Weyl 群作用を持つ q 差分版量子 L 行列の正体？

黒木 玄

2005 年 12 月 24 日

目 次

1 私が作った L-operator

2004 年 9 月 30 日作成で 2004 年 10 月 12 日夜最終更新のノート「$n \times n$ の L-operator の q 差分版」で Weyl 群作用を持つ $n \times n$ の "正しい" L-operator の形は以下のようになることを説明した.

1.1 q 差分版の L-operator

まず K は標数 0 の任意の可換体であるとし, $q \in K^\times$ を任意に固定する. $\mathcal{A}$ は以下の生成元と基本関係式によって定義される K 上の結合代数であるとする[1]. 生成元:

$$\varphi_i, \quad t_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

φ_i, t_i の添字 i を n 周期的に整数全体に拡張しておく. 基本関係式:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{i+1}\varphi_i = q\varphi_i\varphi_{i+1} \qquad (i \in \mathbb{Z}),\\
&\varphi_j\varphi_i = \varphi_i\varphi_j \qquad (j \not\equiv i \pm 1 \mod n),\\
&t_j t_i = t_i t_j \quad t_j\varphi_i = \varphi_i t_j \qquad (i, j \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

[1]結合代数は 1 を持つもののを考える.

そして $\mathcal{K}_1(z), \mathcal{K}_2(z)$ を次のように定める:

$$\mathcal{K}_1(z) = \begin{bmatrix} t_1 & z & & \\ & t_2 & \ddots & \\ & & \ddots & z \\ z & & & t_n \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{K}_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & z\varphi_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & z\varphi_{n-1} \\ z\varphi_n & & & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{L}(z) = \mathcal{K}_1(z)\mathcal{K}_2(z)$ と置くと,

$$\mathcal{L}(z) = \begin{bmatrix} t_1 & z(1+t_1\varphi_1) & z^2\varphi_2 & & \\ & t_2 & z(1+t_2\varphi_2) & \ddots & \\ & & t_3 & \ddots & z^2\varphi_{n-1} \\ z^2\varphi_n & & & \ddots & z(1+t_{n-1}\varphi_{n-1}) \\ z(1+t_n\varphi_n) & z^2\varphi_1 & & & t_n \end{bmatrix}.$$

この $\mathcal{L}(z)$ が Weyl 群作用を持つ $n \times n$ の L-operator である.

1.2 微分極限

次の生成元と基本関係式を持つ結合代数を考える. 生成元:

$$f_i, \quad \varepsilon_i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

f_i, ε_i の添字を n 周期的に整数全体に拡張しておく. 基本関係式:

$$\begin{aligned} &[f_{i+1}, f_i] = \hbar \quad (i \in \mathbb{Z}), \\ &[f_i, f_j] = 0 \quad (i - j \not\equiv \pm 1), \\ &[f_i, \varepsilon_j] = 0, \quad [\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0 \quad (i, j \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

このとき,

$$\varphi_i = -e^{\eta f_i}, \quad q = e^{\eta^2 \hbar}, \quad t_i = e^{-\eta^2 \varepsilon_i} = q^{-\varepsilon_i/\hbar}$$

と置くと, φ_i, t_i は前節の基本関係式を満たしている.

以上のように置くと $\eta \to 0$ で次が成立している:

$$t_i = 1 - \eta^2 \varepsilon_i, \quad \eta(1 + t_i\varphi_i) = -\eta^2 f_i + O(\eta^3), \quad \eta^2\varphi_i = -\eta^2 + O(\eta^3).$$

したがって $\eta \to 0$ のとき

$$\mathcal{L}(\eta z) = 1_n - \eta^2 L(z) + O(\eta^3).$$

ここで 1_n は n 次の単位行列であり,

$$L(z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & zf_1 & z^2 & & \\ & \varepsilon_2 & zf_2 & \ddots & \\ & & \varepsilon_3 & \ddots & z^2 \\ z^2 & & & \ddots & zf_{n-1} \\ zf_n & z^2 & & & \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

これは微分版の L-operator と一致している.

2 Antonov の論文で見付けた 2×2 の L-operator

2.1 2×2 の L-operator

Alexander Antonov の 1996 年の論文 [A] の Section 4 "Discussion and Concluding Remarks" には次のような 2×2 の L-operator が書いてある:

$$L(\lambda)=\begin{bmatrix} k_\alpha^{\frac12}-\lambda^2 q^{-1}k_\alpha^{-\frac12} & -\lambda e_{-\alpha}k_\alpha^{-\frac12}(q-q^{-1}) \\ \lambda e_\alpha k_\alpha^{\frac12}(q-q^{-1}) & k_\alpha^{-\frac12}-\lambda^2 q^{-1}k_\alpha^{\frac12} \end{bmatrix}.$$

ここで $e_{\pm\alpha}$, $k_\alpha^{\pm1}$ は $U_q(\mathrm{sl}_2)$ の生成元である．これは私が作った L-operator に非常に似ている．

2.2 比較

私が見付けた L-operator は次の形をしている:

$$\mathcal{L}(z)=\varepsilon+(1+t\varphi)\Lambda_n z+\varphi^{[1]}\Lambda_n^2 z^2.$$

ここで $\Lambda_n=\sum_{i=1}^{n-1}E_{i,i+1}+E_{1n}$, $t=\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_n)$, $\varphi=\mathrm{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, $\varphi^{[1]}=\Lambda_n\varphi\Lambda_n^{-1}$.

Antonov の論文の L-operator は次の形をしている:

$$L(\lambda)=$$

参考文献

[A] Alexander Antonov, Universal R-matrix and quantum Volterra model, `hep-th/9607031`