使える数学・使われる数学

長谷川浩司

(東北大学理学研究科数学専攻)

03 Dec 2010

於　宮城県宮城第一高等学校

使える数学・使われる数学

長谷川浩司（東北大学理学研究科数学専攻）[1]

2010.12.3, 於·宮城第一高等学校

前半

・自己紹介をかねて：パンフレット「理学部物語」「東北数学誌」から

・使える数学：**google 検索の原理**

・付録：行列入門

後半

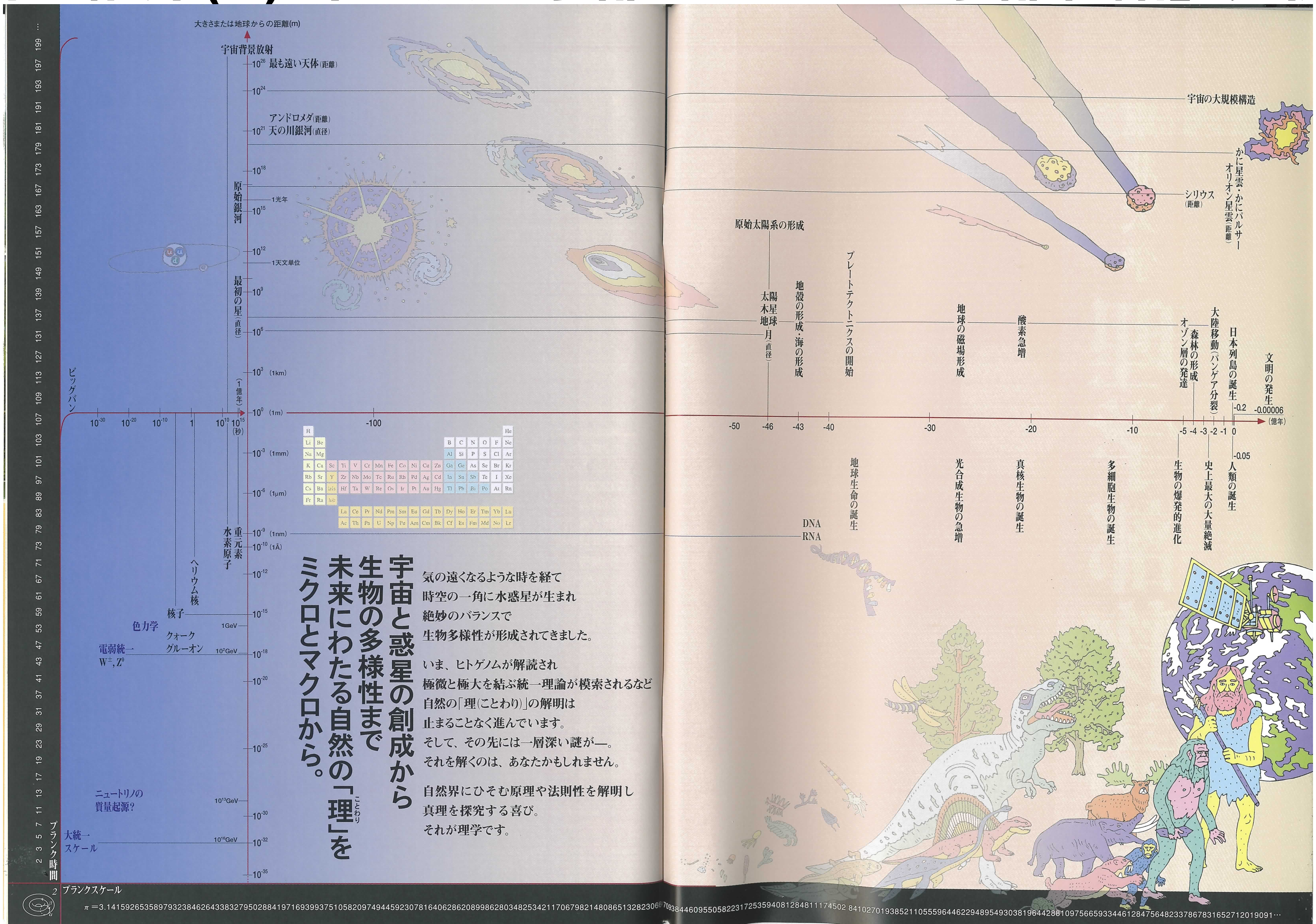
・数学の歴史から

・使われる数学：**恒等式の話**

・背伸び：アーベルとヤコビの定理など(＋おまけ：タンパク質の話)

[1]静岡県立島田高校出身，1981 年名古屋大学入学，仙台に来て 21 年．専門は数理物理学

自己紹介(1) 東北大理学部パンフ「理学部物語」見開き

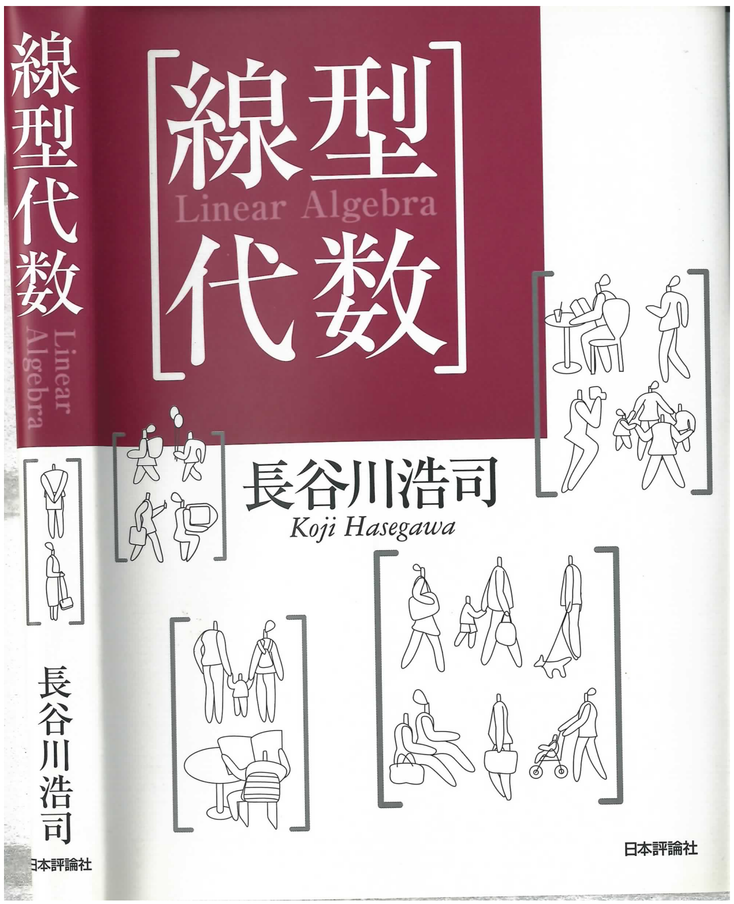


数学は「宇宙の額縁」: 数学の言葉で(=枠内で)自然の法則は語られる

自己紹介(2) 数学科パンフ「東北数学誌」見開き

6000年以上のアイデアのキャッチボールが数学を作ってきた

自己紹介(3)本「線型代数」と雑誌「数学セミナー」



行列の数学の教科書　　**google の原理を紹介した号**

↑「線型代数」第一部は高校生でも読めるつもり．量子力学入門もついてお得.

前半:「使える数学」最近(20世紀末〜)現れた応用

— **携帯電話**（←まあまあ高級な数論）

多くの人が使っても混信しないよう電波を「直交する符号化」で共有
（Code Division Multiple Access ＝ CDMA)
人の数に応じて，ガロアが考えた有限体というものを取り替えて使う

— **GPS**, Global Positioning System（←相対性理論）

４機以上の衛星から発信される電波のずれから現在地を割り出す

しかし衛星に載せた時計は時刻がずれてゆく（相対論的効果！）
これを補正しないと，地上では誤差が出て使えない

— **google 検索**（←連立1次方程式＝線型代数. $\left[\begin{array}{c}\text{線型＝1次式}\\\text{代数＝文字の計算}\end{array}\right]$ ）
以下で説明するように原理は簡単，結果は強力

google 検索(いまさらですが...)

単語を入力すると関連ページが順番つきで出力される

「ラリー ペイジとサーゲイ ブリンがその使命を達成する最初のステップとしてスタンフォード大学の寮の部屋で始めた」(http://www.google.com/intl/ja/corporate/)

どう順番をつけるか？＝何を「良い」と考えるか？

人がすべてに順番をつけるのは不可能(世界には数億サイトある!)

$\Longrightarrow$ **機械的**に順位をつけられるか？

○google の創業者のアイデア：

(i) 良いサイトからリンクされたサイトは良いサイト

(ii) ただし，乱発されたリンクは価値が低い

…「良さ」が満たすべき性質（＝良さの**公理**）を列挙した.

remark： 公理に基づいて議論する＝数学では**公理化**とよばれる

古代ギリシャでは幾何学を公理化した

「点とは,大きさのない位置である」「直線とは,幅のない長さである」

例：グーグルの特許書より

3つのサイト(ホームページ) X, Y, Z からなるネットワーク

互いに次のようにリンクされているとする：

$$\begin{array}{ccccc} X & & \rightleftarrows & & Z \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Y & & \end{array}$$

$$X \to Y \ = \text{「}X \text{ が } Y \text{ をリンクしている」}$$

現実のサイト数は莫大だが，まずは簡単な場合を考えている

WANT: **(i) 良いサイトからリンクされたサイトは良いサイト**

(ii) 乱発されたリンクは価値が低い **そのように良さを数値化したい**

連立方程式へ翻訳

x, y, z ：X, Y, Z の「良さをあらわす数値」があるとする

$$\begin{array}{ccccc} X & & \rightleftarrows & & Z \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Y & & \end{array}$$

$\Rightarrow$ x, y, z は次を満たすべき:

$$\begin{cases} x = z & X \text{ は } Z \text{ の良さをもらう} \cdots (1) \\ y = \frac{1}{2}x & Y \text{ は } X \text{ の良さの半分をもらう} \cdots (2) \\ z = \frac{1}{2}x + y & Z \text{ は } X \text{ の良さの半分と } Y \text{ の良さをもらう} \cdots (3) \end{cases}$$

$\because$ (3): Z は X と Y から良さをもらう (i). X の良さは半分だけもらう. X は Y と Z の二つをリンクしてるから，良さは半分ずつになる (ii).

連立方程式を解くと...

$$\begin{cases} x = z & \cdots (1) \\ y = \frac{1}{2}x & \cdots (2) \\ z = \frac{1}{2}x + y & \cdots (3) \end{cases}$$

よく見ると，　$(3) \overset{(1)}{\iff} x = \frac{x}{2} + y \iff (2)$

だから，x を決めると y はその半分，z は x そのもので良い．

$\therefore\ x = x,\ y = \frac{x}{2},\ z = x$ が解．(x は決まらない)

$x+y+z=1$ として求めた解を，**ページランク**という(google 商標！)．

今の場合は，$x = 0.4, y = 0.2, z = 0.4$.

ページランク

$$\begin{array}{ccccc} x = 0.4 \quad X & & \rightleftarrows & & Z \quad z = 0.4 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Y & & \\ & & y = 0.2 & & \end{array}$$

(今の場合 X と Z は同じ点数)

「単語を入力 $\Rightarrow$ その語をふくむページをこの点数順に表示」が google の特許 **(米特許第6,285,999号. 形式上はスタンフォード大に帰属)**

問：いつも点数がつけられるか？

$\Leftrightarrow$ ネットワークが複雑なときも，連立方程式が解をもつか？

考えなおしてみる

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] & & Z \arrow[ll, shift left] \\ & Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

矢印を,「ネットを閲覧する人の動き」と見る

たとえば「X を見ていた人は，次のクリックでリンク先の Y か Z に半々の確率で移動する」など

- 某日某時n分に，それぞれを見ている人が x_n, y_n, z_n 人いたとする

$\Rightarrow$ $n+1$分には,
$$\begin{cases} x_{n+1} = z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} x_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + y_n \end{cases}$$

数列の問題になった

$n \to \infty$ では...

「人の移動」の代わりに「熱の移動」と考える
$\Rightarrow$ 経験上，熱は時間がたてば一定の値に収束する

$n \to \infty$ でそれぞれ収束し，$x_n \to x_\infty$，$y_n \to y_\infty$，$z_n \to z_\infty$ だとする

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x_{n+1} = z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + y_n \end{cases} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \begin{cases} x_\infty = z_\infty \\ y_\infty = \frac{1}{2}x_\infty \\ z_\infty = \frac{1}{2}x_\infty + y_\infty \end{cases}$$

極限はページランクの方程式の解

定理 **•ページランク方程式には解がある**
• ネットワークが「二つ以上に分離できない」なら,「総和=1」を満たす解は一つ（ペロン-フロベニウスの定理：19世紀）

分離できる場合

$$
\begin{array}{ccccc}
A & \rightleftarrows & C \\
 & \searrow \quad \nearrow & \\
 & B &
\end{array}
\quad (\leftarrow \textbf{相互にリンクがない} \rightarrow) \quad
\begin{array}{ccccc}
X & \rightleftarrows & Z \\
 & \searrow \quad \nearrow & \\
 & Y &
\end{array}
$$

$(a:b:c)=(x:y:z)=(1:\frac{1}{2}:1)$ だが，$a:x$ を決める方法がない

$\Longrightarrow$ A,B,C と X,Y,Z のどちらが大事か？がきまらない

○インターネットでは「見えているページ」はすべてつながっていると考えられる$\Longrightarrow$ **∴ページランクは一通りにきまる.**

注　軍事用ネットワークなどは分離されている例[のはず]
仲間うちだけで閉じた多数の「やらせリンク」で点数をあげようとしても，google では自動的に排除している

前半「使える数学」のまとめ

○google の原理は連立１次方程式

○「良さ」のみたすべき性質（公理）を列挙し，それを式で表した

人が対象に抱く好感度を数値化する試みは18世紀にはすでにあった（ベルヌイのくじの理論）

○考え方は，移動をともなう他の現象でも同じ

熱の移動，おカネの移動，薬の代謝(どの臓器に集中するか？)...など

現実に**使える**数学として紹介した．

付録：行列(3年でやる)を使うと簡明に表せる：次のページ

google をはじめ，建物の耐震設計その他，いろんな現象に行列は使われる．

付録：行列入門

ベクトル＝数を１列に並べたもの

正方行列＝数を正方形に並べたもの

行列とベクトルをつかって方程式を書き直すと

$$\begin{cases} x_{n+1} = \ 0 \ + \ 0 \ + z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 0 \ + \ 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + y_n + 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \ (*)$$

である（**そのように行列とベクトルの積は定める！**）

$\vec{v}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$ とし，右辺の3次行列を A とする：$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow$ (*)を $\vec{v}_{n+1} = A\vec{v}_n$ と**簡単に**書ける (“ ベクトルの等比数列 ”)

付録つづき：行列の効用

$$\vec{v}_{n+1} = A\vec{v}_n$$

$A^2 = AA, A^3 = AAA, \cdots$ とすれば

$$\vec{v}_n = A\vec{v}_{n-1} = A^2\vec{v}_{n-2} = \cdots = A^n\vec{v}_0.$$

$\therefore \vec{v}_n$ の極限を求める $\Longleftrightarrow A^2, A^3, \cdots, A^n, \cdots$ の極限を求める

ページランクは，A^n (n:十分大) を計算することで近似できる．

今の場合に A^2, A^4, A^8, A^{16} を計算すると

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \frac{1}{256}\begin{bmatrix} 103 & 102 & 102 \\ 51 & 52 & 51 \\ 102 & 102 & 103 \end{bmatrix}$$

だんだんどの列も $100 : 50 : 100 = 2 : 1 : 2$ に近付いてゆく

背伸び：固有値と固有ベクトル

一般に，正方行列 A に対し，A 倍で方向が変わらないベクトルを A の固有ベクトルという．

つまり，$A\vec{v} = k\vec{v}$ 　をみたす $\vec{v} \neq \vec{0}$ のこと．k を固有値という．

例「ページランク・ベクトル」$\vec{v}_\infty = \begin{bmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix}$ は，$A\vec{v}_\infty = 1 \cdot \vec{v}_\infty$ を満たす

$\Longrightarrow$ **「$\vec{v}_\infty$ は A の固有値 1 の固有ベクトルである」**

○一般の A に対し，固有ベクトルがすべてわかると，A^n の一般項を計算できる（大学１年の話題だが頑張れば高校生でもわかる．興味があれば，拙著「線型代数」第一部参照）

以上が前半．後半はまったく別の話をする．(恒等式の話)

後半「使われる数学」:まず，数学の歴史から

世界を形づくる数学・その歴史と現在

小田忠雄名誉教授
元東北大学図書館長

数学は時代とともにあった。

古来、数学はその時代とともにありました。

バビロニアやエジプトの文明は、土地を測量し、作物を管理し、建築を企画する数学があって成り立ったものです。古代以来の暦のために必要であった天文学の発展は数学の発展と不即不離なものでしたし、17世紀のニュートンやライプニッツが創始した微積分も物理学の発展と不可分の関係にありました。

現代も例外ではありません。物理学をはじめとする諸科学が革命的発展を遂げた20世紀を経て、現在数学はバイオ・インフォーマティックス（生命情報科学）、数理ファイナンス、暗号・符号等の形で、物理・工学・経済学・生命科学等のあらゆる分野に従来にも増して浸透し、現象を記述する言語として、また解明する道具として不可欠になっています。

我が国でも最初はそろばんの使い方等の実用から出発した和算が江戸時代に一大発展を遂げ、ヨーロッパにおける微積分や行列式に相当することを独自に構築しました。例えば、円周率πの公式を得、18世紀中頃当時の世界第3位記録である小数点以下52位までの計算も成し遂げました。ちなみに、東北大学附属図書館には、全国の$\frac{2}{3}$にも及ぶと言う和算関係の資料が揃っています。

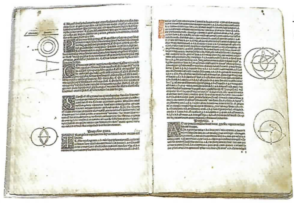
数学は時代を超えた世界へと人を導いた。

数学はまた、時代を反映すると同時に、時代を超えた世界へと人類を導いて来ました。例えば、古代ギリシャに開花した幾何学の体系が、その後の人類に与えた影響は計り知れません。古代ギリシャ時代にユークリッド等の数学者達が美しさ・神秘さの故に研究していた円錐曲線が、16世紀末から17世紀初めにかけてケプラーが発見した惑星軌道に関する3法則に不可欠だったのもその一例です。

21世紀も、数学は未だ見ぬ世界へと人類を誘っています。そして数学の深化とともに、数学を使って定式化し数学の力によって解決できる諸課題も多いものと我々は信じています。

他分野と異なり、数学上の真理は常に真理であり、ひとたび証明されれば学説によって変わると言うことはありません。従って、論文・著書等の数学文献はいつまでも有用であり続けますが、東北大学の数学文献コレクションは世界一級です。

数学の発展は崩れることのない積み木の積み重ねのようなものとも言えます。積み木のブロックとも言える個々の概念や理論は、美しさ・面白さ、知的好奇心等によって導かれることもしばしばです。しかしそのようにして得られた概念や理論が、実は思い掛けない実用に役立つこともしばしばです。抽象性が高い概念や理論である程むしろ応用範囲が広いのです。



ユークリッド『原論』1482年活版印刷初版
（東北大学所蔵）

数学の発展の原動力となる予想・問題

実世界でのニーズから派生した数学上の問題や、数学自身の発展の過程から生まれた数々の問題の解決が、人類の発展にこれまでもそして今後とも大いに貢献しますが、まず良い問題や予想を定式化することが数学発展の原動力となることがしばしばです。

フランスの数学者フェルマーが17世紀中頃に予想した問題が、20世紀終り近くなってとうとうワイルスにより証明されたことを御存知の方も多いと思います。フェルマーの予想はその意味が中学時代に学ぶ数学の知識で理解できる一見簡単なものですが、解決のためには数世紀にわたっていろいろの新しい

前4000	エジプト文明　メソポタミア文明　縄文海進　灌漑技術		太陽暦　10進法
前3000	氷河の拡大　三内丸山遺跡		ヒエログリフ
前2500	ピラミッド　スフィンクス		
前2400	ストーンヘンジ		バビロニアで60進数
前2300	インダス文明　夏		
前2200	ギルガメッシュ物語　ジッグラト		準縄・規矩　中国の天象記録
前2100	クレタ文明最盛期		
前2000	ギリシャ人第一波		
前1900	インダス文明衰退　ヨーロッパ青銅器時代		モスクワ・パピルス
前1800	古バビロニア　ハムラビ法典		
前1700	ギリシャ人南下　アーリア人印度へ　ミノア噴火とクレタ衰退	アーメスのパピルス『すべての暗黒なるもの、すべての秘密の知識を手に入れるための方針』（前1650ころ）	バビロニアの数学　三平方の定理　2次・3次方程式　開平方　逆数表　2乗和
前1600	ヒッタイトの鉄器　殷		
前1500	高温期のおわり		
前1400	エジプトのアマルナ改革		甲骨文字　中国で10進法
前1300	フェニキア人の通商基地　ナイル～紅海運河計画		
前1200	トロヤ戦争　出エジプト　寒冷化		フェニキア文字
前1100	周		算木　指南車
前1000	ギリシャ文化　イラン人の南下定住		
前900	中央アジア乾燥化　遊牧民族		
前800	オデュッセイア	ボーダーヤナ（前800ころ）	『シュルバスートラ』
前700	氷河前進　ゲルマン民族小移動　アッシリア滅亡		
前600	新バビロニア	タレス（前585または前610）	新バビロニアの天文学　ギリシャの自然哲学
前500	老子　孔子　シャカ　バビロン捕囚　呉の滅亡	ピタゴラス（前580-前500）　ソクラテス（前450ころ）　ゼノン（前450ころ）	無理数　正多面体　三大作図問題　逆理　証明
前400	ペルシャ帝国	デモクリトス（前460?-前370?）　ユークリッド（前400?-前350?）『原論』	取尽し法　原子論　平面幾何の公理　素数
前300	アカデメイア　アレキサンドリアの図書館　マテーマタ　温暖化	アリスタルコス（前280ころ）	比例論　太陽中心説
前200	始皇帝　焚書　アショカ王　カルタゴ滅亡	アルキメデス（前287-前212）　アポロニウス（前260?-前190?）	『方法』　円錐曲線論
前100	万里の長城　東西交易　銅鐸	ヒッパルコス（前134ころ）『九章算術』	弦の表　歳差　中国の剰余定理　負数
西暦元年	ローマ帝国　ユリウス暦	ヘロン（1C-3C?）　メネラオス（98ころ）	数論　球面三角法
100	漢　原始キリスト教　吉野ガ里遺跡	プトレマイオス（100-170）	『アルマゲスト』　天球儀
200	カニシカ王　海面低極（-1.5m）　黄巾の乱　倭国大乱　卑弥呼	劉徽（260ころ）	マヤの暦と20進法　消去法
300	三国時代　寒冷化　ゲルマンのローマ進入	ディオファントス（246?-330?）　パッポス（320ころ）	不定方程式
400	倭の朝鮮出兵　海面上昇　アウグスティヌス　民族大移動　ネストリウス派	ヒュパティア（?-415）　プロクロス（401?-485）	平行線の公理証明の試み
500	アカデメイア閉鎖　数学禁止令	祖沖之（429-500）　アールヤバタ（476-?）	『綴術』　0の発見　三角関数
600	隋へインドの数学書　聖徳太子　修道院	ブラフマグプタ（628ころ）	『シッダンタ』
700	気温上昇　イスラム教　平城京　唐		
800	温暖化　ヴァイキング　平安京　アッバース朝　バグダッドの「知恵の館」	アル・フワリズミ（780ころ-850ころ）　サビト・イブン・クッラ（836-901）	代数学　天文表　連立方程式　連続量
900	寒のもどり　宋		
1000	ビザンツの大百科　源氏物語		
1100	十字軍　ヨーロッパ温暖期	オマル・ハイヤム（1048?-1131?）　バースカラ（1114-1185）	3次方程式　ジャラリイ暦　『ビージャガニタ』
1200	鎌倉時代　インカ帝国　元	フィボナッチ（1180-1250）　アル・トゥシ（1201-1274）　朱世傑（13c-14c）　秦九韶（1202-1261）	『算盤書』　平行線公理研究　水運儀象台　天元術
1300	室町時代　寒冷化　ペスト　明	オレスム（1323-1382）　ケララのマーダヴァ（1350-1425）	グラフ　三角関数の級数展開
1400	ルネサンス　大航海時代		
1500	宗教改革　グレゴリオ暦	コペルニクス（1473-1543）　タルタリア（1499-1557）　カルダノ（1501-1576）　フェラリ（1522-1565）　ヴィエト（1540-1603）　ネピア（1550-1617）	『天球回転論』　3次・4次方程式の解の公式　等号　虚数　記号代数　小数
1600	東インド会社　江戸時代　小氷期　清	ブラーヘ（1546-1601）　ガリレオ（1564-1642）　ケプラー（1571-1630）　デカルト（1596-1650）　フェルマ（1601-1665）　パスカル（1623-1662）	対数　力学　楕円軌道　座標　数論　確率　『塵劫記』
1700	科学革命　産業革命	ニュートン（1642-1727）　関孝和（1642?-1708）　ライプニッツ（1646-1716）　オイラー（1707-1783）　ラグランジュ（1736-1813）　ラプラス（1749-1827）	2体問題　行列式　微積分　ゼータ関数　微分方程式
1800	フランス革命　近代国家	フーリエ（1768-1830）　ガウス（1777-1855）　コーシー（1789-1857）　アーベル（1802-1829）　ヤコビ（1804-1851）　ガロア（1811-1831）　リーマン（1826-1866）	熱学　平方剰余　求積問題　群　非ユークリッド幾何
1900	明治時代　20世紀	カントール（1845-1918）　ポアンカレ（1854-1912）　ヒルベルト（1862-1943）	集合　保型関数　p進数

古代から数学はあった．19世紀になるとだいぶ現代的になってくる

行列は20世紀に量子力学とともに定着した

●フェルマー予想の解決（1995年）

イギリス出身の数学者アンドリュー・ワイルスは、楕円曲線に対するゼータ関数の性質を用いて「nを3以上の整数とするとき、$x^n+y^n=z^n$ をみたす正の整数x,y,zは存在しない」というフェルマー予想（フェルマーの最終定理）を解決した。

概念を生み出し壮大な理論を構築する必要がありました。日本人数学者も理論構築に大きく貢献しました。

また、20世紀における数学の大発展には、1900年にヒルベルトが提起した23の問題への挑戦が大きな原動力となりました。このヒルベルトの例に倣い、ちょうど100年後である西暦2000年を記念して、米国のクレイ数学研究所は、これまで長年の努力にもかかわらず未解決である7つの問題を選び出し、それぞれに百万ドルの賞金を懸けました。ヒルベルトの問題の一つにも選ばれながら未解決であるリーマン予想もその一つに選ばれていますが、解決すれば素数分布との関連で、コンピュータ・セキュリティー等に不可欠な暗号理論にも大きく役立つものと考えられています。ちなみに、この問題の場合は、コンピュータがいくら発達してもその力だけでは絶対に解けない問題の一つです。

ところで、クレイ数学研究所のもう一つの問題であるポアンカレ予想は3次元球面を特徴付ける問題ですが、最近証明が発表されて現在点検中とのニュースが伝わってきています（2003年6月末現在）。

これらの問題が解決されるには、革新的な概念が生み出され、数学が理論的にますます深化・発展する必要がありますが、もし解決されると数学以外へ及ぼす影響も応用面を含めて計り知れないと思われます。

数学の発展に不可欠な飛躍的発想

中学や高校で接する数学の問題は、最初から答えがあるとわかっている問題がほとんどですが、それでも苦労の末に問題が解けた歓びを味わった経験のある諸君も多いと思います。

数学の研究は、まず問題を見付けて巧く定式化することから始まります。その際には、閃きや美しさの追求によって導かれることもしばしばであり、芸術に似た側面があると感じている数学者も大勢います。一旦良い問題が定式化されますと、理論がすらすらと自然に展開することもありますが、悪戦苦闘の末に解けた時の感激はひとしおです。それまでに誰も得ていなかった結果であれば、世界共通の言葉で記述されていますので即座に世界中に通用します。

どの分野の研究でもそうだと思いますが、特に数学では良い問題やその解決方法の発見には、若い柔軟な頭による飛躍的発想が不可欠です。数学のノーベル賞と言われるフィールズ賞の受賞者が40歳以下に限られていることでも判るように、若い数学者による数々のブレーク・スルーが数学を発展させてきました。

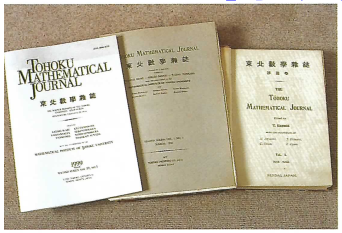
新しい研究成果を得るためはもとより、数学研究で得られた成果を理解して現実の世界に適用するのにも、柔軟な発想や数学的な考え方が従来以上に必要になっています。単に公式に当てはめるだけでは済まない時代になっています。

中学・高校で学ぶ数学は18世紀までに創られたものですので、19世紀以後の素晴らしい発展を知り使いこなすためには、まず予備知識として、基本的な「文法」や新しい考え方を身に付ける必要があります。

例えば、ヒルベルトの23の問題の意味を理解するには、数学科の学部時代に身に付ける基礎的素養が必要ですし、クレイ数学研究所の懸賞問題の意味を理解するには、大学院レベルの素養まで必要でしょう。

いずれにせよ、人類の今後の発展に不可欠な数学的考え方をぜひ身に付けて欲しいと思います。

一旦身に付ければ、いつまでも有効であるばかりか、世界が大きく広がります。その上でさらに難問に挑戦する方にもぜひ出てきて欲しいものです。



東北数学雑誌は1911年にわが国初の数学専門誌として創刊され、科学の主要データベース「Web of Science」でも参照されています。

1900　1905　1910　1915　1920　1925　1930　1935　1940　1945　1950

プランクの量子仮説
無線電信　最初のノーベル賞
ライト兄弟初飛行　日英同盟
真空管　日露戦争
アインシュタインの奇跡の年　ロシア革命
ガンディーの非暴力運動
夏目漱石『三四郎』
白瀬南極探検隊　山手線開業
大陸移動説
中華民国
ボーアの量子論的水素原子模型
第1次世界大戦
大戦景気
一般相対性理論
ロシア3月革命、11月革命
第1次世界大戦終結
ヴェルサイユ条約
ピッツバーグで定期ラジオ放送　国際連盟
イタリアファシスタ党結成
ワシントン軍縮会議
ドイツのハイパーインフレ　関東大震災
日本にメートル法
東京でラジオ放送開始　治安維持法
シュレディンガー方程式
昭和大恐慌
ハイゼンベルグとパウリ、場の量子論
ディラック方程式
冥王星発見
満州事変
フィールズ賞創設
ニューディール政策　ヒトラー内閣
文部省に思想局
湯川の中間子理論
ケインズ『雇用、利子及び貨幣の一般理論』
日中戦争
国家総動員法
仁科のサイクロトロン
第2次世界大戦
フェルミの原子炉　暗号研究
マンハッタン計画
学徒動員
オペレーションズ・リサーチ
終戦
電子計算機　日本国憲法
教育基本法
トランジスタ
ファインマンの量子電磁力学
朝鮮戦争
社会主義インターナショナル

ヒルベルトの23の問題
ポアンカレ、トポロジーを創始
ラッセルの逆理　ペッポ・レビの選択公理
ルベーグの積分論
ベルンシュタイン、楕円型方程式の解の解析性を証明
マルコフの確率過程論
東北帝国大学創立　林鶴一監修『数学叢書』刊行開始
ミンコフスキ『空間と時間』出版
ブラウエルによる、不動点定理の最初の証明
理科大学数学科設置、初講義　東北数学雑誌創刊
セヴェリの交点理論
ラッセルとホワイトヘッド、『数学原論』3巻を刊行
ハーディ「リーマン・ゼータ関数の零点について」
掛谷宗一の問題　初の女性卒業生（牧田らく）
レヴィ・チヴィタの平行性
ネーターの保存電流定理
理科大学を理学部に改称　ラマヌジャン予想
高木貞治の類体論
数学教室が1講座増え4講座に　小倉金之助の補間公式
ヒルベルトの数学基礎論研究　モーデル予想
ウィーナーのブラウン運動研究
ハッセの局所・大局原理
バナッハ・タルスキーのパラドックス
ホモロジー群の位相不変性
カルタンのリー群研究
ミニマックス定理　藤原松三郎『代数学』
モース理論の開拓　陳健功『三角級数論』執筆
ゲーデルの完全性定理と不完全性定理
プラトー問題の解決
フォン・ノイマン『量子力学の数学的基礎』
コルモゴロフの確率論の公理化
ルレイ、ナビエ・ストークス方程式の弱解の存在を証明
ブルバキ、活動開始　チューリングの計算論
岡潔、多変数解析関数論の基本定理を解決
平山諦編『林鶴一博士和算研究集録』
淡中忠郎の双対定理
ワイル『Classical Groups』
角谷静夫の不動点定理　窪田忠彦『微分幾何学』
伊藤清、確率微分方程式の理論を確立
数学教室5講座に　空襲と罹災、高瀬村に疎開
セルバーグのゼータ関数研究
東北帝国大学を東北大学と改称
吉田耕作等による作用素の半群理論の建設
新制東北大学発足　ヴェイユ予想
シュワルツ『超関数の理論』発表
小平邦彦の調和積分論

1955　1960　1965　1970　1975　1980　1985　1990　1995　2000

水素爆弾
DNA模型　NHKテレビ
太陽電池
ラッセル–アインシュタイン宣言
冷戦
人工衛星スプートニク
NASA設置
水俣病問題
安保紛争　クォーク模型
大陸間弾道ミサイル　キューバ危機
ヴェトナム戦争
衛星中継　ケネディー暗殺
東海道新幹線
火星探査　宇宙遊泳
文化大革命
電弱理論　中東戦争
集積回路　学生運動
アポロ11号月面着陸
70年安保　家永教科書裁判
沖縄返還
ローマクラブ「成長の限界」
DNA組替え技術
クォークの発見
アポロとソユーズのドッキング
ヴァイキング1号火星着陸
ボイジャー土星撮影　スペースシャトル
イラン革命
第1回共通一次試験
西独に緑の党
ポーランド「連帯」の民主化運動
中曽根内閣
パイオニア10号太陽系離脱
ニュージーランドの行政改革
南極上空にオゾンホール
高温超伝導の発見
神岡で超新星ニュートリノ観測
青函トンネル　瀬戸大橋
イギリスの教育政策転換
ドイツ統一
ロシア大統領選挙
ソヴィエト崩壊　大学設置基準改訂
自民党下野
数学者ナッシュにノーベル経済学賞
阪神淡路大震災
橋本行革
国際金融危機
ユネスコ「21世紀の高等教育にむけて」
東海村臨海事故
世界数学年　Y2K問題
同時多発テロ

岩澤健吉の理論　ヘルマンダーの偏微分方程式研究
大学院理学研究科数学専攻設置
トムのコボルディズム理論
谷山豊の問題　フェルミ–ウラム–パスタの数値実験
ミルナー、7次元異種球面を発見
グロタンディク、『代数幾何学の基礎』執筆開始／東北数学雑誌に「ホモロジー代数のいくつかの点について」発表
佐藤幹夫の超関数
佐々木重夫による接触多様体の理論
スメール、高次元ポアンカレ予想を解決
遠山啓と矢野健太郎『数学セミナー』創刊
猪狩惺によるアトム分解のアイデア
広中平祐の特異点解消定理　教養部設置
67年までに8講座制に
ブラウアーとファウラーの定理
カールソン、L^2関数のフーリエ級数の概収束性を証明
アティヤー–シンガーの指数定理
ケルヴェアの定理、カービーとジーベンマンの定理
クックとレビンによるP≠NP問題の定式化
富田–竹崎理論　ラングランズ・プログラム
佐藤幹夫ら、代数解析学を創始
モンスターの発見
ドリーニュ、ヴェイユ予想を解決
リとヨークのカオス研究
アッペルとハーケンによる四色問題の解決
このころ散乱理論、保型関数論などの分野でリーマン予想と同値な命題、それを導く命題が発見された
青本和彦の多変数超幾何関数論　青葉山へ移転
ウェーブレットの理論　佐武一郎『対称領域の代数構造』
有限単純群の分類が完成
4次元ユークリッド空間R^4は複数の微分構造をもつ
ファルティングスの3つの証明　9講座制へ
グリーンとシュワルツの超弦理論
神保道夫とドリンフェルト、量子群を独立に発見
共形場理論と低次元トポロジーの発展
森重文による代数多様体の極小モデル
小田忠雄『Convex Bodies and Algebraic Geometry』
ミラー対称性の発見　非可換幾何学の発展
京都で国際数学者会議　数理科学記念館竣工
ツェルマノフが制限バーンサイド問題を解決
非線型偏微分方程式とフーリエ解析の新展開　川井数理科学財団
中島啓のえびら多様体研究　教養部の廃止
ボーチャーズによる保型関数論　第2次超弦理論革命
フェルマー予想の解決　大学院重点化・5大講座に
小野薫と深谷賢治によるアーノルド予想解決
合同研究棟の竣工
ヘイルズがケプラー問題を解決
コンセヴィッチの変形量子化理論
7つのミレニアム・プロブレム
(http://www.claymath.org/)

…とはいえ高校数学はほぼフランス革命のころ形作られた内容

長谷川浩司

最新の話はできませんが...

東北大学理学部
数学科が選んだ
現代数学のトピックス

赤字の項目は、東北大学理学部数学科関係のトピックス

1900年～

1900年代初め

● ポアンカレ、三体問題の研究とトポロジーの創始

1900年

● ヒルベルトの23の問題

ヒルベルトはパリの国際数学者会議において、集合論、基礎論、幾何学、リー群、物理学、数論、函数、代数、不連続群、解析、複素解析幾何など20世紀の数学が挑戦すべき23の問題を提示した。そのうちの5つの問題が未解決であり、現在もさかんに研究されている。

1902年

● ラッセルの逆理

自分自身を含まない集合の全体をMとする($M=\{x|x\notin x\}$)とき、M自身がMに含まれるかどうかを問うと、$M\in M$かつ$M\notin M$という矛盾が生ずる、と指摘。公理的集合論の発展をうながした。

● ルベーグの積分論

20世紀の解析学に一つの枠組を与えた。

1910年～

1910−13年

● ラッセルとホワイトヘッド、『数学原理』(3巻)を刊行

1910年

● ブラウエルによる、不動点定理の最初の証明

論文「多様体の写像に関して」において、トポロジーの基礎の多くを築いた。

1916年

● 掛谷問題の誕生

「長さ1の線分が一回転できる面積最小の図形を求めよ」という問題が掛谷宗一(当時、東北帝国大学助教授)により想起される。この問題はその後の発展により、20世紀後半の実解析学に絶大な貢献をした。

1918年

● ネーターの定理

相対性理論についてクライン、ヒルベルトと議論する中で、変分問題における対称性と保存則の一般的関係を発見。彼女はまた、抽象代数学および代数幾何学の発展に貢献した。

● ラマヌジャン予想

1920年～

1920年代

● ヒルベルトの数学基礎論研究

あらゆる数学を形式化し、記号の世界で問題を解決するアプローチを提唱した。

● 高木貞治の類体論

1923年

● ウィーナーのブラウン運動

空間の中でブラウン運動をする粒子のほとんどすべての軌跡は、連続ではあるがいたるところ微分不可能であることを示した。時間とともに変化する偶然現象を解析する確率過程論である。

$D=RT/6\pi kPN$

1928年

● フォン・ノイマンのミニマックス定理

2人ゼロ和ゲームおける最適混合戦略の存在を示した、ゲーム理論の中心的成果。

1930年～

1930年代初め

● ゲーデルの完全性定理と不完全性定理

論理的に正しい命題は演繹的に証明できる。しかし自然数論の無矛盾性はその内部では証明できない。

● モース理論の開拓

1933年

● コルモゴロフの確率論の公理化

1934年

● ルレイによるナビエ-ストークス方程式の弱解の存在証明

ここで提起された弱解の正則性の問題は21世紀に持ち越されている。

● ブルバキ、活動開始

1935年

● チューリングの計算論

チューリング・マシンの概念は、コンピュータの数学的基礎となった。

1936年

● 岡潔、多変数解析函数論の基本問題を解決

1938年

● 淡中忠郎の双対定理

1940年～

1940年代

● 角谷静夫の不動点定理

ブラウエルの不動点定理を拡張。数理経済学の均衡理論の証明に適用され有名になる。ブラウエルや角谷の定理に代表される不動点定理は、経済学やゲーム理論において、現在でも頻繁に使われている。

● 吉田耕作等による作用素の半群の理論の建設

● 伊藤清の確率微分方程式の理論確立

確率論の発展に決定的影響を与えた。数理ファイナンスなど応用の影響も大きく、2006年に第1回ガウス賞を受賞した。

1950年～

1950年

● シュワルツ『超函数の理論』発表

函数および測度の概念の一般化としての超函数を導入し、微積分やフーリエ変換などの解析学の諸演算を、超函数に対しても体系的に定義した。

1950年初め

● 小平邦彦の調和積分論

この理論の延長上で、消滅定理や埋め込み定理を確立し、超越的代数幾何学の基本的方法を与えた。

● 岩澤健吉の理論

20世紀後半の整数論を主導した。

1955年

● 谷山豊の問題

「有理楕円曲線は全て保型函数で与えられるか。」後にフェルマー予想の解決で決定的役割を果たす。楕円曲線に関する理論は超弦理論などでも基本的である。

1956年

● ミルナーの定理

7次元球面S^7上には、複数の異なるC^∞微分構造が存在する。

1957年

● グロタンディック、東北数学雑誌に「ホモロジー代数のいくつかの点について」発表

1958年

● 佐藤幹夫の超函数

解析函数の境界値として超函数を定義。1978年、岡本清郷、大島利雄らによって非コンパクト半単純型対称リーマン空間におけるポアソン変換の理論にも適用された。

1960年～

1960年代初め

● 佐々木重夫による接触多様体の理論

ケーラー多様体の類似である奇数次元多様体の幾何学を研究。佐々木多様体と呼ばれる。近年、超弦理論のAdS/CFT対応の文脈で佐々木-アインシュタイン多様体が大いに活躍し、注目を浴びている。

● グロタンディック、代数幾何学の基礎づけ

1964年

● 広中平祐の定理

標数0の代数多様体の特異点が解消できることを証明した。

1966年

● ブラウアーとファウラーの定理

有限単純群は、位数2の元の中心化群を決めると有限個しか存在しない。分類に大きな手がかりを与えた。

● カールソン、L^2函数のフーリエ級数の概収束性を証明

1969年

● ケルヴェアの定理、カービーとシーベマンの定理

組み合せ多様体は微分構造をもつとは限らない。位相多様体は一意的に単体分割可能である。

1960年代終わり

● 冨田・竹崎理論　作用素環の理論に大きく貢献した。

● ラングランズ予想　$GL(n,\mathbb{Q}_p)$, $GL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$のユニタリ表現論は共通である。

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^k f(z)$$

1970年～

1970年代前半

● 小田忠雄・三宅克哉などによるトーリック多様体理論の創設

この頃からドゥマズール、小田忠雄、三宅克哉、マンフォードなどの研究によりトーリック多様体の理論が始まる。小田による著書「凸体と代数幾何学」(1985)と "Convex bodies and algebraic geometry" (1988)はトーリック多様体に関する国内外の標準的な文献となる。

1974年

● ドゥリーニュ、ヴェイユ予想を解決

● 赤池情報量規準の提唱

1976年

● アッペルとハーケンによる四色問題の解決

「平面上の地図を、となりあう領域の色が異なるよう塗り分けるには、四色で十分である。」コンピュータがはじめて数学的検証に用いられた。

1970年代以降

● 散乱理論、保型函数論、函数空間論などの分野でリーマン予想と同値な命題、それを導く命題が発見された

● 青本和彦の多変数超幾何函数論

1980年～

1980年代

● ウェーヴレットの理論建設

情報のデジタル化の基礎の一つとなった。

1981年

● 有限単純群の分類が完成

任意の有限単純群は、素数位数の巡回群、n次交代群($n\geq 5$)、リー型の有限群、26個の散在有限単純群の内の一つと同型である。

1982年

● 4次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^4$は複数の微分構造を持つことが発見された

1983年

● ファルティングスの3つの証明

テート予想、シャファレビッチ予想、モーデル予想を肯定的に解決した。

1985年

● 神保道夫とドリンフェルト、量子群を独立に発見

1989年

● ミラー対称性の発見

キャンデラス、リンカー、シムリックが3次元カラビ=ヤウ多様体を大量に構成して発見。

1990年～

1990年

● 京都で国際数学者会議

● 森重文フィールズ賞受賞

代数多様体の分類理論。小平邦彦(1954年)、広中平祐(1970年)に続いて日本人では3人目。

1992年～

● 非線型偏微分方程式とフーリエ解析

従来の非線型偏微分方程式論とは異なる解析方法が、ブルガン、リオンスらにより導入された。古典解析の問題と非線型問題の可解性の問題との密接な関係を明らかにし、解析学に新しい視点を加えた。

1994年

● フェルマー予想の解決

ワイルスは、楕円曲線に対するゼータ関数の性質を用いて「nを3以上の整数とするとき、$x^n+y^n=z^n$をみたす正の整数x,y,zは存在しない」というフェルマー予想(フェルマーの最終定理)を解決した。

● ナッシュにノーベル経済学賞

非零和ゲーム(非協力ゲーム)の場合にミニマックス定理を拡張した業績により、ノーベル賞史上初の純粋数学者の受賞となった。

1995年

● ボーチャーズによる保型函数論

ムーンシャイン現象と代数曲面論のつながりを開拓。

1998年

● ケプラー予想の解決

予想から400年近い歳月を経てヘールズが証明を与えた。

2000年～

2000年

● 7つのミレニアム・プロブレム(→8ページ参照)

● 確率レヴナー方程式の理論の構築

2002～2006年

● ポアンカレ予想の解決

ペレルマンがインターネット上で公表した論文は数年かけて検証された。この業績によりペレルマンはフィールズ賞(2006年)を受賞するが辞退。

2005年

● 塩谷隆・山口孝男による3次元多様体の崩壊理論

アレクサンドロフ幾何を用いて、曲率が下に有界な3次元多様体の位相構造を研究。ペレルマンが証明した『幾何化予想』(ポアンカレ予想を含むより大きな予想)の証明において重要な役割を果たした。

数学として面白く，古くから現在まで研究されているのが恒等式

オイラー(左)，アーベル(右上)，ヤコビ

1707-83(スイス)　1802-29(ノルウェー)　1804-51(ドイツ)

恒等式とは

$ac+ad+bc+bd=(a+b)(c+d)$ など，**常に成り立つ式**のこと

この場合，和＝積の形

和の式を積の形にできると，いつ０になるかが分かる．

例 • $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

• $ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ ⇒ **2次方程式の解**

• $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$

無限個の和＝無限個の積　の恒等式・その１

- $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ の別証明

「左辺は $x = 1, -1$ で 0 になる 2 次式で，x^2 の係数が 1 だから」

- **オイラー(1707-1783)** は $\sin x$ の因数分解を考えた

「$\sin x$ は $x = 0, \pm n\pi$ (n は自然数) で 0 になり，原点で傾き１」

$\Rightarrow \sin x =$ 定数 $\times\, x(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\cdots ?$

- そのままでは収束しないので，各因子を π で割ってみる

$$x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots$$

n が大きくなると，$(1-\frac{x}{n\pi})(1+\frac{x}{n\pi}) = 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}$ は 1 に限りなく近づき，最後は 1 ばっかり掛けるような掛け算になる．

その１・つづき

定理(オイラー)

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots \qquad (1)$$

x^1 の係数は 1 だから,「原点で傾き 1 」を満たしている.

- ところで, $\sin x$ を $x=0$ の近くで近似する式がある(高三)：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + (x^5\text{以上の項}) \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ (1) = (2) の x^3 の係数を比べると（**解と係数の関係！**）

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2}\cdots \qquad \therefore\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

[きちんとやると大学２〜３年レベル．参考書：高木貞治「解析概論」など]

その２．準備：組み合わせの数と２項定理

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ =(n 個からk個を取り出す組み合わせの数)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\ (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + {}_3C_2a^2b + {}_3C_1ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

a^2b の係数3＝3 個のa から 2 個選ぶ(aab, aba, baa)場合の数$={}_3C_2$.

２項定理

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ka^kb^{n-k} + \cdots + b^n$$

なぜかパラメータを入れてみる（伝統に従いq と書く）

- $(1+x)(1+qx) = 1 + (1+q)x + qx^2$,
- $$(1+x)(1+qx)(1+q^2x) = \{1+(1+q)x+qx^2\}(1+q^2x)$$
$$= 1 + (1+q+q^2)x + \underbrace{\{q+(1+q)q^2\}}_{=q(1+q+q^2)}x^2 + q^3x^3$$
- $(1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)$
$$= \{1+(1+q+q^2)x+(q+q^2+q^3)x^2+q^3x^3\}(1+q^3x)$$
$$= 1+(1+q+q^2+q^3)x+\{(q+q^2+q^3)+(1+q+q^2)q^3\}x^2$$
$$+\{q^3+(q+q^2+q^3)q^3\}x^3+q^6x^4$$

ここで $(q+q^2+q^3)+(1+q+q^2)q^3 = (q+q^3)(1+q^2+q^3)$ である

$1+q=[2], 1+q+q^2=[3], 1+q+q^2+q^3=[4], \cdots$ と書いてみる

本日のクライマックス $\quad ([n] \overset{q=1}{=} n)$

$$\Rightarrow \bullet\ (1+x)(1+qx) = 1+(1+q)x+qx^2 = 1+[2]x+qx^2,$$

$$\bullet\ (1+x)(1+qx)(1+q^2x) = 1+(1+q+q^2)x+q(1+q+q^2)x^2+q^3x^3$$
$$= 1+[3]x+q[3]x^2+q^3x^3,$$

$$\bullet\ (1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)$$
$$= 1+(1+q+q^2+q^3)x+q(1+q^2)(1+q+q^2)x^2+q^3(1+q+q^2+q^3)x^3+q^6x^4$$
$$= 1+[4]x+q\frac{[4][3]}{[2]}x^2+q^3[4]x^3+q^6x^4 \left(\because 1+q^2=\frac{1+q+q^2+q^3}{1+q}=\frac{[4]}{[2]}\right)$$

$${}_n[C]_k=\frac{[n][n-1]\cdots[1]}{[k][k-1]\cdots 1\times[n-k][n-k-1]\cdots 1}$$ と書くと，$\frac{[4][3]}{[2]} = {}_4[C]_2$

q- 2項定理

$${}_n[C]_k = \frac{[n][n-1]\cdots[1]}{[k][k-1]\cdots[1]\times[n-k][n-k-1]\cdots[1]} \quad \left(\xrightarrow{q\to 1} \frac{n!}{k!(n-k)!} = {}_nC_k\right)$$

定理 $$(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)$$

$$= 1 + [n]x + q\frac{[n][n-1]}{[2]}x^2 + \cdots + q^{\frac{k(k-1)}{2}}{}_n[C]_k x^k + \cdots + q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n$$

∵わかってしまえば帰納法！${}_{n+1}[C]_k = q^{n-k+1}{}_n[C]_{k-1} + {}_n[C]_k$ より.

・知っていることから，ちょっと踏み出してみると何が起こるか？をやってみた.（数学的あそび心）

・うまくいった「あそび」の方向には大事なことが隠れていたりする.（その積み重ねが研究）

・今の式の場合，**アーベル**や**ヤコビ**の研究が延長線上にある

背伸び：ヤコビのテータ関数 Θ

$|q|<1$ ならば，$n\to\infty$ のとき $q^n\to 0$，$(1-q^nx)\to 1$

$\Rightarrow (1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots(1-q^nx)\cdots$ という積が考えられる

これが面白い関数になる．実際には，x^{-1} も仲間に入れて

$$\begin{aligned}\Theta(x,q) =&(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots(1-q^nx)\cdots\\ &\times(1-qx^{-1})(1-q^2x^{-1})\cdots(1-q^nx^{-1})\cdots\end{aligned}$$

を考えるのが良い $\Rightarrow x=1,\ q^{\pm1},\ q^{\pm2},\ q^{\pm3},\ \cdots$ でゼロになる

3 重積公式 (1824) $\Theta(x,q)=\dfrac{\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{\frac{m^2-m}{2}}(-x)^m}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}$

$\because$ $1+q^kx=q^kx(q^{-k}x^{-1}+1)$ に注意：q-2項定理($n=2N$)の左辺は

$$(q^{-1}x^{-1}+1)\cdots(q^{-N}x^{-1}+1)(1+q^{N+1}x)\cdots(1+q^{2N}x)$$

の形 $\Rightarrow q^Nx$ をあらためて $-x$ とし，$N\to\infty$ とすれば良い．

アーベルとヤコビの定理(19世紀前半)

楕円積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ **は Θ 関数で表される**

楕円の弧長を表すが，指数関数や対数関数，三角関数などで表せない

(楕円の縦横比 $\leftrightarrow$ パラメータ $k \leftrightarrow$ パラメータ q)

この発見(を理解する努力)が19世紀の数学の多くを作った

高木貞治「近世数学史談」，猪狩編「数学ってなんだろう」などを見ると面白い

仲間の式: ラマヌジャン,1884 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 a_2 \cdots$ **と書く(積の記号)**

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}$$

$\Rightarrow$ **相転移現象と関係することがその後わかっている(1990 年代の研究)**

リーマン，ラマヌジャン

リーマン 1826-66　　ラマヌジャン 1887-1920

(http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html より）

後半「使われる数学」のまとめ

○恒等式は面白い

○同じものを２通りに表すことでわかることがある. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

○２項定理→その変形→ヤコビのテータ関数→楕円積分

じつはテータ関数などは超弦理論（の進化形）においても大事
まだまだ未知の恒等式があるのだろう...

小池正夫[九大], ボーチャーズ[フィールズ賞受賞者], $\cdots$:1985 ころ

$$J(q)=q^{-1}\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{24}-744$$
$$=q^{-1}+0+196884q+\cdots+c(n)q^n+\cdots \qquad \text{とする}$$
$$\Longrightarrow J(q)-J(p)=p^{-1}\prod_{m\geq 1, n\geq -1}(1-p^mq^n)^{c(mn)}$$

Q　使われる数学　という題の意味は？

おわりに

○使われる数学＝人間が数学に使われて，大変な目にあう！

科学史家サートン「数学は人をもてあそぶ」[2]例:アルキメデス, ガロア, アーベル, ヤコビ, ガウス, リーマン, 岡潔, ペレルマン...

使われる？→みんな便利に使わせてもらっている数学への「恩返し」でもある（実利的に言えば，人類的な将来への投資）

○数学を通して，自然が人類に語りかける(**＋ 使える,役に立つ**)

ある先生「最も深い数学は不気味.」やはりオイラーによる例：

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

リーマンのゼータ関数. 真空のエネルギー, カシミール効果と関係

○数学も自然の声を聞く道のひとつ（好きこそものの上手なれ！）

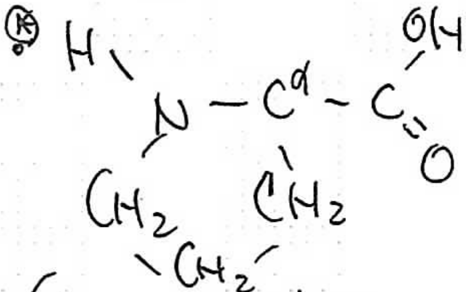
[2]「科学史と新ヒューマニズム」岩波新書

おまけ：最近聞いた，タンパク質を見分ける話

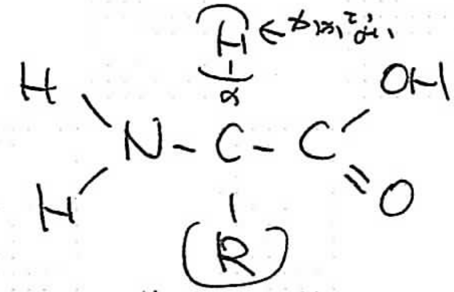
Amino acid

20種ある.

・ -Rがついてる Cを "α-Carbon" という

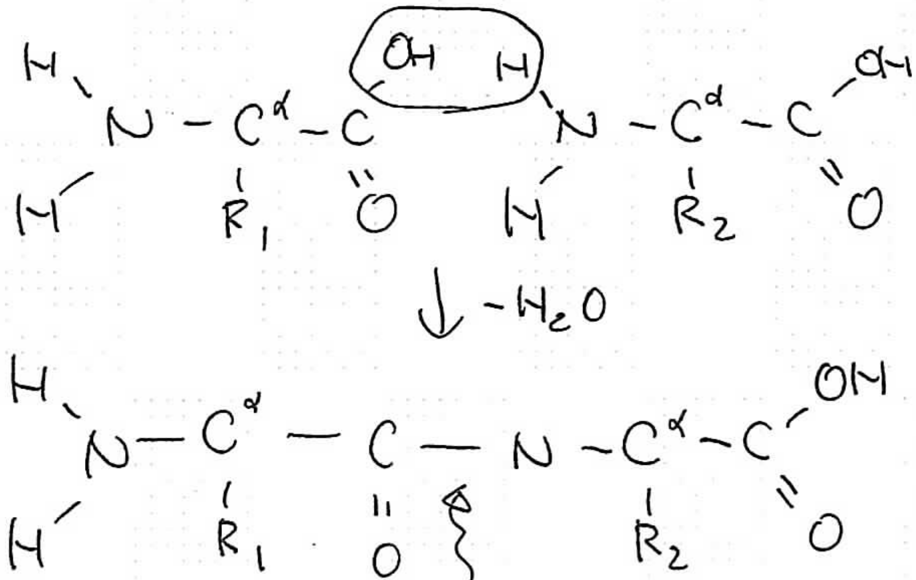


("Proline")は取扱が特殊.



"残基"といい 20種ある → 20種㊟

(e.g. R = -H ⇒ Glysin)



つながった = polypeptide, protein

立体構造は R_1とR_2,… が水素結合したりしておこる

タンパク質は多数のアミノ酸がつながったもの　分子式では立体構造はわからない

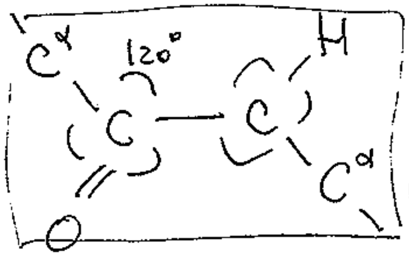
各部品の構造：

・一般のpolypeptideの1次構造は

$$\underbrace{N - R_1 R_2 \cdots R_L - C}_{\text{20文字のアルファベットからなるword}} \quad \text{と書ける} \quad \xrightarrow[\text{たたみ}]{\text{折り}} \quad \text{立体構造}$$

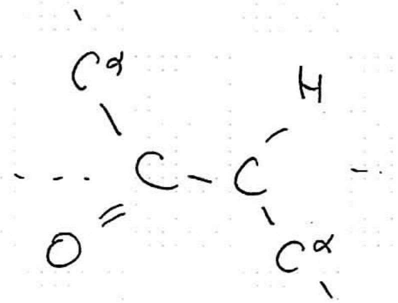
<u>local structure</u>

①



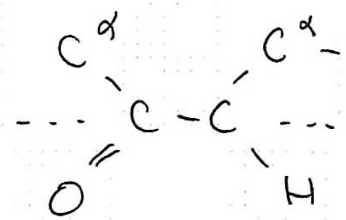
このunitは平面的 (peptide unit)

②



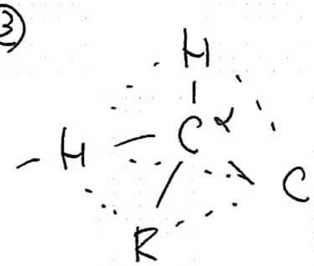
Cαのつき方は Proline以外はほとんどこの形 (trans型)

但 Prolineでは、



(cis型) もある。

③



この部分はtetrahedral.

これらがねじれたり，水素結合でつながって立体構造を作る

(水素結合＝ＨとＯがくっつく)　　**11万個以上のタンパク質で観察データあり**

長谷川浩司

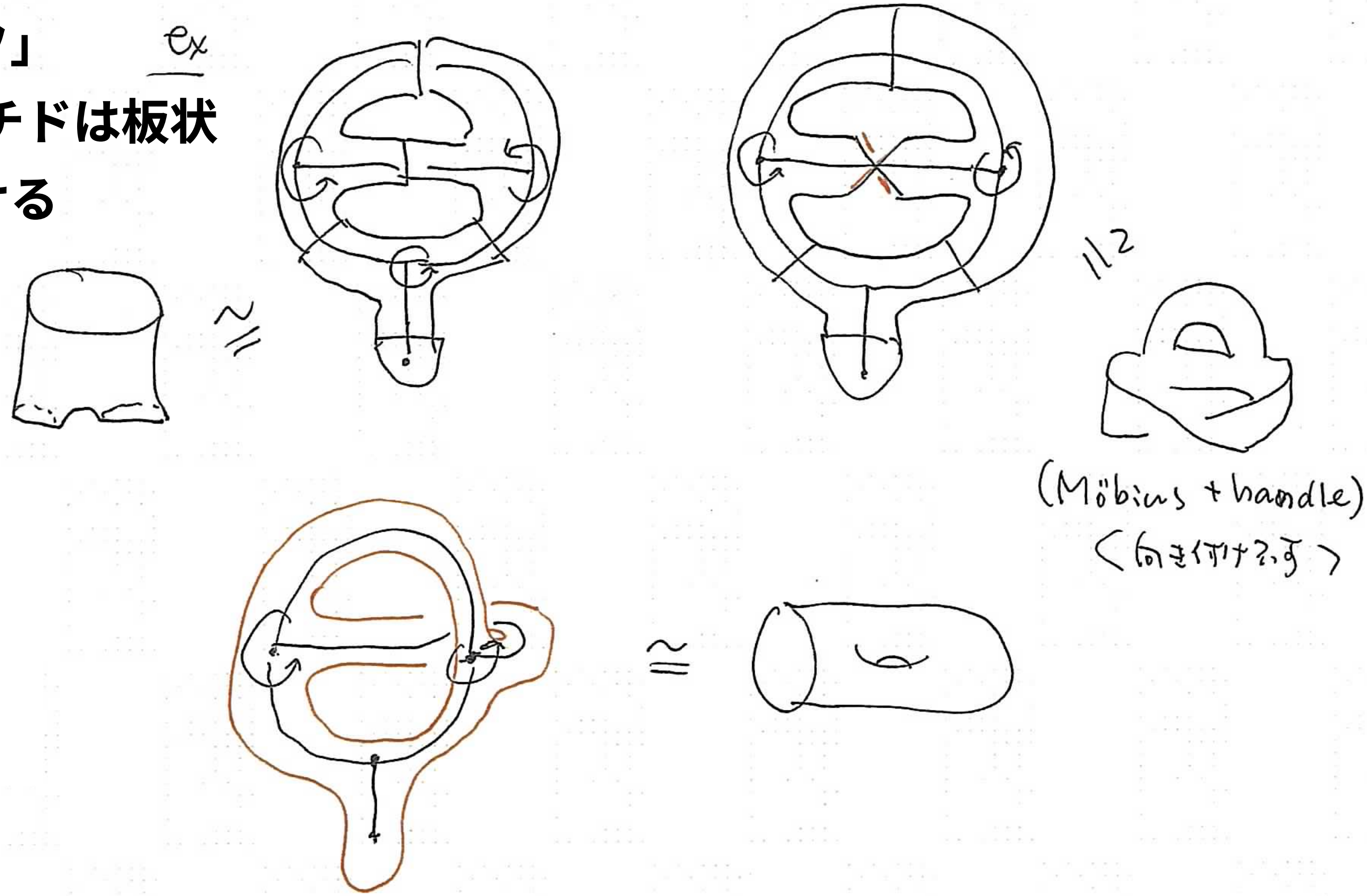
観察したデータの解析：タンパク質が作る面を考える

どこでねじれたり，くっついているか(水素結合)をX線回析で観察(Spring-8等)

⇒ 「グラフ」

実際のペプチドは板状

⇒ 面が描ける



「定理」できる面の穴の数＋境界の数＋水素結合の数でタンパク質はほぼ完全に見分けられる：11万個以上で例外は1組！(いわば双子)

この話の面白いところ

アミノ酸やタンパク質どうしは「カギとカギ穴」の関係で結合し，それが体の機能や薬の効果のオオモト

しかしタンパク質がいつ結合できるか，立体構造は分子式(1次構造)ではなかなかわからない(同じ1次構造でも環境で立体構造がかわる)

→「穴と境界の数」(数学的)と「水素結合の数」(環境を反映？)で双子以外は名前がつく＝描く形が本質で，分子構造は二の次？

タンパク質どうしが数学で会話しているかのよう

文献 “Fatgraph Models of Proteins” Penner, Knudsen, Wiuf, Andersen

http://arxiv.org/abs/0902.1025 (↑実は超弦理論の人)

ご静聴ありがとうございました

パンフレットは伊藤先生まで