 377–400.

[17] Veselov, A. P. and Shabat, A. B., A dressing chain and the spectral theory of the Schroedinger operator. Funct. Anal. Appl. 27 (1993), no. 2, 81–96.